

반 무한체 위의 사각조각 면에 작용하는 접선하중에 의한 반 무한체내의 응력 해석

이문주 · 조용주*

부산대학교 대학원 정밀기계공학과

*부산대학교 공과대학 기계공학부

The stress field in the body by tangential loading of a rectangular patch on a semi-infinite solid

Mun-Ju Lee and Yong-Joo Cho*

Graduate School, Pusan National University

*School of Mechanical Engineering, Pusan National University

Abstract- The stress field in the body by tangential loading of a rectangular patch on a semi-infinite solid has been solved analytically using *Boussinesque's* potential function. Its validity was proved by *saint-venant's* principle in remote region of the and in the vicinity of the surface with superposition of point loads.

key words - subsurface stress field, tangential loading, semi-infinite solid

1. 서 론

상대운동을 하는 기계요소는 접촉면의 마찰에 의한 마멸이 생기는데 이러한 마멸현상은 기계요소가 설계 시의 요구조건을 만족시키지 못하고, 설계수명을 다하기 전에 기계요소를 파손(Failure)시키는 결과를 가져온다. 이러한 마멸현상을 이해하기 위하여 상대운동을 하는 물체의 접촉부의 응력 해석은 필수적이다.

Hertz[1]는 1882년에 최초로 두 탄성체의 평활한 접촉문제를 해석하였다. 그는 두 탄

성체의 접촉영역이 타원형(Ellipse)이고 접촉면적은 탄성체에 비해 매우 작다고 가정하였다. 그는 탄성체 표면 위의 임의의 영역에 마찰이 없고 수직하중(Normal pressure)만이 작용하는 경우에 대해 포텐셜 함수를 이용하여 반 무한체 내의 응력을 해석하였다. Cattaneo[2]와 Mindlin[3]은 접촉영역이 타원이고 하중의 방향이 타원의 장축과 단축 방향인 접선하중(Tangential loading)에 의해 미끄럼(Micro slip)이 생기는 경우의 접촉문제를 해석하였다. 그들의 해는 미끄럼이 없을 경우 접촉영역의 경계에서 접선하중에 의

한 응력이 무한대(Infinite)로 발산하는 문제점이 있다.

Boussinesq[4]와 Cerruti[5]는 포텐셜함수를 이용하여 각각 수직하중과 접선하중이 작용하는 점 접촉(Point contact)의 경우에 대하여 반 무한체내의 응력을 해석하였다.

반 무한체내의 표면 위의 임의의 영역에 분포하중이 작용하여 반 무한체내의 임의의 점에 생기는 응력을 구하고자 할 때, 하중이 작용하는 영역을 균일한 하중이 작용하는 미소 사각조각 면들로 이산화(Discretized)하여 반 무한체내의 임의의 점에 대한 미소 분포하중들의 영향을 중첩하여 응력장을 해석할 수 있다.

1929년에 Love[6]는 표면 위의 사각조각 면(Rectangular patch)에 균일한 수직하중이 작용하는 경우에 대하여 반 무한체내의 응력장을 해석적으로 구하였다. Ahmadi와 Keer[7]는 균일한 접선하중이 사각조각 면에 작용할 때 Cerruti의 해를 사각조각 면에 대해 적분하여 그 결과를 52개의 식들로 표현하였다. 1986년에 Kalker[8]는 같은 문제에 대해 점근적인 확장(Asymptotic expansion)의 기법에 의해 수치적으로 반 무한체내의 응력을 해석하였다. 그러나, Ahmadi와 Keer의 해는 하중 위치에서 가까운 영역에서는 응력장이 왜곡되는 문제점이 있다. 이러한, 문제점을 해결하기 위해 Bhushan[9]은 Ahmadi와 Keer의 결과를 수정한 응력 식들을 제시하였다. 그러나, Bhushan의 해는 Ahmadi와 Keer의 결과를 바탕으로 수정한 해이기 때문에 근본적으로 정확해(Exact solution)가 아니다.

본 연구에서는 Ahmadi와 Keer가 해를 유도한 과정과는 다른 방법으로, 반 무한체 위의 사각조각 면에 균일한 접선하중이 작용할 때 반 무한체내에서 생기는 응력장을 구하고자 한다.

2. 이론

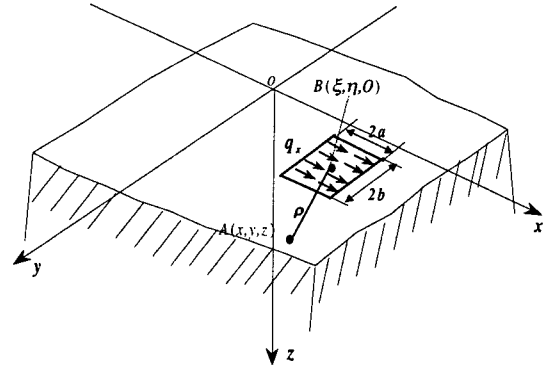


Fig. 1 The elastic half space subject to a uniform tangential loading of a rectangular patch

Fig. 1과 같은 반 무한체위에 x, y 방향으로 길이가 $2a \times 2b$ 인 사각조각 면에 x 방향에 평행하고 하중의 세기가 q_x 로 균일한 접선하중이 작용한다. 이 때, 반 무한체내에서의 응력장을 해석하기 위해서 다음과 같은 "Boussinesq's 3-D logarithmic potential"을 도입한다.

$$F_1 = q_x \int_s \int_s \{z \ln(\rho + z) - \rho\} d\xi d\eta \quad (1)$$

여기서, ρ 는 반 무한체내의 임의의 점 $A(x, y, z)$ 와 사각조각 면의 중심 $B(\xi, \eta, 0)$ 와의 거리이다. 식 (1)은 $z > 0$ 영역의 모든 점에서 연속함수이고, 미분 가능하다. 식 (1)을 z 에 관해 미분하면

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial z} = q_x \int_s \int_s \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (2)$$

가 되는데 식 (2)를 "Newtonian Potential"이라 한다.

Love는 식 (1), (2)의 포텐셜 함수를 이용하여 점 $A(x, y, z)$ 에서의 변위 u_x, u_y, u_z 를 다음과 같이 표현하였다.

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right\} \\ u_y &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2\nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right\} \\ u_z &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial x} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

포텐셜 함수 F_1 과 F 는 모든 계(order)에서 미분 가능하고 연속이므로 식(3)의 변위는 기하학적 적합조건을 만족한다.

응력, 변형률 관계로부터 점 $A(x, y, z)$ 의 응력 성분들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu+1}{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\nu}{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ \sigma_z &= \frac{-z}{2\pi} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} + 2\nu \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right\} \\ \tau_{yz} &= \frac{-z}{2\pi} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \\ \tau_{zx} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, ν 는 포와송 비(Poisson's ratio)이다.

식 (4)의 응력들은 다음의 평형방정식을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

한편, 식(1)과 (2)의 포텐셜함수 F_1 과 F 이 조화함수(Harmonic function)로 다음의 라플라스 방정식(Laplace equation)을 만족하므로 식(4)의 응력은 자동적으로 식(4)의 평형방정식을 만족하게 된다.

$$\begin{cases} \nabla^2 \cdot F_1 = 0 \\ \nabla^2 \cdot F = 0 \end{cases} \quad (6)$$

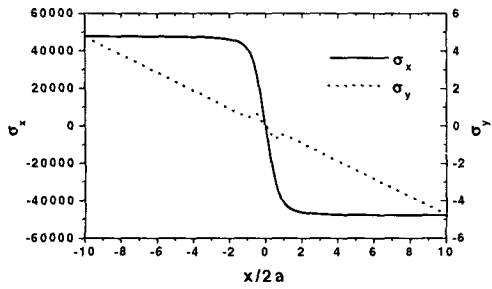
$$\text{단, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

한편, 반 무한체 표면 위의 사각조각 면에서만 접선하중이 작용하고 그 외의 표면에서는 응력은 0이어야 하고 변위의 모든 성분들은 사각조각 면으로부터 무한대의 거리 ($\rho \rightarrow \infty$)에서는 0이 되어야 한다. 식(1)과 식 (2)의 포텐셜 함수의 성질에서 이를 만족함을 알 수 있다.

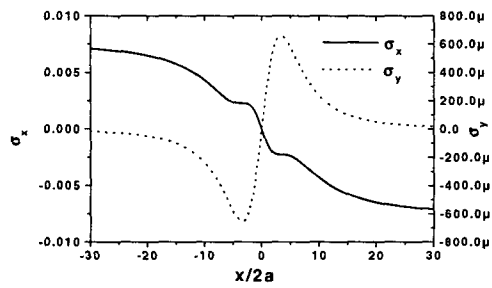
3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 앞서 기술된 포텐셜 이론에 따라 반 무한체의 표면 위에 중심 B 가 원점이고 경계가 $x = \pm a, y = \pm b, z = 0$ 인 사각조각 면에 x 방향에 평행하고 균일한 접선하중의 세기가 q_x 로 작용할 때 반 무한체내의 임의의 점 A 에서 생기는 응력을 구하였다. 본 연구에서 유도한 결과들은 부록에 제시하였고, 유도된 결과 식들을 Ahmadi와 Keer, Bhushan에 의한 기존의 결과들과 비교, 검토하였다.

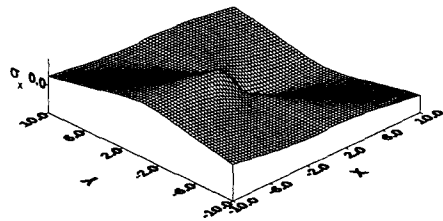
Cerruti는 접선방향 집중하중(Concentrated tangential load)에 의한 반 무한체내의 응력성분들을 구하였고, Ahmadi와 Keer는 Cerruti의 해를 사각조각 면에 대해 적분하



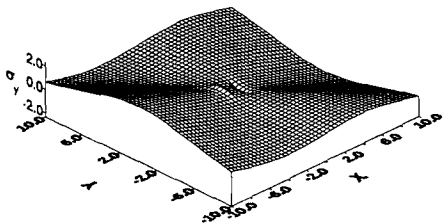
2(a) σ_x, σ_y at $y=0, z/2a=0.002$



2(b) σ_x, σ_y at $y=0, z/2a=5 (\mu = 10^{-6})$



2(c) 3-D view of σ_x at $z/2a=0.002$



2(d) 3-D view of σ_y at $z/2a=0.002$

Fig. 2 Stress distribution in Ahmadi and Keer's Result ($\nu=0.3, q_x=1.0, a$ =half length of rectangular patch)

여 반 무한체내의 응력을 구하였다.

$$\tau_{kl}(x_i, y_i, z) = \int_{\bar{y}-b}^{\bar{y}+b} \int_{\bar{x}-a}^{\bar{x}+a} t_{kl}(x, y, z) dx dy \quad (7)$$

여기서, $\bar{x}=x_i-x_j, \bar{y}=y_i-y_j$ 이고, 첨자 i, j 는 각각 사각조각 면의 중심과 반 무한체내의 임의의 점을 가리킨다. $t_{kl}(x, y, z)$ 는 $(0, 0, 0)$ 에 작용하는 접선방향의 점 하중에 의한 반 무한체 내의 응력이다. Fig. 2는 식 (7)로부터 유도된 Ahmadi와 Keer해의 σ_x, σ_y 를 나타낸 것으로 하중위치로부터 $|x/2a|$ 가 커짐에 따라 응력 값이 작아져 $|x/2a| \rightarrow \infty$ 에서는 0에 수렴해야 한다. 그러나, σ_x 의 경우 하중위치로부터의 거리에 관계없이 응력 값이 발산하고, σ_y 는 하중위치에 가까운 영역에서 응력 값이 발산하는 문제점이 있다.

Bhushan은 Ahmadi와 Keer해의 이런 문제점을 해결하기 위해서 σ_x, σ_y 에서 특이점 (Singularity point)이 생기는 항을 변형하여 Ahmadi와 Keer해를 수정한 응력 식들을 제시하였다. Fig. 3은 반 무한체 표면 위의 사각조각 면에 작용하는 접선하중과 사각조각

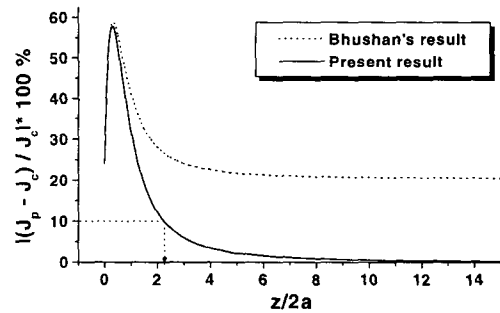
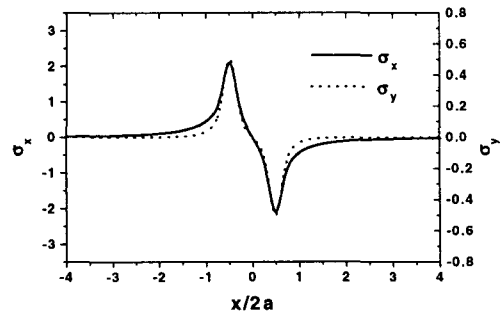


Fig. 3 Difference of Mises stress between patch solution (J_p) and Cerrtti's solution (J_c) along vertical line $x/2a=0.25, y/2a=0.25$ (a =half length of rectangular patch)

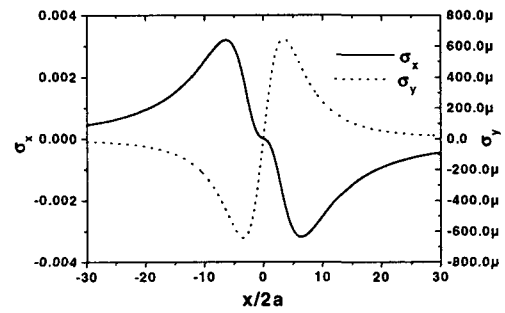
면의 중심에 작용하는 합력의 크기가 같은 집중하중에 의해 반 무한체내에서 생기는 응력들을 각각 Mises응력(J)으로 등가시켜 두 응력의 차이를 $x/2a$, $y/2a$ 가 0.25인 점에서 $z/2a$ 를 변화시키면서 나타낸 것이다. Fig. 3에서 점선은 Bhushan해와의 차이를 나타내고, 실 선은 본 연구결과와의 차이를 나타낸다. Saint-venant의 원리에 의하면 반 무한체의 표면에 작용하는 하중의 분포가 변할 때 합력의 변화가 없다면, 하중 분포의 변화는 하중 위치에 가까운 영역의 국부적 응력만을 변화시키고 거리가 먼 영역의 응력변화에는 영향을 미치지 않아야 한다. 이러한, Saint-Venant의 원리에 근거하여 Cerruti해와 사각조각 면의 접선하중에 의한 해와의 차이는 하중위치로부터 ∞ 의 거리에서는 0에 수렴해야 한다. Bhushan해의 경우, Cerruti의 해와의 차이가 $z/2a$ 가 커짐에 따라 0에 수렴하지 않고 약 20%의 오차를 보이는데, 이는 Ahmadi와 Keer해를 바탕으로 σ_x, σ_y 를 수정한 해이기 때문에 생기는 현상이다. 그러나, 본 연구 결과는 약 $z/2a = 2.25$ 에서 Cerruti해와의 차이가 10%의 오차 이내로 작아지고 $z/2a \rightarrow \infty$ 에서는 0에 수렴하여 Saint-venant의 원리에 잘 부합됨을 알 수 있다.

Fig. 4는 본 연구결과와 σ_x, σ_y 를 나타낸 것이다. Fig. 4(a),(b)에서는 $|x/2a|$ 가 커짐에 따라 σ_x, σ_y 의 값이 $z/2a$ 의 크기에 관계없이 0에 수렴함을 알 수 있다. 4(c),(d)는 $z/2a = 0.002$ 인 xy 평면에서의 σ_x, σ_y 를 3차원적으로 나타낸 것으로 $|x|, |y|$ 가 커짐에 따라 σ_x, σ_y 의 값이 0에 수렴함을 알 수 있다.

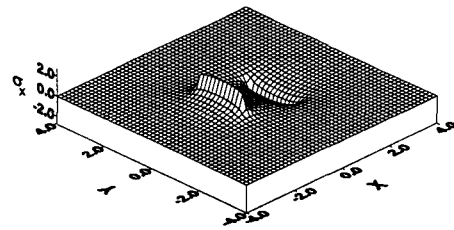
한편, 하중위치에 가까운 영역에서 본 연



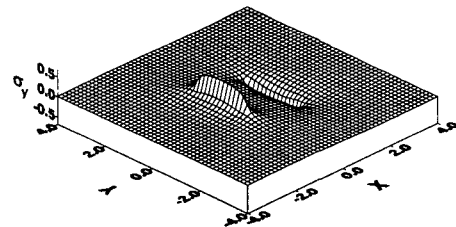
4(a) σ_x, σ_y at $y=0, z/2a=0.002$



4(b) σ_x, σ_y at $y=0, z/2a=5 (\mu = 10^{-6})$



4(c) 3-D view of σ_x at $z/2a=0.002$



4(d) 3-D view of σ_y at $z/2a=0.002$

Fig. 4 Stress distribution in present result ($\nu=0.3, q_x=1.0, a$ =half length of rectangular patch)

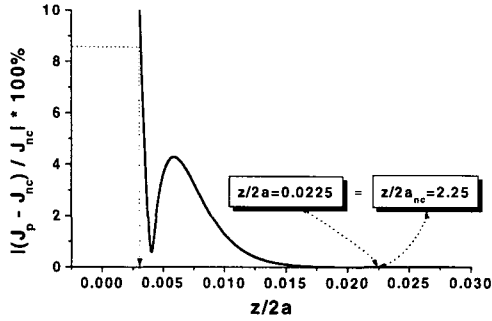


Fig. 5 Difference of Mises stress between present solution(J_p) and superposed Cerruti's solution(J_{nc}) along vertical line $x/2a=0.25$, $y/2a=0.25$ ($\nu=0.3$, $q_x=1.0$, a =half length of rectangular patch, a_{nc} =half length of a finite union of a rectangular patch)

구결과의 정확성을 입증하기 위해서 Cerruti해의 중첩에 의한 결과와의 차이를 비교, 검토하였다. K. L. Johnson[10]은 표면 위의 분포하중에 의한 반 무한체내의 임의의 점에서의 응력을 Cerruti해의 중첩을 통해서 근사적으로 구할 수 있다고 하였는데 Cerruti해를 중첩시키는 방법은 다음과 같다. 균일한 점선하중이 작용하는 반 무한체 위의 사각조각 면을 $N \times N$ 의 미소 사각요소로 나누어, 각 미소 요소의 균일한 점선하중을 그 요소의 중심에 작용하는 미소 집중하중으로 등가 시킨다. 각 미소 사각요소들이 반 무한체내의 임의의 점에 미치는 영향을 중첩함으로써 반 무한체내의 임의의 점에서의 응력을 근사적으로 구할 수 있다. 이 때, 요소의 면적은 $4ab$ 를 사각요소의 수($N \times N$)로 나눈 면적이고, 미소 집중하중의 크기는 미소 요소의 하중의 세기와 면적의 곱이다.

Fig. 5는 표면 위의 사각조각 면을 100×100 으로 나누어 각 미소 사각요소의 점선하

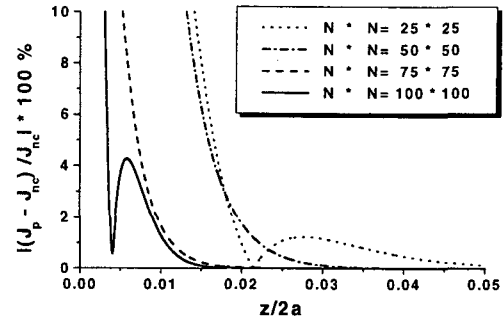
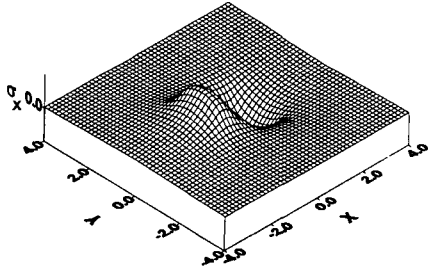


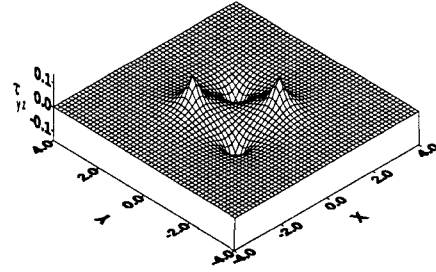
Fig. 6 Difference between J_p and J_{nc} for various number of infinitesimal rectangular patches at $x/2a=0.25$, $y/2a=0.25$

중을 집중하중으로 등가 시켜서 구한 중첩해와 단일 사각조각 면에서의 균일한 점선하중에 의한 해를 비교한 것이다. 반 무한체 표면 위의 단일 사각조각 면에서 x 방향의 한 변의 길이 $2a$ 는 2.0이다. 사각조각 면을 100×100 의 미소 요소로 이산화 하였으므로 미소 사각조각 면의 x 방향의 한 변의 길이 $2a_{nc}$ 는 0.02이다. 본 연구결과와 단일 Cerruti해(Single Cerruti's solution)와의 비교 결과에 의하면 $z/2a > 2.25$ 인 영역에서 단일 Cerruti해와의 차이는 10%의 오차 이내로 작아졌다. 그런데, 본 연구결과와 Cerruti해를 중첩시킨 결과와의 차이는 미소 사각조각 면의 관점에서 $z/2a_{nc} > 2.25$ 인 영역에 해당하는 $z/2a > 0.0225$ 에서 차이가 거의 0에 수렴하였다. 이는 본 연구의 결과가 $z/2a > 0.0225$ 에서 적어도 90%의 신뢰도를 나타낸다는 것을 보여준다. 그리고 $z/2a > 0.003$ 에서 Cerruti해를 중첩시킨 결과와의 차이가 10% 이내로 수렴하였다.

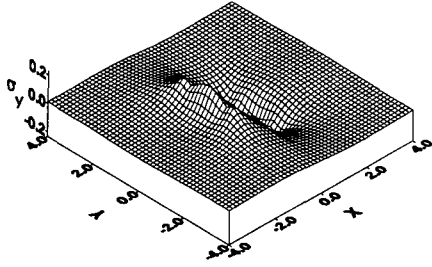
Fig. 6은 미소 사각요소의 수를 변화시키면서 본 논문결과와 Cerruti해의 중첩결과를



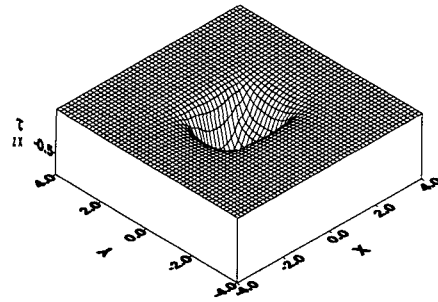
7(a) σ_x



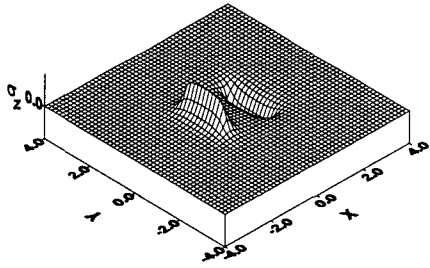
7(e) τ_{yz}



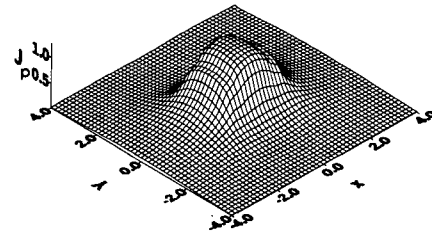
7(b) σ_y



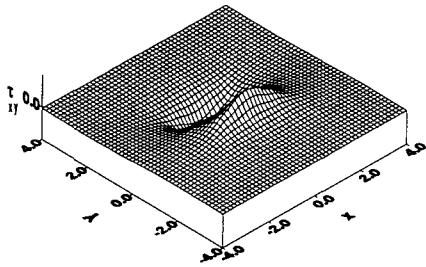
7(f) τ_{zx}



7(c) σ_z



7(g) J_p



7(d) τ_{xy}

Fig. 7 3-D view of stress distribution in present result ($z/2a=0.1$, $q_x=1$, $\nu=0.3$)

비교한 것이다. 미소 요소의 수가 많아 질수록 즉, $z/2a_{nc}$ 를 작게 할수록 두 해의 차이는 줄어들어서 하중위치에 더 가까운 지점에서 0에 수렴함을 알 수 있다.

한편, Fig. 7은 $z/2a=0.1$ 인 xy 평면에서의 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, J_p$ 의 분포를 3차원으

로 나타낸 것이다.

이상의 결과로부터, 본 연구에서 유도한 결과는 반 무한체내의 거의 모든 영역에서 잘 맞는 정확해(Exact solution)로 사료된다.

4. 결 론

포텐셜 함수를 이용하여 반 무한체 표면 위의 사각조각 면에 작용하는 균일한 접선하중에 의한 반 무한체내의 응력장을 해석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 하중 위치로부터 먼 영역에서 본 연구 결과와 Cerruti해와의 차이는 0에 수렴하여 Saint-venant의 원리에 잘 부합되었다.
- (2) Cerruti해를 중첩한 결과와 본 연구의 결과를 비교, 검토해 본 결과 하중위치에 가까운 영역에서도 두 해의 차이는 거의 0에 수렴하여, 본 논문결과의 정확성이 잘 입증되었다.
- (3) 본 연구의 결과는 Love의 결과와 중첩함으로써, 임의의 영역에 수직하중과 접선하중이 동시에 작용하는 실제적인 문제의 해석에 이용될 수 있다

기 호

- a Half length of a rectangular patch in the x direction
- a_{nc} Half length of a finite union of rectangular patch in the x direction
- b Half length of a rectangular patch in the y direction
- ν Poisson's ratio
- J_p Von Mises stress for patch solution.

- J_{nc} Von Mises stress for superposed Cerruti's solution
- J_c Von Mises stress for single Cerruti's solution
- q_x uniformly distributed tangential stress over a rectangular patch in the x direction on the surface of a semi infinite solid
- Q_x a concentrated force acting at the origin $(0,0,0)$, equivalent to $4abq_x$

참 고 문 헌

1. Hertz. H., *Miscellaneous Papers on the contact of Elastic Solids*, Translation by D.E.Johns, McMillan, London, 1896
2. Cattaneo.C., "Sul Contatto di due Corpi Elastici; Distribuzione Locale degli Storzi," *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, Series b, Vol.27, pp.342-348,434-436, and 474-478, 1938
3. Mindlin. R.D., "Compliance of Elastic Bodies in Contact", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 15, pp.259-268, 1949
4. Boussinesq, J. *Application de Potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques*. Paris: Gauthier-Villars V.45, pp.108, 1885.
5. Cerruti, V., *Acc. Lincei. Mem. fis. mat.*, Roma V.13, pp.81, 1882.
6. Love, A. E. H., Stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Phil. Trans. Royal Society*, A228, pp.377-420, 1929.

7. N.Ahmadi, L.M.Keer, T.Mura and V.Vi thoontien, The interior stress field caused by tangential loading of a rectangular patch on an elastic half space. *ASME Journal of Tribology.*, V.109, pp.627-629, 1987.
8. J. J. Kalker, Numerical calculation of the elastic field in a half-space. *Communications in applied numerical method.* V.200, pp.401-410, 1986
9. Maria M.-H.Yu, Bhart. Bhushan, Contact analysis of three dimensional rough surfaces under frictionless and frictional contact. *wear.* V.200, pp.265-280, 1996.
10. Johnson, K. L., Contact mechanics, Chap.3, pp.45-83, 1985

부 록

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = q_x \{ -\log(\rho_4 + y_2) + \log(\rho_3 + y_1) + \log(\rho_2 + y_2) - \log(\rho_1 + y_1) \}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} = q_x \left\{ z \left(\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1}{x_2^2 + y_1^2} - \frac{zy_2(\rho_4^2 + x_2^2)}{\rho_4(y_2^2 z^2 + x_2^2 \rho_4^2)} + \frac{zy_1(\rho_3^2 + x_2^2)}{\rho_3(y_1^2 z^2 + x_2^2 \rho_3^2)} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{y_2}{x_1^2 + y_2^2} + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{zy_2(\rho_2^2 + x_1^2)}{\rho_2(y_2^2 z^2 + x_1^2 \rho_2^2)} - \frac{zy_1(\rho_1^2 + x_1^2)}{\rho_1(y_1^2 z^2 + x_1^2 \rho_1^2)} \right) +$$

$$\log \frac{(\rho_4 + y_2)(\rho_1 + y_1)}{(\rho_2 + y_2)(\rho_3 + y_1)} + x_2^2 \left(\frac{1}{\rho_4(\rho_4 + y_2)} - \frac{1}{\rho_3(\rho_3 + y_1)} \right) - x_1^2 \left(\frac{1}{\rho_2(\rho_2 + y_1)} - \frac{1}{\rho_1(\rho_1 + y_1)} \right)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = q_x \left\{ \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1}{x_2^2 + y_1^2} - \frac{zy_2(\rho_4^2 + x_2^2)}{\rho_4(y_2^2 z^2 + x_2^2 \rho_4^2)} + \frac{zy_1(\rho_3^2 + x_2^2)}{\rho_3(y_1^2 z^2 + x_2^2 \rho_3^2)} \right.$$

$$\left. - \frac{y_2}{x_1^2 + y_2^2} + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{zy_2(\rho_2^2 + x_1^2)}{\rho_2(y_2^2 z^2 + x_1^2 \rho_2^2)} - \frac{zy_1(\rho_1^2 + x_1^2)}{\rho_1(y_1^2 z^2 + x_1^2 \rho_1^2)} \right\}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} = q_x \left\{ \frac{y_2}{\rho_4 + z} - \frac{y_1}{\rho_3 + z} - \frac{y_2}{\rho_2 + z} + \frac{y_1}{\rho_1 + z} \right\}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = q_x \left\{ -\frac{y_2}{\rho_4(\rho_4 + z)} + \frac{y_1}{\rho_3(\rho_3 + z)} + \frac{y_2}{\rho_2(\rho_2 + z)} - \frac{y_1}{\rho_1(\rho_1 + z)} \right\}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2} = q_x \left\{ -\frac{z}{\rho_4(\rho_4 + y_2)} + \frac{z}{\rho_3(\rho_3 + y_1)} + \frac{z}{\rho_2(\rho_2 + y_2)} - \frac{z}{\rho_1(\rho_1 + y_1)} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = q_x \{ -\log(\rho_4 + x_2) + \log(\rho_3 + x_2) + \log(\rho_2 + x_1) - \log(\rho_1 + x_1) \}$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} = q_x \left\{ \frac{x_2}{\rho_4 + z} - \frac{x_1}{\rho_3 + z} - \frac{x_2}{\rho_2 + z} + \frac{x_1}{\rho_1 + z} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} &= q_x \left\{ -\frac{x_2}{\rho_4(\rho_4 + z)} + \frac{x_1}{\rho_3(\rho_3 + z)} + \frac{x_2}{\rho_2(\rho_2 + z)} - \frac{x_1}{\rho_1(\rho_1 + z)} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} &= q_x \left\{ \frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right\} \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} &= q_x \left\{ \frac{x_2}{\rho_4(\rho_4 + y_2)} - \frac{x_2}{\rho_3(\rho_3 + y_1)} - \frac{x_1}{\rho_2(\rho_2 + y_2)} + \frac{x_1}{\rho_1(\rho_1 + y_1)} \right\} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= q_x \left\{ -\tan^{-1} \frac{x_2 y_2}{z \rho_4} + \tan^{-1} \frac{x_2 y_1}{z \rho_3} + \tan^{-1} \frac{x_1 y_2}{z \rho_2} - \tan^{-1} \frac{x_1 y_1}{z \rho_1} \right\} \end{aligned}$$

여기서, $x_1 = -a - x$, $x_2 = a - x$, $y_1 = -b - y$, $y_2 = b - y$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z^2}, \\ \rho_3 &= \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z^2}, \quad \rho_4 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z^2} \end{aligned}$$