

## 타원접촉의 탄성유체윤활해석 : 제2보

박태조(경상대학교, 항공기부품 RRC), 현준수(FAG 한화베어링)

### An Analysis of Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts : Part II

Tae-Jo Park(Gyeongsang Natl. Univ.) · Jun-Soo Hyun(FAG Hanwha Bearings)

**Abstract** - A theoretical study of elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts with both rolling and spin has been carried out. A finite difference method and the Newton-Raphson method are applied to solve the problem. The velocity vectors resulting from combined spin and rolling/sliding motion lead to asymmetric pressure distributions and film shapes. Film contours and variations of the minimum and central film thicknesses are compared with various spin-roll ratios. At high spin-roll ratios the minimum film thickness is considerably reduced, whereas the central film thickness decreases less dramatically. The present numerical scheme can be used in the analysis of general elliptical contact problems.

**Keywords** : EHL, Elliptical Contacts, Rolling, Spin, Angular Contact Ball Bearing Numerical Analysis, Newton-Raphson Method

#### 1. 서론

머시닝센터(machining center)와 같은 공작기계, 섬유기계 및 원심분리기 등의 고속주축용 베어링으로 주로 사용되는 앵귤러 콘택트 볼베어링(angular contact ball bearing)에서는 내·외륜의 한쪽 턱을 상대적으로 낮게 가공하여 볼의 수를 증가시키고 오일에어(oil air) 윤활을 채용함으로써 고강성과 고속화를 달성하고 있다[1]. 이때, 축방향하중을 지지하기 위하여 볼과 내·외륜의 접촉부는 접촉각(contact angle)이라는 경사진 각을 갖는 특징적인 구조를 채용하고 있으며, 고속이 요구될수록 접촉

각의 크기는 작아진다. 그러나, 작은 접촉각은 반경방향하중을 증가시키므로 접촉타원의 장축방향길이와 상대곡률을 크게 하여 결과적으로는 구름면에서의 원주속도차이로 인한 미끄럼(sliding)을 발생시킨다. 더구나, 볼의 자전축과 공전축이 서로 평행하지 않기 때문에 발생하는 자이로스코픽 모멘트(Gyroscopic moment)의 작용으로 인하여 Fig.1에 나타낸 것과 같이 볼은 스핀(spin)운동을 하게된다.

한편, Dowson과 Higginson[2]이 역방법(inverse method)라는 획기적인 해석방법을 사용하여 무한장 선접촉의 EHL문제에 대한 이론해석에 성공한 1959년 이후의 지난

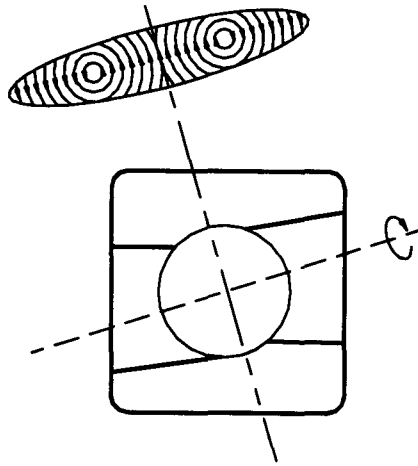


Fig. 1. Sliding lines for ball-raceway contact of an angular contact ball bearing.

40년 동안, 이 분야에 대한 집중적인 연구가 수행되었다. 특히, Hamrock과 Dowson [3]은 볼베어링, 구형(spherical) 로울러베어링 및 대부분의 기어와 캠기구 등에서 발생하는 타원접촉 EHL문제를 완전하게 수치해석하고, 실제운전상태에서의 유막두께를 쉽게 추정할 수 있는 이론식을 제시함으로써 이 분야의 실질적인 발전에 크게 기여하였다. 그 이후, Chittenden 등[4]은 참고문헌[3]의 수치해석방법과 결과를 사용하여 접촉타원에 임의방향으로 윤활유가 유입되는 경우에도 적용할 수 있도록 유막두께식을 보다 일반화하였다. 그러나, 앞에서 언급한 앵귤러 컨택트 볼베어링에서와 같이 볼이 스핀운동하는 경우에 대한 지금까지의 연구는 극소수에 불과하고[5-6], 이러한 경우에 적용할 수 있는 유막두께식은 아직 제시되지 않고 있기 때문에 추가적인 연구가 요구되고 있다.

이에, 본 논문에서는 타원접촉 EHL문제에 대한 정확한 유막두께식을 제시하기 위한 연구의 일부분으로서 볼이 구름운동과 동시에 스핀운동하는 경우의 EHL문제를 수치해석하고자 한다. 이를 위하여 참고문

헌[7-9]에서와 동일하게 수치해석과정이 체계적이고 물리적으로 타당한 결과를 제시한다고 알려진 유한차분법과 뉴우튼-람슨 방법을 적용하고자 한다.

## 2. 지배방정식

타원체가 Fig.2에 나타낸 것과 같이 구름운동과 스핀운동을 동시에 하는 경우, 유막에서의 발생압력을 지배하는 레이놀즈 방정식은 아래의 식(1)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{ (u - \omega y) \bar{\rho} h \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ \omega x \bar{\rho} h \} \right] \quad (1)$$

여기서,  $u$ 는 타원체의 구름방향 평균속도이고,  $\omega$ 는 평균회전각속도로서 반시계방향인 경우를 (+)로 하였다.

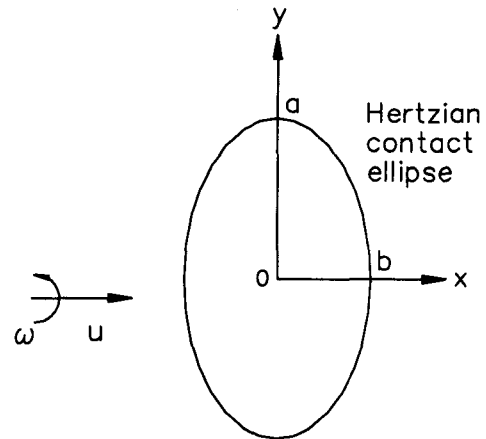


Fig. 2. Contact ellipse and coordinate system.

EHL 상태에서의 윤활유의 점도와 밀도는 각각 다음의 식(2)~식(3)과 같이 나타낼 수 있다[2].

$$\eta = \eta_0 \exp \left\{ \left[ \ln(\eta_0) + 9.67 \right] \cdot \left\{ -1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^2 \right\} \right\} \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 \left[ 1 + \frac{0.58 \times 10^{-9} p}{1 + 1.68 \times 10^{-9} p} \right] \quad (3)$$

여기서,  $p$ ,  $\eta_0$ 의 단위는 각각 [Pa], [Pa·s]이다.

EHL상태에서의 유막의 크기는 다음식과 같이 정의할 수 있다[7-9].

$$h = h_0 + h_g + h_d \quad (4)$$

여기서,  $h_0$ 는 상수이고,  $h_g$ 는 타원체의 형상에 의한 유막으로서 다음식과 같이 나타내어진다.

$$h_g = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \quad (5)$$

발생압력에 의한 탄성변형량인  $h_d$ 는 참고문헌[7-9]와 동일한 방법으로 구할 수 있다.

유막내에서 발생하는 유체압력의 합은 타원체에 작용하는 하중과 일치하며 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (6)$$

### 3. 무차원화

수치해석과 결과의 효율적인 정리를 위하여 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$X = x/b, \quad Y = y/a, \quad H = h/R_x,$$

$$P = p/E, \quad \rho = \bar{\rho}/\rho_0, \quad \eta = \bar{\eta}/\eta_0,$$

$$k = a/b, \quad U = \eta_0 u/ER_x, \quad \Omega = \eta_0 \omega/E,$$

$$W = w/ER_x^2, \quad G = aE, \quad B = 2\Omega/U \quad (7)$$

여기서, 유효탄성계수  $E$ 의 단위는 [GPa]이고, 접촉타원의 타원비  $k$ 와 타원체의 곡률반경  $R_x, R_y$ 과의 관계는 다음식을 사용하였다[5].

$$k = \left( \frac{R_y}{R_x} \right)^{2/3} \quad (8)$$

따라서, 식(1)-식(4), 식(6)을 무차원화하여 순서대로 나타내면 다음식들과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \\ &= 12U \frac{b}{R_x} \left[ \left( 1 - \frac{kbBY}{2R_x} \right) \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} \right. \\ & \quad \left. + \frac{bBX}{2kR_x} \frac{\partial(\rho H)}{\partial Y} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta = \exp \left\{ \left[ \ln(\eta_0) + 9.67 \right] \cdot \left\{ -1 + (1 + 5.1EP)^2 \right\} \right\} \quad (10)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (11)$$

$$H = H_0 + \frac{b^2}{2R_x^2} \left\{ X^2 + \frac{R_x}{R_y} k^2 Y^2 \right\} + H_d \quad (12)$$

$$W = \frac{kb^2}{R_x^2} \iint P \, dX \, dY \quad (13)$$

한편, 윤활영역에서 공동현상(cavitation)이 발생할 경우에는 다음의 레이놀즈 경계조건식을 적용한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

#### 4. 수치해석

구름운동과 스피운운동을 동시에 하는 경우의 타원접촉 EHL문제를 참고문헌[7-9]에서와 같이 유한차분법과 뉴우튼-랍슨 방법을 적용하여 수치해석하고자 한다. 불균일한 격자계를 사용할 경우에 대한 식(9)의 유한차분형태는 참고문헌[8]과 거의 유사하게 다음식과 같이 나타내어진다.

$$W = \sum_{i=2}^{M_i} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} \Delta A_{i,j} \quad (17)$$

$$\text{여기서, } \Delta A_{i,j} = \frac{kb^2}{4R_x^2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) \cdot (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (18)$$

이다.

$$\begin{aligned} f_{i,j} = & \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) \\ & + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{k^2 (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right\} \\ & - 12U \frac{b}{R_x} \left[ \left( 1 - \frac{kbBY_j}{2R_x} \right) (\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \frac{bBX_i}{2kR_x} (\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2} - \rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

( $i=2, \dots, M_j, \quad j=2, \dots, N-1$ )

여기서,  $M_j$ 와  $N$ 은 각각 식(14)의 레이놀즈 경계조건을 만족시키는 X방향 격자의 수와 Y방향격자의 수이다[7-9].

식(15)에서 미지수인  $P_{i,j}$ 와  $H_o$ 를 효과적으로 구하기 위하여 뉴우튼-랍슨 방법을 적용하면 다음식과 같다.

식(16)-(17)에서 미지수와 식의 수가 서로 동일하므로 해석이 가능하다. 수치해석 과정은 참고문헌[7]에서와 동일하며, 계산영역은 입구부와 출구부는  $X=-5.0, X=1.30$ 에, 측면부는  $Y=\pm 1.50$ 에 각각 두었으며, X, Y 방향으로의 격자의 수는 59개와 25개이다.

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_l \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_o} \right)^n \\ \cdot (H_o^{n+1} - H_o^n) + f_{i,j}^n = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

( $i=2, \dots, M_j, \quad j=2, \dots, N-1$ )

한편, 식(13)은 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

#### 5. 결과 및 고찰

Fig.3~Fig.5의 유막의 등고선에 대한 그림에서 +표시는 Hertz 접촉타원의 중심인  $X=0, Y=0$ 의 위치를, \*표시는 최소유막  $H_m$ 이 발생하는 위치를 각각 나타낸다. 각 등고선에 대한 1~10의 번호는 최소유막두께에 대한 유막두께 비  $H/H_m$ 이 1.03, 1.10, 1.20, 1.30, 1.47, 1.70, 1.95, 2.30, 2.90 및 3.50인 경우를 순서대로 나타내고 있다.

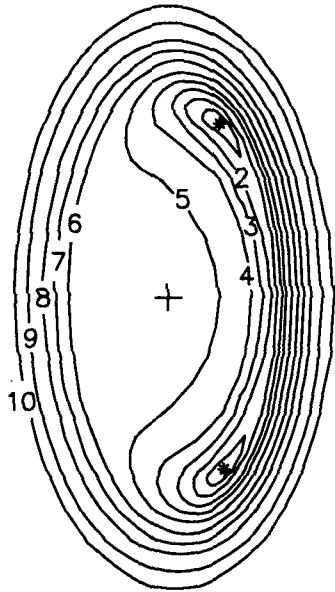


Fig. 3. Film thickness contours :  
 $k=2.0$ ,  $G=4522$ ,  $U=9.353 \times 10^{-14}$ ,  
 $W=1.821 \times 10^{-8}$ ,  $B=0.0$ .

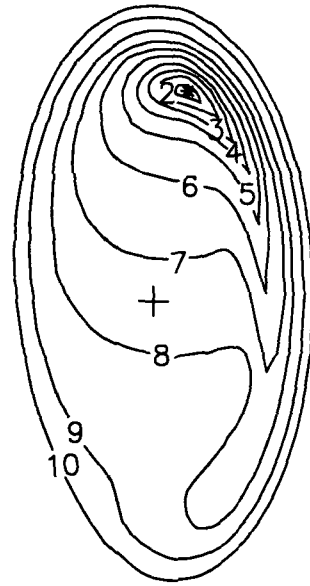


Fig. 5. Film thickness contours :  
 $k=2.0$ ,  $G=4522$ ,  $U=9.353 \times 10^{-14}$ ,  
 $W=1.821 \times 10^{-8}$ ,  $B=328.4$ .

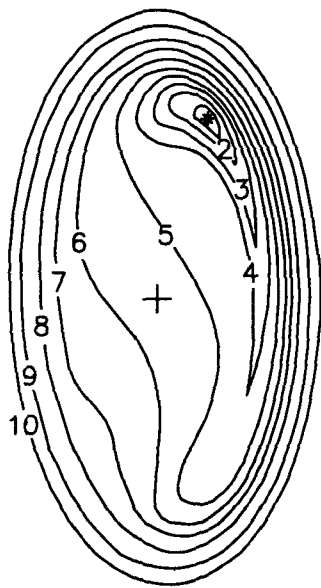


Fig. 4. Film thickness contours :  
 $k=2.0$ ,  $G=4522$ ,  $U=9.353 \times 10^{-14}$ ,  
 $W=1.821 \times 10^{-8}$ ,  $B=164.2$ .

Fig.3은 스핀운동을 하지 않고 구름운동만 하는 경우( $B=0$ )의 유막형상을 나타낸 그림으로서 타원접촉 EHL의 대표적 특징인 Side lobe가 구름방향에 수직인 장축방향에 대하여 대칭적으로 형성되어 과도한 측면누설을 억제하고 있다. 이 경우의 무차원 최소유막두께  $H_m$ 의 크기는  $9.094 \times 10^{-7}$ 이다. 그러나, 볼이 스핀운동을 하는 경우에는 레이놀즈 방정식의 해인 간극내에서의 압력분포가 변화할 것이므로 유막의 형상과 크기도 달라질 것으로 쉽게 예상할 수 있다. Fig.4~ Fig.5에는 볼의 스핀/구름 속도비인  $B$ 가 164.2와 328.4인 경우의 유막형상을 각각 나타낸 그림으로서 각 경우에 대한  $H_m$ 의 크기는  $7.605 \times 10^{-7}$ 와  $5.681 \times 10^{-7}$ 이다. 여기서, 볼은 접촉중양부에 대하여 반시계방향으로 회전하고 있다. 이 결과, 볼의 스핀운동으로 인하여 Fig.3에서와 달리 유막형상이 장축방향에 대하여 비대칭적인 분포일 뿐 아니라 최소유막

의 크기도 크게 감소하고 있다. 즉, 볼의 구름속도와 운전조건이 동일한 경우일지라도 스피ن속도에 따라서 EHL유막의 크기와 형상은 아주 크게 변화하고 있다.

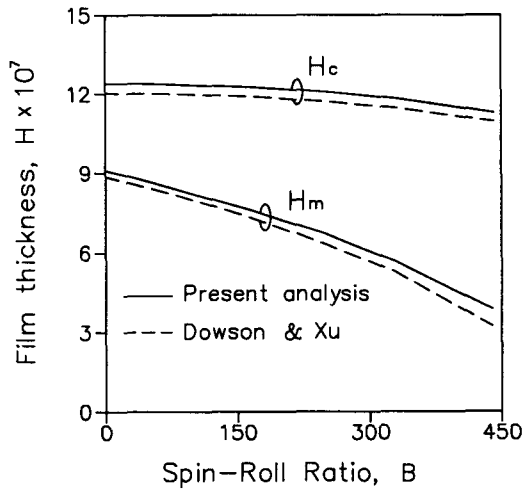


Fig. 6. Variation of central and minimum film thicknesses with spin-roll ratio:  $k=2.0$ ,  $G=4522$ ,  $U=9.353 \times 10^{14}$ ,  $W=1.821 \times 10^8$ .

Fig.6에는 스피ن/구름 속도비에 대한 접촉중앙부 유막두께  $H_c$ 와 최소유막두께  $H_m$ 의 변화를 스피ن운동을 고려한 지금까지의 연구결과중에서 가장 성공적인 연구로 알려져 있는 Dowson과 Xu[6]의 결과와 비교하여 나타내었다. 일정한 구름속도에 대하여 스피ن속도가 증가할수록  $H_c$  보다  $H_m$ 이 아주 급격하게 감소하는 점이 특히 주목할 만 결과이다. 한편, 전체적인 경향은 서로 거의 유사하지만 참고문헌[6]에서의 유막두께가 상대적으로 작게 나타나고 있다. 이러한 결과는 참고문헌[7,8]에서 밝힌 바와 같이 이들이 사용한 수치해석방법과 수치해석시의 계산영역이 상대적으로 좁게 선택됨에 따라서 윤활유 충분조건(flooded condition)을 수치적으로 충족시키지 못했기 때문인 것으로 추정된다.

이상의 결과에서, 구름속도가 동일한 경

우일지라도 볼의 스피ن속도에 따라서 최소유막의 크기는 아주 크게 감소하기 때문에 기존의 이론유막식을 실제에 사용할 경우에는 세심한 주의가 요구됨을 알 수 있다. 따라서, 본 논문에서 사용한 수치해석방법은 고속 앵글러 컨택트 볼베어링에서와 같이 볼이 스피ن운동을 하는 경우의 타원접촉 EHL문제에 대한 이론적인 윤활특성과 수명의 정확한 평가에 아주 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대되며 추가연구를 요한다.

## 6. 결론

본 논문에서는 고속 앵글러 컨택트 볼베어링에서와 같이 볼이 구름운동과 스피ن운동을 동시에 하는 경우에 대한 타원접촉문제를 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하였다. 볼이 스피ن운동을 하는 경우의 최소유막두께는 구름운동만 하는 경우에 비하여 크게 감소하기 때문에 기존의 EHL 유막두께식을 앵글러 컨택트 볼베어링에 적용할 경우에는 세심한 주의가 필요하다. 따라서, 본 논문에서 제시한 수치해석방법을 사용하면 일반적인 조건의 타원접촉 EHL문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 제시할 수 있을 것으로 기대되며, 이에 대한 추가연구가 요구된다.

## 참고 문헌

1. Aramaki, H. *et al*, The Performance of Ball Bearings with Silicon Nitride Ceramic Balls in High Speed Spindle for Machine Tools, *J. of Tribology*, Vol.110, pp.693~698, 1988.
2. Dowson, D. and Higginson, G.R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, SI ed., Pergamon Press, 1977.
3. Hamrock, B.J. and Dowson, D., Iso-

- thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 1 : Theoretical Formulation, *J. of Lub. Tech.*, Vol.98, pp.223~229, 1976. Part 2 : Ellipticity Parameter Results, Vol.98, pp.375~383., Part 3 : Fully Flooded Results, Vol.99, pp.264~276, 1977.
4. Chittenden, R.J., Dowson, D. and Taylor, C.M., Elastohydrodynamic Film Thickness in Concentrated Contacts, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.200, pp.207~226, 1986.
  5. Mostofi, A. and Gohar, R., Oil Film Thickness and Pressure Distribution in Elastohydrodynamic Point Contacts, *J. of Mech. Sci.*, Vol.24, pp.173~182, 1982.
  6. Dowson, D. and Xu, H., Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts with Spin and Rolling, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.205, pp.165~174, 1981.
  7. Park, T.J. and Kim, K.K., A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts, *Wear*, Vol.136, pp.299~312, 1990.
  8. 박태조, 현준수, 타원접촉의 탄성유체윤활 : 제1보-윤활유의 유입방향이 Hertz 접촉타원의 장축방향인 경우, 한국윤활학회지, Vol.14, No.4, pp.58~63, 1998.
  9. Park, T.J. and Kim, K.K., Elastohydrodynamic Lubrication of a Finite Line Contact, *Wear*, Vol.223, No.1-2, pp.102~109, 1998.

## 기 호 설 명

$a$	Hertz 접촉타원의 장반경
$b$	Hertz 접촉타원의 단반경
$B$	타원체의 스핀/구름 비, $2\Omega/U$
$E$	$2/E = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$
$G$	무차원재료변수, $aE$
$h$	유막두께
$H$	무차원유막두께, $h/R_x$
$H_c$	접촉중심부에서의 무차원유막두께
$H_m$	무차원최소유막두께
$k$	Hertz 접촉타원의 타원비, $a/b$
$n$	반복계산횟수
$p$	압력
$P$	무차원압력, $p/E$
$R_x$	타원체의 x방향으로의 곡률반경
$R_y$	타원체의 y방향으로의 곡률반경
$u$	타원체의 구름방향 평균속도
$U$	무차원속도변수, $\eta_0 u / ER_x$
$x, y$	좌표계
$X, Y$	무차원좌표계, $x/b, y/a$
$w$	하중
$W$	무차원하중변수, $w/ER_x^2$
$Z$	윤활유의 Roelands 계수
$a$	윤활유의 압력-점도지수
$\eta_0$	대기압상태에서의 윤활유점도
$\rho_0$	대기압상태에서의 윤활유밀도
$\omega$	타원체의 평균회전각속도
$\Omega$	타원체의 무차원각속도, $\eta_0 \omega / E$