

표면접촉요소에 의한 정전용량계산 및 응용

Calculation of Capacitance Using Surface-Contacted Element and Application

박필용, 현정수, 최승길, 심재학, 강형부*

한양대학교 전기공학과, *한양대학교 전자전기공학부

Pil-yong Park, Jung-soo Hyun, Seung-kil Choi, Jae-hak Shim, Hyung-boo Kang*
Hanyang University

Abstract

In this paper, a new method for calculating capacitance in arbitrarily shape structure is presented. This new approach based on divergence theorem or Gauss's law is achieved by Surface-Contacted Element(SCE) for Gaussian surface. To evaluate accurate capacitance value in nonuniform electric field, in two dimensional analysis the interpolation using the elements which contact one nod (PE: Point-Element) or two nod (FE: Face-Element) is employed. Because the elements contacted with surface are very small compared with total elements in analytic model, SCE method has shorter computing time to calculate capacitance. This proposed method is verified by comparing the simulated results with value obtained by analytic method.

key words: SCE(Surface-Contacted Element) method, PE(Point-Element), FE(Face-Element), FEM, Gauss's law, Charge distribution

1. 서론

송전선로 상호간 및 전력기기에서의 전극설계 그리고 최근 전자공학에서의 회로기판 설계에 이르기 까지 도체상호간 또는 도체와 대지간의 정전용량 계산은 전기 및 전자공학 분야에서 중요한 비중을 차지하고 있다. 간단한 전극계의 정전용량은 간단히 해석적인 방법에 의해 계산될 수 있으나, 다중전극으로 구성된 도체계나 복잡한 형상의 전극 구조를 가진 시스템에서의 전계분포 및 정전용량을 해석하기는 쉽지않다. 기존의 정전용량 해석법으로는 전하중첩법, 표면 전하법 및 경계요소법이 주로 사용되고 있다. 하지만 전하중첩법 및 표면전하법은 가중전하배치에 대해 어느 정도 전문지식이 있어야 올바른 해석이 가능해지며 경계요소법의 경우 다양한 전극 형태에 대한 적절한 Green function의 설정이 곤란하다는 단점을 가지고 있다. 이에 본 연구에서는 복잡한 형상으로 구성된 도체계의 정전용량을 효율적으로 계산하기 위하여 유한요소법 및 전극표면에 접촉되어 있는 요소들을 이용한 가우스 법칙을 병용한 새로운 해석기법을 제시하였다.

2. 기본이론 및 해석방법

2.1 정전계 지배방정식

정전계에서는 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 가 되므로 지배방정식은 Maxwell 방정식으로부터 전기 스칼라

포텐셜 ϕ 를 계변수로 하는 다음과 같은 Laplace 방정식을 얻을 수 있다

$$\epsilon \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (1)$$

유한요소법의 가중잔차법에 의한 Galerkin Method를 사용하여 ϕ 를 근사화 시키면 정전계에서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있으며 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ 관계에 의해서 전계 \mathbf{E} 를 구할 수 있다

$$[K] \{\phi\} = \{0\} \quad (2)$$

여기서, K 는 계수행렬이다.

2.2 가우스 법칙

공간의 전하량 Q 를 둘러싸고 있는 임의의 폐곡면 S 에 대한 가우스 법칙은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon} \int_V dq = \frac{Q}{\epsilon} \quad (3)$$

따라서 임의의 전극형상에 대해 폐곡면을 취하고 식 (3)를 계산하면 전극표면에 존재하는 전하량 Q 를 계산할 수가 있게 된다. 이 때 전극 주위에 대한 폐곡면을 전극에 접촉하고 있는 요소들로 구성하고 각 요소들에 대하여 $\mathbf{E}_i \cdot S_i$ 를 계산하여 합을 구하면 전극표면의 Q 는 다음 식과 같이 근사적으로 구할 수 있다.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n E_i \cdot S_i \quad (4)$$

이 때 n , Q_i , E_i , S_i 는 각각 전극표면을 둘러싼 요소의 갯수, 요소내의 전하량, 전계 및 표면적이다.

3. 표면접촉요소(SCE)에 의한 정전용량계산

3.1 전극접촉 요소종류

그림1에 나타낸 것처럼 전극주위를 둘러싸고 있는 요소들의 종류는 2차원과 축대칭 3차원에서 1개의 절점이 전극에 접촉되어 있는 요소(PE:Point-Element)와 두 점이 전극에 접촉되어 있는 요소(FE:Face-Element)의 2종류로 나눌 수 있다.

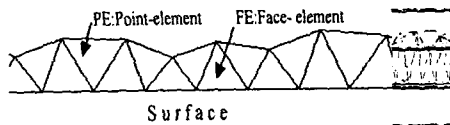


그림 1. PE 및 FE의 정의
Fig. 1. Definition of PE and FE

3.2 PE와 FE의 합성에 의한 계산값 보정

비교적 균일한 전계분포특성을 갖는 시스템에서의 정전용량은 PE 또는 FE만 의해서도 계산이 가능하지만 불평등전계일 때는 PE나 FE 두 가지중 하나를 사용하면 커다란 오차가 발생하게 된다.

그림 2는 불평등전계중 하나인 침전극에서 tip부근의 등전위분포와 요소분할을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 tip 부근에서의 PE와 FE 내에서의 전위분포를 살펴보면 tip 부근에서의 PE에 전계가 집중되어 있음을 알 수 있으며 이는 tip 근처에 전하가 집중되어 있기 때문이다. 이러한 경우 FE만으로 해석하면 PE와 같이 전계가 집중된 요소가 반영되지 않으므로 실제 전하량보다 작은 값의 전하량을 얻게 된다. 이에 대한 원인은 다음과 같이 설명될 수 있다. 유한요소법에 의한 요소분할시 전계집중이 일어나는 부분에 대해서 PE나 FE 중 어느 한 가지 요소만으로는 그 집중부분에 대해서 충분한 정보를 가지지 못하게 되어 전하량 계산에 오차가 발생하게 된다.

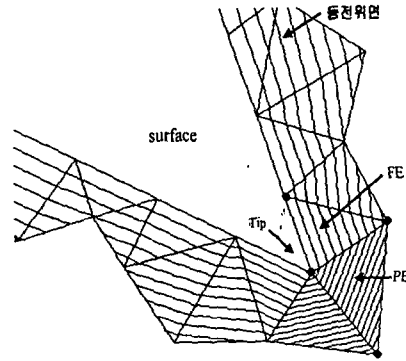


그림 2. Tip 부근에서의 전위분포
Fig. 2. Potential distribution near Tip
이러한 경우 PE와 FE를 동시에 고려하여 계산하여야 하며 계산방법은 다음과 같이 유도될 수 있다

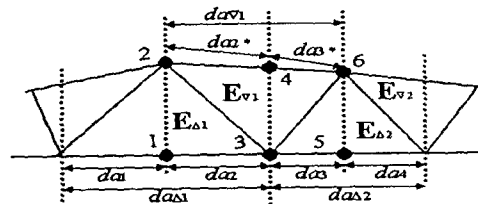


그림 3. PE, FE 보정모델
Fig. 3. Interpolation model using PE and FE

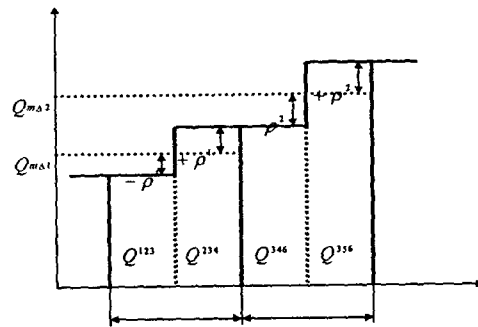


그림 4. 요소내에서의 전하량 분포
Fig. 4. Charge distribution in elements

그림 3은 PE와 FE를 동시에 고려하기 위해 식 (4)의 S_i 를 재 설정하는 것을 나타낸다. $|E_{\Delta 1}| < |E_{\nabla 1}| < |E_{\Delta 2}|$ 인 불평등전계이고 E 의 방향은 임의의 방향이라고 가정하여 면적 da_2 에서의 전하량분포를 살펴보면, 점 3방향으로 갈수록 전하밀도가 높아지므로 많은 양의 전하가 집중되어 있으며 이러한 전하 분포를 그림 4에서와 같이 근사화 시킬 수 있다. 점 2와 3을 잇는 선분에 의해 PE와 FE로 경계지어진

경계면 S_{23} 에서는 전계의 불연속에 의해 다음과 같은 식이 유도된다.

$$E_{\nabla 1} - E_{\Delta 1} = \frac{\sigma}{\epsilon} n_{s_{23}} \quad (5)$$

여기서, $n_{s_{23}}$ 는 $E_{\nabla 1}$ 방향으로의 S_{23} 법선벡터이고 $E_{\nabla 1}$, $E_{\Delta 1}$ 은 PE와 FE의 전계이다. 식 (5)의 σ 는 전하 분포의 불균일성에 의한 PE와 FE의 전하정보량 차이에 대한 오차로 생각할 수 있다. 따라서 PE의 전계 $E_{\nabla 1}$ 또는 FE의 전계 $E_{\Delta 1}$ 중 한 값만을 가지고 da_2 에 대해 발산값을 계산하면 오차가 발생하게 된다. 여기서 오차를 수정하기 위해 da_2 영역의 전하량을 대표할 수 있는 $E_{da_2}^{(0)}$ 을 정의하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{\Delta 1} &= E_{da_2}^{(0)} - \frac{\sigma}{\epsilon} n_{23} \\ E_{\nabla 1} &= E_{da_2}^{(0)} + \frac{\sigma}{\epsilon} n_{23} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)의 $\pm \frac{\sigma}{\epsilon} n_{23}$ 에 의한 전하량의 오차와 $E_{da_2}^{(0)}$ 에 의한 평균 전하량의 관계를 그림 4에 $\pm \rho_1$ 와 $Q_{m\Delta 1}$ 으로 표시하였다. 식 (6)에 의해서 $E_{da_2}^{(0)}$ 는 다음과 같이 정의된다

$$E_{da_2}^{(0)} = \frac{1}{2} (E_{\Delta 1} + E_{\nabla 1}) \quad (7)$$

$E_{da_2}^{(0)}$ 값을 가지고 영역 da_{23} 에 대해 발산의 정리를 이용하여 전하량을 구하면 다음 식과 같이 되며,

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \epsilon E_{da_2}^{(0)} \cdot n_{da_2} da_2 \\ &= \frac{\epsilon}{2} (E_{\Delta 1} + E_{\nabla 1}) \cdot n_{da_2} da_2 \\ &= \frac{\epsilon}{2} (E_{\Delta 1} \cdot n_{da_2} da_2 + E_{\nabla 1} \cdot n_{da_2} da_2) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 발산정리에 의해 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{\Delta 1} \cdot n_{da_2} da_2 &= E_{\Delta 1} \cdot n_{da_{\Delta 2}} da_2 \\ E_{\nabla 1} \cdot n_{da_2} da_2 &= E_{\nabla 1} \cdot n_{da_{\nabla 2}} da_2^* \end{aligned} \quad (9)$$

전극표면둘레를 n 개의 영역으로 분할했을 때 각 영역별 전하량 Q_{part} 를 식 (8) 및 식 (9)에 의해서 구한 da_k , da_k^* 는 인접해 있는 da_{k+1} , da_{k+1}^* 와 합할 경우 각각의 PE와 FE의 $da_{\nabla i}$, $da_{\Delta i}$ 가 된다는 것을 고려하면 전극표면의 총전하량 Q_{total} 은 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} Q_{total} &= \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} E_{\Delta k} \cdot n_{\Delta k} da_{\Delta k} \\ &+ \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} E_{\nabla k} \cdot n_{\nabla k} da_{\nabla k} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 n_P , n_F 는 전극표면에 접촉한 PE와 FE의 갯수이다.

전극표면의 특정부분에 대한 전하량을 계산하고자 한다면 식 (10)은 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} Q_{part} &= \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} E_{\Delta k} \cdot n_{\Delta k} da_{\Delta k} \\ &+ \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} E_{\nabla k} \cdot n_{\nabla k} da_{\nabla k} \\ &+ \frac{\epsilon}{2} E_1 \cdot n_1 da_1 + \frac{\epsilon}{2} E_n \cdot n_n da_n \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 E_1 , n_1 , da_1 및 E_n , n_n , da_n 은 각각 특정부분의 경계면에 의해서 나누어지는 요소의 전계, 법선벡터, 그리고 절단되는 면적이다.

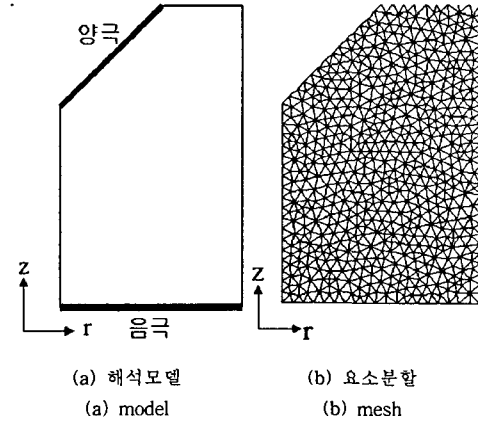


그림 5. 불평등전계 모델

Fig. 5. Nonuniform electrical field model

(요소수: 1143, PE: 16, FE: 14)

4. 수치해석 및 고찰 (축대칭 3차원)

4.1 동축원통형 축전기의 정전용량 해석결과

반경 a 인 내부도체와 내경이 b 인 외부 도체로 구성된 원통 커패시터에서 공간의 유전율이 ϵ_0 이고 길이가 L 일 때 원통 커패시터의 정전용량은 다음과 같은 식이 된다[5].

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \quad [\text{F/m}] \quad (12)$$

$a=0.5\text{cm}$, $b=1\text{cm}$, $L=1\text{cm}$ 인 모델의 경우 식 (12)에 의한 계산값은 $8.022 \times 10^{-13} [\text{F/m}]$ 이다. 동일한 모델에 대하여 요소수를 2108개로 분할하여 본 연구에서 제시한 유한요소법과 SCE법을 병용 해석하여 얻어진 정전용량은 $8.024 \times 10^{-13} [\text{F/m}]$ 로서 거의 값이 일치함을 알 수 있다. 이 때 $N_{PE}=97$, $N_{FE}=99$ 개이다.

4.2 불평등 전계에서의 정전용량 해석

그림 5와 같은 전극형태에 대해서는 양극의 꼭지점에서 불평등전계가 발생하게 된다. 정전용량 계산은 각 요소들의 에너지합을 이용한 다음식을 기준으로 잡고 PE만을 이용했을 때와 FE만을 이용했을 때, 그리고 PE, FE를 혼성했을 때의 정전용량 계산값을 비교하여 그림 6, 7에 나타낸다.

$$W = \int_V \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \epsilon_0 \sum_{k=0}^N \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_k dv_k = \frac{1}{2} CV^2 \quad (13)$$

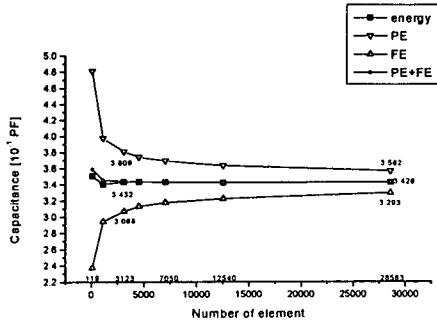


그림 6. 요소 수에 대한 정전용량 해석결과
Fig. 6. Solution of capacitance versus no. of element

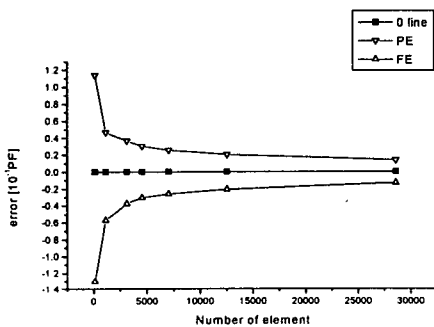


그림 7. 요소 수에 대한 PE와 SE의 오차값
Fig. 7. Error of PE & SE versus no. of element

그림 6에서 알 수 있듯이 표면접촉 요소인 PE와 FE를 혼합하여 수치해석을 했을 경우 각 요소들의 에너지 합을 이용한 결과값과 근사적인 값을 가짐을 알 수 있었다. 또한 그림 7에 나타난 것과 같이 불평등전계에서 PE 또는 FE 중 하나만을 이용하였을 경우에는 요소수를 증가시킬수록 근사값에 수렴하긴 하지만 항상 오차가 발생함을 알 수 있었다. 이는 불평등전계에서 PE 또는 FE 단독으로는 전극주변의 전계에 대해 완전한 정보를 가지지 못하기 때문이다. 또한 한 가지 주목할 만한 사실은 불평등전계에서 각 요소들의 에너지합을 이용한 정전용량의 계산에서는 영역의 모든 요소에 대해서 계산을 해야 하지만 표면접촉요소를 이용할 경우에는 전 영역의 요소수가 28583개일 경우에도 PE와 FE의 갯수는 73개, 70개 밖에 안되므로 매우 적은 수의 요소로도 정전용량을 계산할 수 있으며 아울러 계산시간의 단축효과를 얻을 수 있다는 것이다.

5. 결론

본 연구에서는 유한요소법과 전극표면에 접촉되어 있는 요소들을 이용하여 가우스 법칙을 병용한 새로운 정전용량 해석방법을 제시하였다. 표면 접촉 요소인 PE와 FE를 이용하여 가우스 정리를 적용시킨 전극의 전하량 및 정전용량 계산 방법은 이론이 간단하고 축대칭 3차원의 경우 상당히 적은 요소로도 매우 정확한 값을 얻을 수 있었다.

참고문헌

- [1] 임달호, *전기계의 유한요소법*, 동명사, 1986
- [2] S. Ratnajeevan and H. Hoole, *Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices*, Elsevier, 1989
- [3] Jianming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, A Wiley-Interscience Publication, 1993
- [4] David J. Griffiths, *Introduction To Electrodynamics*, Prentice Hall, 1989
- [5] David K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison Wesley, 1993
- [6] Matthew N. O. Sadiku, *Numerical Technique in Electromagnetics*, CRC Press, 1992
- [7] Mauro Feliziani and Francescaromana Maradei, "Capacitance Matrix Calculation of a Wire Conductor Line: A New FEM Approach," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 40, No. 3, pp. 262-270, 1998
- [8] A. Haddad and P. Naylor, "Finite-element Computation of Capacitance Networks in Multiple-electrode Systems: Application to ZnO Surge Arresters," *IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.*, Vol. 145, pp. 129-135, 1998