

접촉 면적과 접촉면 압력분포에 대한 마찰의 영향

이문주 · 조용주*

부산대학교 대학원 정밀기계공학과

*부산대학교 공과대학 기계공학부

The Effects of Friction on the Contact Area and the Distribution of Contact Pressure

Mun-Ju Lee and Yong-Joo Cho*

Graduate School, Pusan National University

*School of Mechanical Engineering, Pusan National University

Abstract - In the 3-Dimensional contact of the smooth spheres, the effects of friction on the contact area and the distribution of contact pressure was studied numerically. The contact area and pressure distribution was evaluated for the only normal load and for the case of a normal load in the presence of a tangential traction. To do this work, the technique of simple discretization using the load · displacement relationship for a uniformly distributed load of a rectangular patch was used.

key words - Smooth contact problem(평활한 접촉문제), Friction(마찰), Contact area(접촉면적), Surface pressure distribution(표면 압력분포), Rectangular patch(사각조각 표면)

서론

기계요소에서 발생하는 면 접촉의 형태는 non-conformal 탄성체의 접촉으로 모델링할 수 있고, 이 면 접촉의 심각한 정도에 따라 마찰·마모의 거동이 결정된다. 특히 마찰계수가 클 때는 표면에서의 접촉영역의 크기와 모양이 수직하중만이 작용할 때와는 다르게 변할 뿐만 아니라 표면에서의 전단응력이 증대되어 Stick-slip, 프레팅 마모와 같은 현상을 유발한다. 따라서 이러한 접촉면의 미소접촉거동을 해석하기 위해서는 접촉영역의 크기와 접촉면의 압력분포에 대한 접

선하중의 영향을 고려해야한다. Hertz[1]는 탄성체사이에 수직하중만이 작용하는 경우에 대해 수직하중과 접촉면적 및 접촉면 압력분포와의 관계를 닫힌 해의 형태로 구하였다. 수직접촉을 하는 두 개의 non-conformal 탄성체의 계면에 수직하중과 접선하중이 동시에 작용하는 경우에 대해서 Bufler는 서로 다른 탄성계수를 가진 물체간의 2차원 접촉에 대한 접선하중의 영향에 대해 연구하였다[2]. 그는 접선하중의 영향에 의해 접촉영역이 약간 증대되고 압력분포의 중심이 끌리는 쪽의 모서리로 약간 이동되었으나 마찰계수가 1보다 작은 실제문제에서 Hertz 해와 비교할 때 그 영향은 매우 미미하다는 것을 보여주었다. 그

러나 거친 표면의 실제접촉에는 접촉영역의 형상이 불규칙하여 Hertz나 Bufler의 결과의 적용에는 한계가 있다. 따라서 실제 거친 접촉문제의 해석을 위해서 수치적인 접근이 요구된다. 이러한 시도의 일부로 3차원 접촉문제에 대해 Boussinesq와 Cerruti의 점 하중(Point load)의 힘·변위 관계식을 이용하여 Bufler의 결과와 유사한 결과가 Ahmadi [3]에 의해 보여졌다. 일반적으로 수치적인 접촉문제의 해석에서 반 무한체위의 사각조각 표면에 작용하는 균일한 수직 분포하중에 의한 하중·변위 관계[4]가 많이 이용된다. 본 연구에서는 이전 연구에서 구한 접선 분포하중에 대한 결과[5]를 이용하여 수치적으로 접촉면적과 접촉면 압력분포를 구하여 접촉면적과 접촉면 압력분포에 대한 마찰의 영향을 검토해보고자 한다. 수치해석을 위해서 수직하중에 대해서는 Love의 식을 접선하중에 대해서는 조 등의 식을 이용하였다.

2. 이론

Fig. 1과 같은 등방성이고 균질인 두 non-conformal 탄성체에 수직하중과 접선하중이 작용할 때 접촉면적과 접촉면 압력분포의 변화를 알기 위해 사각조각 표면에 작용하는 균일한 분포하중에 의한 변위의 관계를 이용하여 두 탄성체사이의 접촉문제를 수치적으로 해석하고자 한다. Fig. 1과 같은 non-conformal 탄성체의 접촉을 고려할 때 접촉영역은 탄성체의 다른 크기에 비해 매우 작으므로 두 탄성체는 반 무한체로 생각할 수 있다. 이때 탄성체 1과 2의 표면을 매끄럽다고 가정한다면 접촉부 근처의 표면을 2차 포물면으로 근사할 수 있다. 두 물체의 최초의 접촉점 O 에 수직하중 P 와 접선하중 Q 가 동시에 작용할 때 표면 위의 점 $M(x,y,z)$ 과 $N(x,y,z)$ 은 접촉영역에서 접하게 된다. $f(x,y)$ 는 두 탄성체의 표면 위의 두 점 $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ 사이의 접촉선의 형태함수(Shape function)이고 $e(x,y)$ 는 접촉 후의 형태함수라고 하자. 하중이 가해지면서

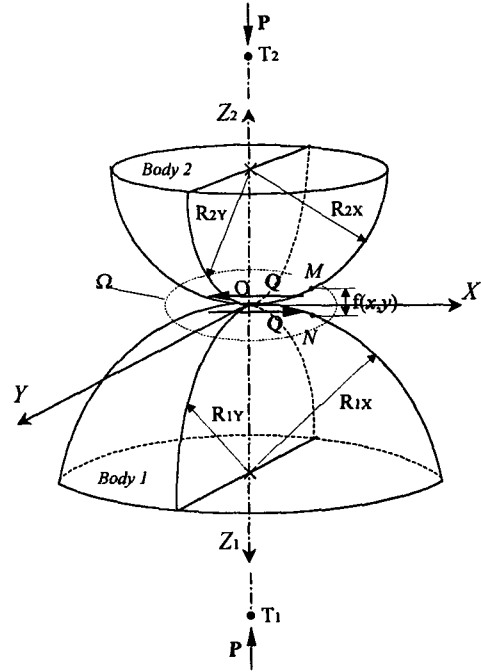


Fig. 1 Schematic diagram of two non-conformal contact bodies.

두 탄성체위의 점들은 다음과 같은 관계를 가지며 $f(x,y)$ 에서 $e(x,y)$ 로 변한다.

$$e(x,y) = f(x,y) + u_{z1}^P + u_{z2}^P + u_{z1}^Q + u_{z2}^Q - \delta \quad (1)$$

여기서, u_{z1}^P, u_{z2}^P 과 u_{z1}^Q, u_{z2}^Q 은 각각 수직하중 P 와 접선하중 Q 에 의한 두 탄성체의 표면 위의 두 점 $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ 에서의 변위로서 각 탄성체의 안 쪽을 양의 방향으로 한다. δ 은 표면에서 멀리 떨어진 점 T_1, T_2 의 유효강체변위(Effectively rigid displacement)이다. 다음 절에서 식 (1)의 u_{z1}^P, u_{z2}^P 만을 고려한 경우, u_{z1}^Q, u_{z2}^Q 도 고려하는 경우로 나누어 접선하중의 작용에 따른 접촉면적의 크기와 접촉면 압력분포의 변화를 검토해본다.

2-1. 수직하중만을 고려한 경우

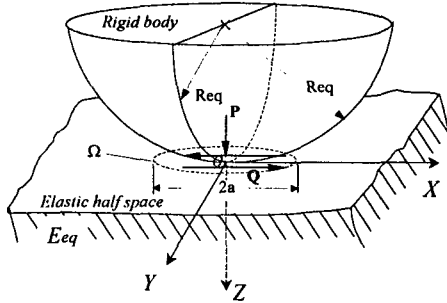


Fig. 2 Schematic diagram of a equivalent contact geometry

본 논문에서는 Fig. 1에서 각 탄성체의 주축방향 곡률이 같은 경우($R_{1x}=R_{1y}, R_{2x}=R_{2y}$) 즉, 두 개의 구(Sphere)들의 접촉문제를 고려한다. 일반적으로 이러한 두 개의 구 면간의 접촉문제는 Fig. 2와 같이 제 3의 강체 구와 반 무한 평판의 접촉으로 등가시켜 해석한다. 강체 구의 등가 곡률반경은 다음과 같다.

$$R_{eq} = \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\}^{-1} \quad (2)$$

여기서, $R_1 = R_{1x} = R_{1y}, R_2 = R_{2x} = R_{2y}$ 이다. Fig. 2에서 E_{eq} 는 복합탄성계수로 다음과 같다.

$$E_{eq} = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (3)$$

그리고 Fig. 2의 표면 위의 두 점간의 접촉 전 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x, y) = R_{eq} - \sqrt{R_{eq}^2 - (x^2 + y^2)} \quad (4)$$

접선하중이 작용하지 않는 경우 두 탄성체

의 표면 위의 두 점 $M(x, y, z), N(x, y, z)$ 사이의 거리는 다음의 관계를 가진다.

$$e(x, y) = f(x, y) + u_{z1}^p + u_{z2}^p - \delta \quad (5)$$

접촉영역 Ω 내에서는 $e(x, y)=0$ 으로 식 (5)는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\int \int_{\Omega} (u_{z1}^p + u_{z2}^p) dx dy = \delta - f_i(x, y) \quad (6)$$

여기서, u_{z1}^p, u_{z2}^p 는 사각조각 표면에 작용하는 균일한 수직 분포하중에 의한 변위로서 부록에 제시하였다. 사각조각 표면 내에서는 균일한 압력을 가지므로 식 (6)은 다음과 같이 단순 이산화될 수 있다.

$$C_1 \sum_{j=1}^k F_{ij} p_j = \delta - f_i \quad (7)$$

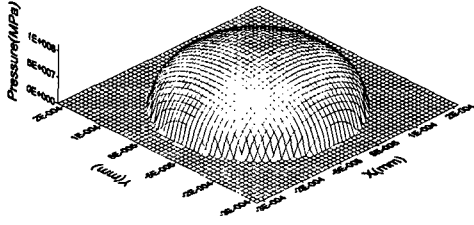
여기서, $C_1 = (1-\nu_1^2)/\pi E_1 + (1-\nu_2^2)/\pi E_2$ 이고 k 는 접촉영역 Ω 내에서의 사각조각 표면들의 수이고, F_{ij} 는 요소 j 에서의 수직분포하중에 의한 요소 i 에서의 영향을 나타내는 영향함수(Influence function)이다.

2-2. 마찰을 고려한 경우

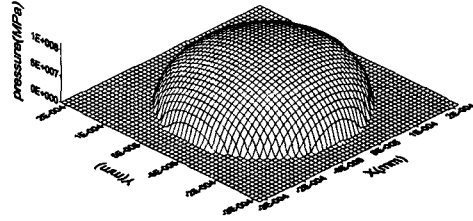
수직하중과 접선하중이 동시에 작용할 때 접촉영역 Ω 내에서 두 탄성체위의 두 점 $M(x, y, z), N(x, y, z)$ 간의 거리는 식 (1)로부터 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\int \int_{\Omega} (u_{z1}^p + u_{z2}^p + u_{z1}^q + u_{z2}^q) dx dy = \delta - f_i(x, y) \quad (8)$$

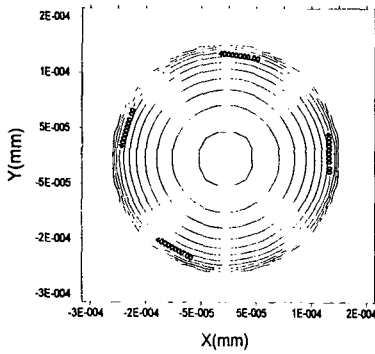
여기서 u_{z1}^q, u_{z2}^q 는 사각조각 표면에 작용하



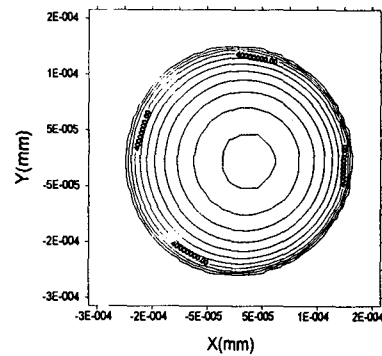
(a) 3-D pressure distribution($\mu=0$)



(c) 3-D pressure distribution($\mu=1$)



(b) Pressure contour($\mu=0$)



(d) Pressure contour($\mu=1$)

Fig. 3 Comparison of pressure distribution due to P in the absence of friction and due to P in the presence of friction($P=10N$).

는 균일한 접선 분포하중에 의한 변위로서 부록에 제시되어 있다. 식 (8)을 단순 이산화하면

$$C_1 \sum_{j=1}^k F_{ij} p_j + C_2 \mu \sum_{j=1}^k F'_{ij} p_j = \delta - f_i \quad (9)$$

이다. 여기서 $C_2 = (1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1) / 2\pi E_1 - (1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2) / 2\pi E_2$ 이고 F'_{ij} 는 접선하중에 대한 영향함수이다.

3. 결과 및 고찰

본 논문에서는 Fig. 2와 같이 P 와 Q 가 동시에 작용할 때 접촉면적과 접촉면 압력분포에 대한

Table 1. Mechanical properties

	Material	E(GPa)	ν	β
Body 1	Al	70	0.33	0.11169
Body 2	Steel	200	0.30	

Table 2. Comparison between Hertz solution and the present solution.

	A_0 (mm ²)	P_{max0} (MPa)	δ (μ m)
Hertz solution	0.1323	113.40	0.6320
Present solution	0.1336	113.34	0.6319
Error(%)	0.98	0.053	0.016

마찰의 영향을 고려하고 아울러 하중에 따른 접촉면적과 유효강체변위(δ)의 변화를 계산하였다. 수치계산을 위한 여러 물성치들은 Table 1과 같고 탄성체 1, 2는 곡물 반경들이 $R_1=100\text{mm}$, $R_2=200\text{mm}$ 인 구로 하였다. 본 논문의 그림들은 Table 1의 값들에 의해 나타낸 것이다. Table 2는 본 연구에서 구한 수치 해의 정확성을 입증하기 위해서 수직하중만이 작용할 때의 수치 해와 Hertz해와의 차이를 비교한 것이다. 수치해석결과 Table 2에 나타난 것처럼 본 연구결과와 Hertz해와의 차이가 매우 미미하여 본 논문의 계산결과의 정확성이 잘 입증되었다. Fig. 3은 마찰을 고려할 때와 수직하중만이 작용할 때의 압력분포를 나타낸 것이다. Figs. 3(a),(b)는 수직하중만이 작용하는 경우의 압력분포이고, Figs. 3(c),(d)는 마찰계수 $\mu=1.0$ 일 때의 압력분포를 나타낸 것이다. 마찰이 고려되는 경우 압력분포의 중심은 마찰력이 작용하는 방향인 양의 X축 방향으로 약간 기울어짐을 알 수 있다. Fig. 4는 접선하중 Q_x 의 작용에 의한 압력분포의 변화를 나타낸 것으로 마찰의 영향에 의해 접촉영역의 중심이 $0.154 a_0$ 만큼 오른 쪽으로 이동했음을 Fig. 3보다 좀더 확실히 보여준다. Fig. 5는 접촉면적과 최대 접촉압력에 대한 마찰의 영향을 나타낸 것이다. 마찰의 영향이 커질수록 접촉면적은 증가하고 최대 접촉압력은 감소하는 경향을 보인다. 마찰계수가 1이하인 경우에 접촉면적 및 최대 접촉압력에 대한 증감은 각각 약 0.67%와 0.8%이하이다. 이 사실은 기존의 연구 결과들의 경향과 잘 일치한다. 실제로 대부분의 접촉문제는 마찰계수는 1이하이므로 접촉해석에서 접촉면적에 대한 마찰의 영향은 매우 미미하여 무시할 수도 있음을 본 연구 결과로부터 잘 알 수 있다. Fig. 6은 접촉면적 및 유효강체변위에 대한 작용하중의 영향을 나타낸 것으로 작용하중이 커질수록 접촉면적과 유효강체변위는 증가함을 보여준다.

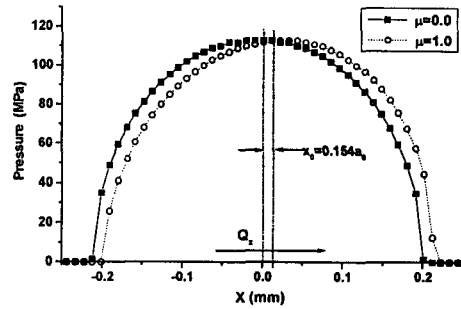


Fig. 4 Influence of friction on pressure distribution along $y=0$. (Q_x : Frictional force in the X direction, x_0 : a distance shifted by Q_x , a_0 : half length of a contact width due to normal load $P=10\text{N}$, $\beta=0.11169$)

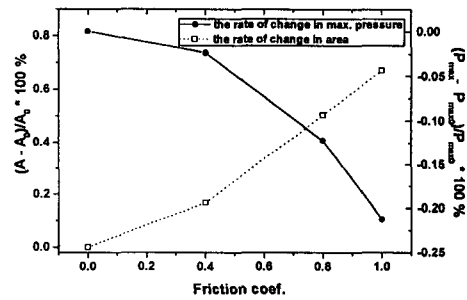


Fig. 5 Effect of friction on the contact area and maximum contact pressure($\beta=0.11169$)

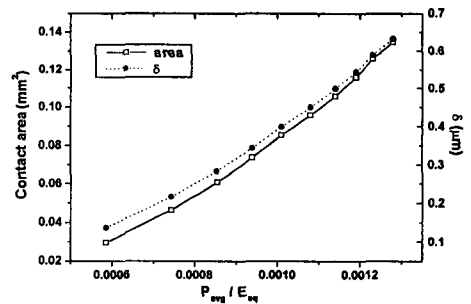


Fig. 6 Effect of load on the contact area and effectively rigid displacement(P_{avg} : averaged contact pressure, E_{eq} : Composite elastic modulus of contacting bodies, $\beta=0.11169$, $\mu=0.5$)

4. 결론

본 연구에서는 접촉면적과 접촉면 압력분포에 대한 마찰의 영향에 대해서 연구하였다. 사각조각 표면의 작용하는 균일한 분포하중에 의한 하중, 변위관계를 이용하여 3차원 구 접촉에 대해서 접선하중이 접촉면적과 접촉면 압력분포에 미치는 영향을 수치적으로 해석하였다. 본 연구결과는 기존의 2차원 문제의 결과와 마찬가지로 마찰의 영향에 의해 접촉면적이 증가했으나 마찰계수가 1이하인 경우에는 그 증가율이 매우 미미하여 접촉면적에 대한 마찰의 영향은 무시될 수 있음을 보여주었다. 그리고 압력분포의 중심도 마찰력이 작용하는 쪽으로 이동됨을 알 수 있었다.

기호 및 약어

X, Y : Coordinate axes in the common tangent plane between two bodies
 P : Normal load
 μ : Friction coefficient
 $Q_x (= \mu P)$: Tangential load in the X direction
 $M(x, y, z)$: A point on the surface of body 2
 $N(x, y, z)$: A point on the surface of body 1
 q_x : A uniform tangential traction of a rectangular patch on the elastic half space
 p : A uniform normal traction of a rectangular patch on the elastic half space
 u_{z1}^p, u_{z2}^p : Normal displacement due to a uniformly distributed normal load p
 $u_{z1}^{q_x}, u_{z2}^{q_x}$: Normal displacement due to a uniformly distributed tangential load q_x
 $f(x, y)$: Shape function before deformation
 $e(x, y)$: Shape function after deformation
 δ : Effectively rigid displacement
 T_1, T_2 : Points in the body 1, 2 distant from the interface
 F_{ij} : Influence function by p
 F'_{ij} : Influence function by q_x

i, j : Indices indicating the center point of a rectangular patch
 ν_1, ν_2 : Poisson's ratio for body 1, 2
 E_1, E_2 : Young's modulus of body 1, 2
 E_{eq} : Composite elastic modulus of contacting bodies
 β : Dundurs' parameter

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\{(1-2\nu_1)/G_1\} - \{(1-2\nu_2)/G_2\}}{\{(1-\nu_1)/G_1\} + \{(1-\nu_2)/G_2\}} \right]$$
 G_1, G_2 : Shear modulus of body 1, 2
 C_1, C_2 : Elasticity parameter
 R_{1x}, R_{1y} : Radii of curvature for body 1
 R_{2x}, R_{2y} : Radii of curvature for body 2
 $R_x = R_y = R_{eq}$: Equivalent radii of curvature
 A_0 : Contact area due to normal load P in the absence of friction.
 A : Contact area due to normal load P in the presence of friction.
 P_{max0} : Maximum contact pressure due to P in the absence of friction.
 P_{max} : Maximum contact pressure due to P in the presence of friction.
 P_{avg} : Averaged contact pressure
 Ω : contact area
 a : half contact length
 x_0 : A distance shifted by Q_x ,
 a_0 : Half length of a contact width due to normal load P

참고 문헌

1. Hertz, H., "Über die Berührung fester elastischer Körper", J. f. d. Reineu. Angewandte Math., Vol. 92, pp. 156-171. 1882.
2. K.L. Johnson., "Contact mechanics", Cambridge university press, 1985
3. Ahmadi, N., "Non-hertzian normal and tangential loading of elastic bodies in contact", Ph.D. dissertation, Northwestern University,

June 1982.

4. Love.A.E.H, " Stress produced in a semi infinite solid by pressure on part of the boundary", Phil. Trans. Royal Society, A228, pp. 377-420, 1929.
5. 조 용주, 이 문주, "반 무한체 위의 사각 조각 표면에 작용하는 접선하중에 의한 반 무한체 내의 응력해석," 대한기계학회 논문집 제출. 1999.

부 록

x 방향으로 $2a$ y 방향으로 $2b$ 의 크기를 가진 사각조각 표면에 작용하는 균일한 수직하중의 세기 p 와 접선하중의 세기 q_x 에 의한 반 무한체 표면의 변위는 다음과 같다.

$$u_{z1}^p + u_{z2}^p = p C_1 \{ y_2 \ln(x_2 + \rho_4) + x_2 \ln(y_2 + \rho_4) + y_1 \ln(x_1 + \rho_1) + x_1 \ln(y_1 + \rho_1) - y_2 \ln(x_1 + \rho_2) - x_1 \ln(y_2 + \rho_2) - y_1 \ln(x_2 + \rho_3) - x_2 \ln(y_1 + \rho_3) \}$$

$$u_{z1}^{q_x} + u_{z2}^{q_x} = -q_x C_2 \left\{ y_2 \ln \rho_4 + x_2 \tan^{-1} \frac{y_2}{x_2} + y_1 \ln \rho_1 + x_1 \tan^{-1} \frac{y_1}{x_1} - y_2 \ln \rho_2 - x_1 \tan^{-1} \frac{y_2}{x_1} - y_1 \ln \rho_3 - x_2 \tan^{-1} \frac{y_1}{x_2} \right\}$$

여기서,

$$x_1 = -a - x, \quad x_2 = a - x$$

$$y_1 = -b - y, \quad y_2 = b - y$$

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$$

$$\rho_3 = \sqrt{x_2^2 + y_1^2}, \quad \rho_4 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$C_1 = \frac{(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{\pi E_2}$$

$$C_2 = \frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1} - \frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{2\pi E_2}$$