

다중 격자 다중 차원법을 이용한 선접촉 또는 점접촉 탄성 유체 윤활 해석

(Analysis of Line and Circular Contact Elastohydrodynamic Lubrication with Multigrid Multilevel Method)

장 시 열 (Siyoul Jang)

국민대학교 기계자동차 공학부

School of Mechanical and Automotive Engineering
Kookmin University

ABSTRACT

The conventional analysis for the numerical computation of fluid film thickness with elastic deformation of contact region is performed by Newton-Raphson method for its fast convergence characteristics. However, both high load and relatively low sliding velocity frequently make it impossible for Newton-Raphson method to get both converged and stable solutions. In particular, this method cannot provide converged solution under the condition of high load above 1.0 GPa which frequently occurs in line contact of EHL problem. Multigrid multi-level method for the solver of non-linear partial differential equation including solid deformation is preferred to Newton-Raphson method for better convergence and stability and is applied to line contact EHL behavior in this study.

Key Words : elastohydrodynamic lubrication (EHL), multigrid multilevel method, Newton-Raphson method

서 론

정밀성과 내구성을 요구하는 많은 기계 요소 (기어, 구름 베어링, 캠과 종동물 등) 에서 접촉 부위에서의 기하학적 형상으로 인하여 국부적 집중하중을 받는다. 일반적으로 접촉 영역의 기하학적 형태에 따라 선접촉 또는 점접촉의 두가지 경우로 분류하는데, 어느 경우든지 접촉점에서 접촉 압력이 매우 크기 때문에 상대 마찰면의 탄성 변형량을 고려하여 하중 지지력을 계산한다. 집중 압력으로 인한 틈새에서의 유체의 물성 변화와 고체면의 탄성 변형량의 비선형적 관계는 수치 이론 해석의

어려움을 주고 있다.

이러한 문제를 해결하려는 수치 해석의 방법으로는 유체 압력을 계산하고 그에 따른 접촉 고체면의 탄성 변형량을 계산하는 직접법과 Hamrock and Dowson[1976], 빠른 수렴성의 특성을 이용한 Newton-Raphson, Houpert [1986] 방법이 주로 사용되어 왔다. 그러나 접촉 영역에서의 고집중 하중으로 인한 고체면의 탄성 변형량과 윤활유의 비선형적 점도 특성 변화가 작용 하중의 크기가 커질수록 수치 해석의 어려움이 더욱 커진다. 특히 1.0GPa 이상의 작

용하중 조건에서는 앞의 두가지 방법으로는 수치 해석적으로 그 해를 얻을 수 없는 경우가 많다.

최근 들어 비선형 편미분 방정식의 해법으로 그 수렴성과 안정성이 뛰어난 다중 격자 다중 차원 방법 (multigrid multi-level method), Lubrecht[1986]의 수치 해석 기법이 많이 이용되고 있다. 탄성 유체 윤활 해석은 유체의 비선형적 특성과 이와 연관된 유막 두께의 변화가 윤활유의 밀도, 점도등의 입력 변수를 변화시키는 음해법(implicit method)상의 어려움으로 1.0 Gpa 이상의 고하중 조건에서 수렴된 해를 얻기가 매우 어렵다. 다중 격자 다중 차원 방법을 탄성 유체 윤활 해석에 적용하면 보다 큰 작용하중에 대해서도 수렴성과 안정성을 확보할 수 있으며 실제 기계요소에서 발생하는 좁축 현상을 예측할 수 있다.

본 연구는 고하중의 조건의 탄성 유체 윤활 해석에 다중 격자 다중 차원 방법을 적용하는 수치 해석 기법을 개발 하였다. 그리고 이제까지 많이 사용되어온 Newton-Raphson 법의 결과와 비교하였으며 고하중 조건에서 그 효용성을 연구하였다.

해 석

Newton-Raphson 방법은 함수 값이 영인 미지수 값을 얻어내는 과정을 갖는다. 우선 지배 방정식을 이산화하여 선형화한 후 연립방정식의 해를 각 단계에서 구한 미지수에 대한

함수값의 변화율을 이용하여 수렴해를 다음과 같이 구한다.

$$f(p^*)=0 \quad (1)$$

$$p^{*k+1} = p^{*k} - \frac{f(p^{*k})}{\frac{df(p^{*k})}{dp^*}} \quad (2)$$

이 방법은 Newton-Raphson 법의 특성상 해에 가까운 초기값을 선정하면 단지 몇 번의 반복 계산 과정을 거치면 수렴해를 얻을 수 있는 장점이 있다. 식 (2)를 풀기 위하여 우선 Jacobian 행렬 $\frac{df(p^{*k})}{dp^*}$ 를 얻어야 하는데 구하고자 하는 미지수의 개수 N 에 따라 이 행렬의 크기는 N^2 의 크기로 커진다. 따라서 원형 접촉과 같은 이차원 탄성 유체 윤활 해석의 경우에서 비교적 정확한 해를 구하려면 미지수의 개수가 많아져서 하중의 크기에 상관없이 적용하기가 다소 어려워진다. 그러나 일차원 탄성 유체 윤활 해석의 경우에는 적은 배열의 할당과 빠른 수렴 속도로 많이 적용하고 있다.

반복계산 과정에서 생기는 수렴오차는 격자크기보다 크며, 이보다 작은 크기의 오차는 쉽게 제거된다. 다중 격자 다중 차원법은 격자 크기에 따른 수렴오차의 크기가 다르므로 격자 크기가 서로 다른 영역에서 각각 계산을 수행하여 크기가 다른 수렴오차를 체계적으로 줄여나가는 방법이다. 따라서 격자 크기 보다

큰 파장의 오차를 제거하기 위해서 격자 크기를 크게 한 계산 영역에서 계산을 수행하여 수렴속도를 빠르게 하고 다시 격자 크기가 작은 영역에서 해의 정확성을 높여 나간다. 이러한 이유로 다중 격자 다중 차원 방법을 탄성 유체 운할 해석에 적용하면 수렴 속도를 빠르게 할 수 있을 뿐만 아니라 격자수가 작아짐으로써 계산 수행에 포함되는 작업량도 작아져 계산 시간을 적게 걸린다. 이 방법의 계산 구조는 Figure 1 과 같이 4 개의 차원을 설정할 때 거친 격자점(coarse grid level) 방향으로의 차원 (level 1) 으로 미세 격자 차원의 수치해에 대하여 수렴 가속성을 주며, 미세 격자점 (fine grid level) 방향으로의 차원 (level 4) 으로 그 이전 거친 격자 차원의 수치해를 미세 격자 차원의 수렴해와 같은 정확도를 갖게 해준다.

탄성 유체 운할 유체의 유동 현상을 설명하는 수학적 서술은 레이놀즈 방정식 (Reynolds' Equation) (3) 으로 한다.

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\rho^* h^{*3}}{\eta^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\rho^* h^{*3}}{\eta^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) - \lambda \frac{\partial (\rho^* h^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (3)$$

레이놀즈 방정식의 미분 연산자 L^* 은 비선형 관계를 보여주며, 이러한 비선형 편미분 방정식의 다중 격자 다중 차원 방법의 해석 구조는 Full Approximation Scheme (FAS), Brandt [1984] 을 사용하여 수렴해를 얻는다. 우선 두개의 격자 구조만을 고려하여 FAS 해석 구조를 이용한 계산 순서를 설명하면 다음과 같다.

미세 격자 영역에서의 계산과정을 다음의 식으로 수행한다.

$$L^h p^{*h} = f^h \quad (4)$$

몇 번의 반복 계산 과정에서 정확해 p^* 에 대한 근사해 \tilde{p}^* 를 구하고, 이에 대한 잔류 오차 (residual) \tilde{r}^h 는 다음과 같이 계산된다.

$$\tilde{r}^h = f^h - L^h \tilde{p}^{*h} \quad (5)$$

거친 격자 영역에서 해 \tilde{p}^{*H} 를 미세 격자 영역에서 구한 근사해 \tilde{p}^{*h} 를 이용하여 구하는데 그 초기 값은 다음과 같다.

$$\hat{p}^{*H} = I_h^H \tilde{p}^{*h} + v^H \quad (6)$$

계산 초기에는 $v^H = 0$ 으로 한다. 여기서 I_h^H 는 미세 격자에서 거친 격자로의 제한자를 (restrictor) 표기한다.

따라서 거친 영역에서의 FAS 의 격자 방정식은 다음과 같으며 수렴 속도를 빠르게 할 수 있다.

$$L^H \hat{p}^{*H} = \hat{f}^H \quad (7)$$

$$\hat{f}^H = L^H (I_h^H \tilde{p}^{*h}) + I_h^H r^h$$

거친 격자 영역에서 \hat{p}^{*H} 의 근사값 \tilde{p}^{*H} 를 구하고 나면 미세 격자 영역에서 이 값을 보정할

필요가 있는데 다음과 같이 구한다.

$$\tilde{p}_{new}^{*h} := \tilde{p}^{*h} + I_H^h (\tilde{p}^{*H} - I_h^H \tilde{p}^{*h}) \quad (8)$$

여기서 I_H^h 는 거친 격자에서 미세 격자로의 보 간 관계를 나타내며, $I_h^H (\tilde{p}^{*H} - I_h^H \tilde{p}^{*h})$ 는 ν^H 의 근사값이며 직접적으로 구하는 것은 아니다. 레이놀즈 방정식 (3)을 이산화 하면 다음의 형태를 갖으며

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{i+\frac{1}{2},j}^* h^3}{\eta_{i+\frac{1}{2},j}^*} \frac{p_{i+1,j}^* - p_{i,j}^*}{\Delta x^2} + \frac{\rho_{i-\frac{1}{2},j}^* h^3}{\eta_{i-\frac{1}{2},j}^*} \frac{p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*}{\Delta x^2} \\ & + \frac{\rho_{i,j+\frac{1}{2}}^* h^3}{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}^*} \frac{p_{i,j+1}^* - p_{i,j}^*}{\Delta y^2} + \frac{\rho_{i,j-\frac{1}{2}}^* h^3}{\eta_{i,j-\frac{1}{2}}^*} \frac{p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*}{\Delta y^2} \quad (9) \\ & - \frac{\lambda}{\Delta x} (\rho_{i,j}^* h_{i,j}^* - \rho_{i-1,j}^* h_{i-1,j}^*) = 0 \end{aligned}$$

여기서

$$\lambda = \frac{12\eta_0 UR_x^2}{b^3 p_h} \quad \text{이다.}$$

일차원의 지배방정식의 경우는 위의 이차원 보다 더욱 간단하여 정리하기가 수월하다. 압력 계산을 위한 반복 계산 과정은 압력 변화에 의한 탄성 변형량의 변화율을 고려하며 일차원의 경우는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_{i,new}^* = p_i^* \frac{f_i^*}{\frac{\partial f_i^*}{\partial p_i^*} + \frac{\partial f_i^*}{\partial \eta_{i+\frac{1}{2}}^*} \frac{\partial \eta_{i+\frac{1}{2}}^*}{\partial p_i^*} + \frac{\partial f_i^*}{\partial \eta_{i-\frac{1}{2}}^*} \frac{\partial \eta_{i-\frac{1}{2}}^*}{\partial p_i^*} + \frac{\partial f_i^*}{\partial h_i^*} \frac{\partial h_i^*}{\partial p_i^*} + \frac{\partial f_i^*}{\partial h_{i-1}^*} \frac{\partial h_{i-1}^*}{\partial p_i^*}}$$

여기서 탄성 변형량은 다음과 같다.

$$h_i^* = h_0^* + \frac{x_i^2}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N p_j^* \left(x_i - x_j + \frac{\Delta x^*}{2} \right) \left(\text{Log} \left| x_i - x_j + \frac{\Delta x^*}{2} \right| - 1 \right) - \left(x_i - x_j - \frac{\Delta x^*}{2} \right) \left(\text{Log} \left| x_i - x_j - \frac{\Delta x^*}{2} \right| - 1 \right)$$

정밀한 탄성 변형량의 계산을 위한 방법으로 몇가지 검증된 방법이 있으며, 본 연구에서는 일차원의 경우 Hamrock에 의한 방법과 Houpert에 의한 방법을 비교하였다.

결 과

탄성 유체 윤활 해석의 경우 작용하중에 대한 탄성 변형량의 계산이 매우 중요하다. 특히 접촉점 (Hertzian 접촉 부위)의 경계 부분에서는 압력의 변화가 급격히 변화하는 부분이기 때문에 수렴해를 얻으려면 정확한 탄성 변형량의 계산이 필요하다. Figure 2는 접촉점 경계 부분에서의 차이점을 Hertz 접촉의 경우에 대하여 보여 주고 있다.

Figure 3에서 Figure 5은 Newton-Raphson, Houpert[1986] 방법을 사용하였을 경우 수렴이 초기에 빠르게 진행되는 것을 보여준다. Figure 6은 비교적 고하중일 경우 Newton-Raphson 법은 불안정성을 보여주고 있음을 알 수 있다.

이러한 고하중 조건에 대하여 다중 격자 다중 차원 방법은 보다 안정된 수렴해를 얻을 수 있는데, Figure 7은 실제 기계 요소에서 작용되

는 하중인 1.0 GPa 이상 ($W=1.5 \times 10^{-4}$ 이상) 의 경우에도 안정된 수렴해를 보여주고 있다. 이 차원 원형 점접촉의 경우도 쉽게 수렴해를 얻을 수 있는데 Figure 8은 점접촉 형태의 전형적인 형태를 보여 주고 있다.

결 론

탄성 유체 윤활 해석으로 많이 사용되는 Newton-Raphson 법과 다중격자 다중차원법의 비교를 통하여 각각의 특성을 밝혔다. 일반적으로 기계 요소에서 발생하는 고하중의 경우 다중 격자 다중 차원법이 보다 효과적인 방법이다. 그 이유는 계산 알고리즘으로 볼 때 다중 격자 다중 차원법이 배열 할당이 적으며 계산량에 있어서 보다 효과적이기 때문이다.

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단의 신진교수연구지원 사업(과제번호 98-12-021)으로 이루어진 연구로 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

1. Hamrock, B. J. and Jacobson, B. O., "Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts," ASLE Transactions, 1984, Vol. 24, No. 4, pp275-287
2. Houpert, L. G. and Hamrock, B. J., "fast Approach for Calculating Film Thickness and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads," Journal of Tribology, 1986, Vol. 108, pp411-420
3. Lubrecht, A. A., Napel W.E. ten and Bosma, R., "Multigrid, An Alternative for Calculating Film Thickness and Pressure Profiles in Elastohydrodynamically Lubricated Line Contacts," 1986, Journal of Tribology, Vol. 108, pp551-555
4. Brandt, A., "Multigrid Techniques: 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics," G.M.D.-Studie No. 85 from G.M.D.-FIT, Postfach 1240, D-5205, St. Augustin 1 W.-Germany
5. Hamrock, B. J. and Dowson, D., "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts," 1976, Journal of Lubrication Technology, Vol. 96, pp223-229

Figures

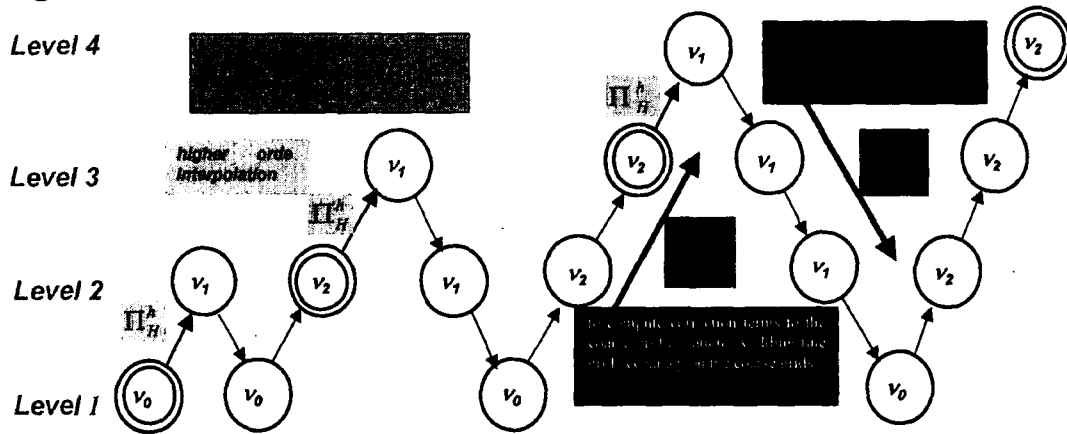


Figure 1. Structure of multigrid multilevel cycles for non-linear fluid behaviors, Brandt [1984], Venner[1991], Jang[1998] (Full Approximation Scheme)

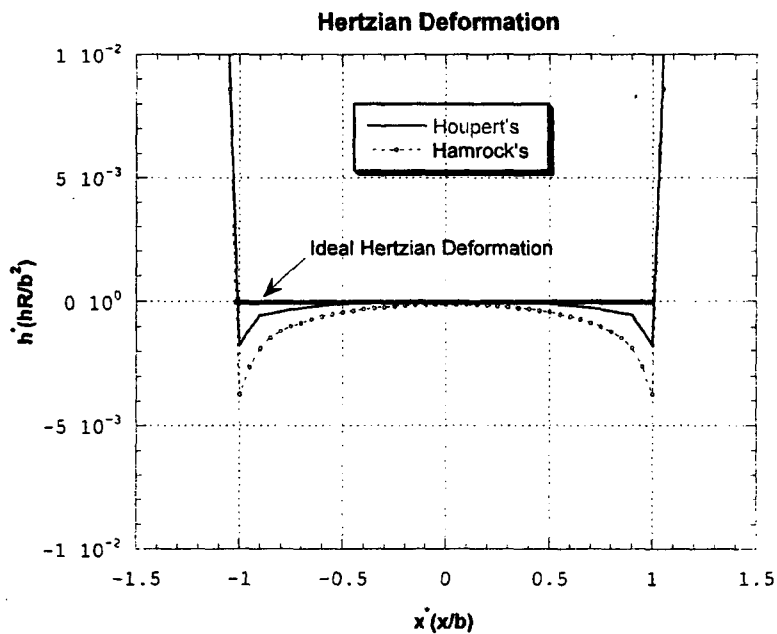


Figure 2 Comparison of elastic deformations among ideal case, Hamrock's and Houpert's method

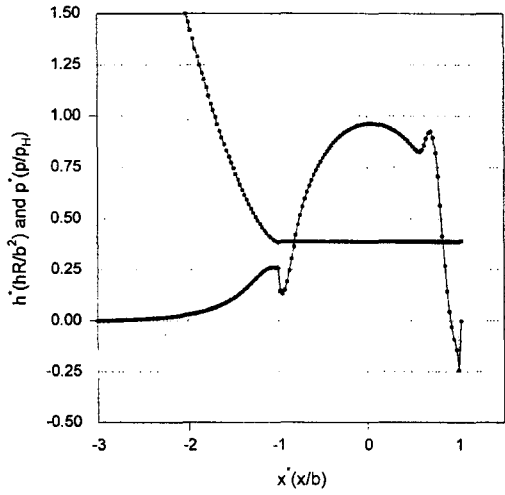


Figure 3 First iteration with Newton-Raphson method $W^*=1.0 \times 10^{-4}$, $U^*=1.0 \times 10^{-10}$

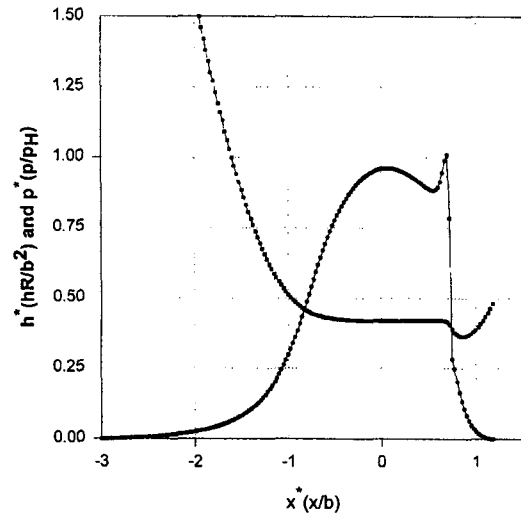


Figure 5 Third iteration for EHL analysis with Newton-Raphson method $W^*=1.0 \times 10^{-4}$, $U^*=1.0 \times 10^{-10}$

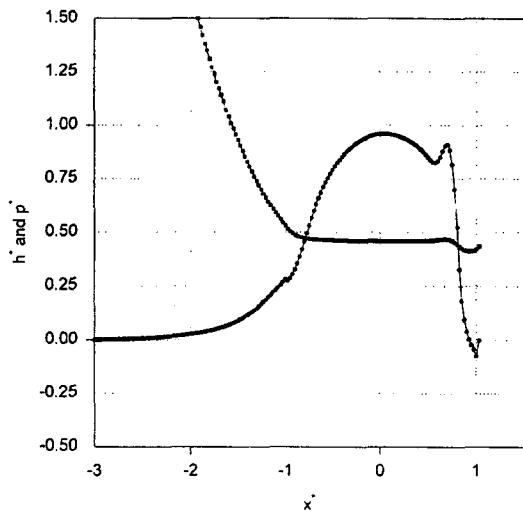


Figure 4 Second iteration for EHL analysis with Newton-Raphson method $W^*=1.0 \times 10^{-4}$, $U^*=1.0 \times 10^{-10}$

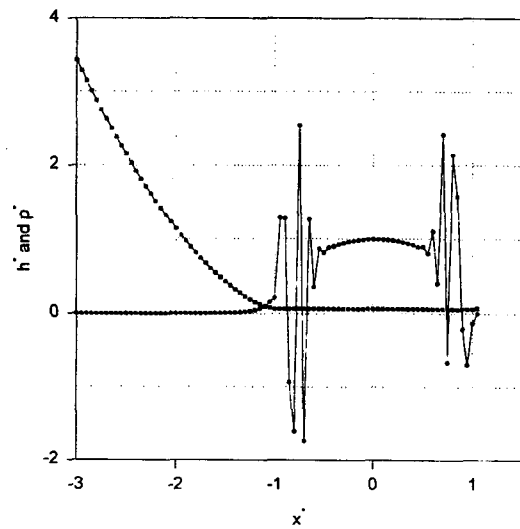


Figure 6 Unstability of convergence with Newton-Raphson method under high load $W^*=1.5 \times 10^{-4}$, $U^*=1.0 \times 10^{-10}$

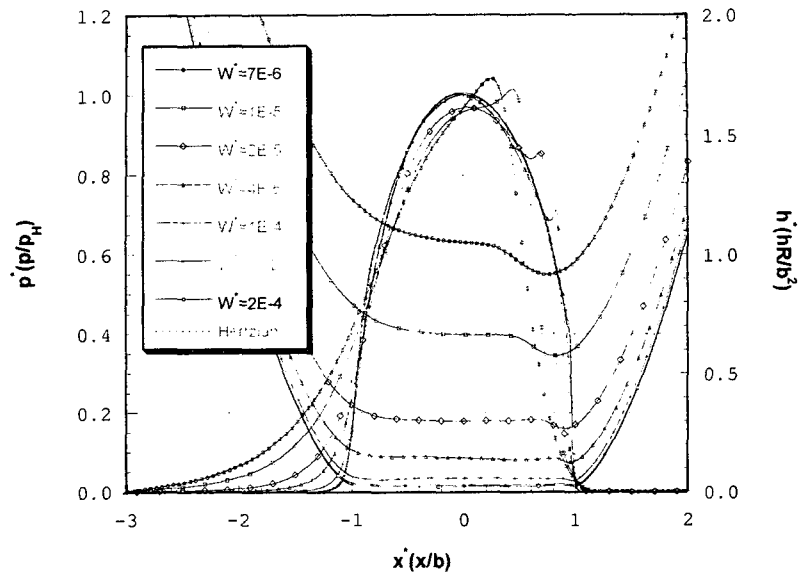


Figure 7 Elastohydrodynamic analysis for high load cases with multigrid multilevel method for one dimensional case

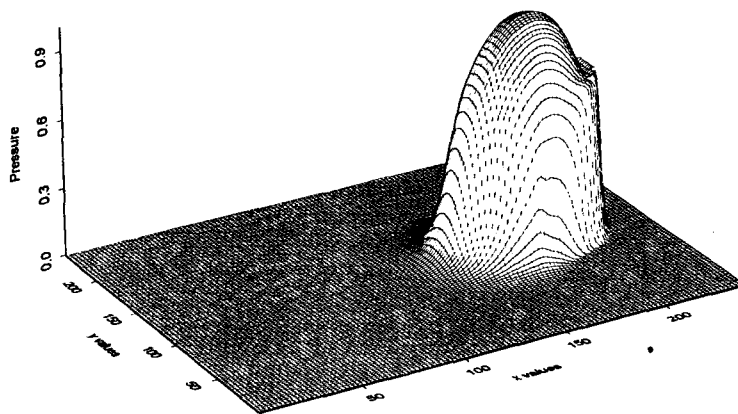


Figure 8 EHL analysis with multigrid multilevel method $W^*=5.0 \times 10^{-7}$, $U^*=5.0 \times 10^{-12}$