

부착과 비부착된 프리스트레스트 콘크리트보의 휨 모델

Flexural Modeling of Bonded and Unbonded Prestressed Concrete Beam

김민경* 이차돈**
Kim, Minkyung Lee, Chadon

ABSTRACT

An analytical method based on the nonlinear layered finite element method is developed to simulate overall load-deflection behavior of bonded and unbonded prestressed concrete beams.

The model which uses rather advanced numerical technique for iterative convergence to equilibrium can be regarded as superior one compared to the models mainly based on either load control or displacement control methods.

Model predictions were compared with preceding experimental results and it was observed that there were good agreements between them.

1. 서론

부착과 비부착된 프리스트레스트 콘크리트보에 대한 휨거동을 파악하기 위하여 많은 실험 및 이론 연구가 진행되어왔다[1,2]. 특히 프리스트레스트보의 전체적인 휨 거동을 파악하기 위한 이론적 연구로는 단면의 평형조건을 고려한 Couple Method와 비선형 유한요소법 등이 있다[3,5].

본 연구에서 부착된 프리스트레스트보의 휨 모델은 적합성에 근거하여 개발되었으며, 비부착된 프리스트레스트보의 휨 거동은 부재전체의 휨변형과 관계가 되므로 부착저감계수인 Ω 를 적용하여 보정하였다[4]. 또한 Arc-Length Method를 적용하여 강도저감에 따른 보의 처짐을 추적할 수 있도록 하였다.

2. 모델링

2.1 Layered Finite Element

부재력 $\{F\}$ 및 부재변위 $\{u\}$ 는 다음과 같이 정의한다[그림 1].

$$\{F\} = \{N_i, V_i, M_i, N_j, V_j, M_j\}^T \quad \{u\} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\}^T \quad (1)$$

수평변위를 $u(x, y) = u_o(x) - y \frac{d}{dx} v_o(x)$ 로 하면 가상일법 원리를 적용한 후 경계조건을 적용하여 Tangent Stiffness matrix(K)와 이에 대한 하중, 변위 증가분(ΔP , Δu)관계는 다음과 같이 산정할수 있다.

$$K = \int_0^l B^T DB dx ; \quad (2)$$

$$K \Delta U = \Delta P ; \quad (3)$$

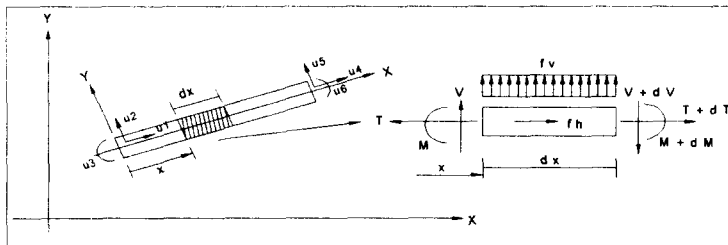


그림 1. 보, 기둥의 유한요소(Beam-Column Element for Finite Formulation)

* 정희원, 중앙대학교 대학원 석사과정

** 정희원, 중앙대학교 건축공학과 교수, 공학박사, P.E(USA), S.E(Korea)

N은 형상함수로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N = \begin{bmatrix} N_{1u}(x) & 0 & 0 & N_{2u}(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_{1v}(x) & N_{2v}(x) & 0 & N_{3v}(x) & N_{4v}(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서, $B = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} N_{1u}(x) & 0 & 0 & \frac{d^2}{dx^2} N_{2u}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} N_{1v}(x) & \frac{d^2}{dx^2} N_{2v}(x) & 0 & \frac{d^2}{dx^2} N_{3v}(x) & \frac{d^2}{dx^2} N_{4v}(x) \end{bmatrix}$ (5)

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{d \sigma_i(\epsilon_0(x, y))}{d\epsilon} A_i & - \sum_{i=1}^n \frac{d \sigma_i(\epsilon_0(x, y))}{d\epsilon} y_i A_i \\ - \sum_{i=1}^n \frac{d \sigma_i(\epsilon_0(x, y))}{d\epsilon} y_i A_i & \sum_{i=1}^n \frac{d \sigma_i(\epsilon_0(x, y))}{d\epsilon} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 Arc-Length Method

Arc-Length Method는 하중 및 처짐을 모두 제어함으로써 임의 형태의 하중을 받는 구조물에 대하여 최대하중 이후의 변위를 추적할 수 있는 방법이다[6].

P는 하중크기를 나타내고 λ를 변수로 하여 주어진 평형방정식을 다음과 같이 나타낸다고 하자:

$$g(U) = f(U) - \lambda P \quad (7)$$

f= 내력; U= 변위;
P= 주어진 고정하중 벡터; g= 불균형력;

상기 식(7)의 불균형력 g(U)를 영(0)으로 하기 위한 수치해석적 방법으로 Newton-Raphson 등과 같은 방법이 있으나 이 방법은 하중제어로서 최대하중 이후의 하중-변위 관계를 추적할 수 없다. Arc-Length 방법은 이를 해결하기 위하여 다음과 같이 Arc 형태를 갖는 제어함수를 갖게 된다.

$$\Delta U_{i+1}^T \Delta U_{i+1} + b \Delta \lambda_{i+1}^2 P^T P = \Delta U_i^T \Delta U_i + b \Delta \lambda_{i+1}^2 P^T P = \dots \Delta l^2 \quad (8)$$

ΔU_i = i 번째 반복계산 후의 변위 변화량; Δλ_i = i 번째 반복계산 후 하중증가분의 변화량;
Δl = Arc 길이의 변화량; b = scalar 변수;

i=0을 시점으로 다음과 같은 반복계산을 실시하여 수렴값을 찾게 된다.

$$\lambda_{i+1} = \lambda_0 + \Delta \lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta \lambda_i ;$$

$$U_{i+1} = U_0 + \Delta U_{i+1} = U_i + \eta_i \delta_i ; \quad (9)$$

여기서, $\Delta U_{i+1} = \Delta U_i + \eta_i \delta_i$, $\delta_i = -K^{-1}(f_i(U_i) - \lambda_{i+1} P) = \bar{\delta}_i + \lambda_{i+1} \delta_T$ 라고 하자. (10)

여기서, $\bar{\delta}_i = -K^{-1} f_i(U_i)$, $\delta_T = K^{-1} P$ 이다.

이때 δ_T는 초기하중 반복계산시의 접선변위 벡터이고

$$\delta_0 = -K^{-1}(f_0(U_0) - \lambda_0 P) = (\lambda_1 - \lambda_0) - K^{-1} P = \Delta \lambda_1 \delta_T \quad (11)$$

그러나 $\bar{\delta}_i$ 는 λ_{i+1}이 주어져야 구할 수 있으므로 식(10)에서 δ_i 및 ΔU_{i+1} 식(9)를 식(8)에 대입하여 얻게되는 다음 식으로부터 산정할 수 있다.

$$a_1 \lambda_{i+1}^2 + a_2 \lambda_{i+1} + a_3 = 0 \quad (12)$$

여기서, $a_1 = \delta_T^T \delta_T$; $a_2 = 2 \delta_T^T (\Delta U_i + \bar{\delta}_i)$; $a_3 = \bar{\delta}_i^T \bar{\delta}_i + 2 \bar{\delta}_i^T \Delta U_i$;

3. 프리스트레스트 콘크리트 보

3.1 비부착된 프리스트레스트보의 변형률

기본적으로 부착된 프리스트레스트보의 휨 거동은 변형률 적합조건을 이용하여 해석이 가능하나, 비부착된 프리스트레스트보의 휨 거동은 부재전체의 휨변형과 관계 (Member dependent)되므로 수렴을 위한 매 반복 계산시에 이에 대하여 보정을 하여야 한다[4].

이에 대한 보정은 A.E.Naaman이 제안한 바와 같이, 부착저감계수(Bond reduction factor)인 Ω를 적용하여 (ε_{psub})_{av} = Ω · (ε_{cpub})_m의 관계가 만족되어야 한다.

여기서, ε_{psub} = 최대 모멘트일 때 비부착 텐돈의 변형률;

ε_{cpub} = 최대 모멘트일 때 비부착 텐돈의 위치에 있는 콘크리트 변형률이다.

보가 탄성범위 내에서 거동을 할 경우에는 Hooke의 법칙과 탄성 이론을 사용하여 Ω는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Omega = \frac{2}{L \cdot M_{max} \cdot (e_{sub})} \cdot \int_0^{l/2} M(x) \cdot e_{sub}(x) \cdot dx ; \quad (13)$$

여기서, L = 보의 길이; M_{max} = 위험단면에서의 모멘트량;

e_{amb} = 위험 단면에서 비부착 텐돈의 편심;

$e_{ab}(x)$ = 지지점에서 x 거리만큼 떨어진 비부착 텐돈의 편심이다.

그러나 재료적인 비선형이 포함되는 경우에는 상기의 식(13)을 직접 적용할 수 없다. 이런 경우 식(13)에 나타난 개념에 근거하여 비부착 텐돈의 변형율은 텐돈을 따라 위치한 콘크리트 변형도에 의한 전체 부재의 변형을 구하여 이 값을 텐돈의 길이로 나누어서 산정할 수 있다. 하중의 미소 변화량에 따른 보의 미소 처짐량의 변화에 대하여 비부착 텐돈의 변형율은 매번 부재 전체 변형에 영향을 받게 된다. 따라서 비부착 프리스트레스트보의 경우에는 텐돈의 변형율을 텐돈의 길이방향을 따라 그 위치의 콘크리트 변형율에 근거하여 텐돈의 전체 변형을 계산한 후 비부착 텐돈의 변형율을 산정하는 추가적인 계산이 필요하다.

이를 본 유한요소법에서는 비선형 반복계산시 수치적으로 보정하여 만족되도록 하였다. 즉, 비부착 프리스트레스트보의 휨 거동은 반복 계산시 발생하는 내력산정의 기준을 부재 전체의 변형과 연루하여 프리스트레스트 강재의 변형을 기준으로 산정하여 외력에 수렴하도록 하였다.

4. 모델과 실험식 비교

4.1 부착된 프리스트레스트 콘크리트보

아래는 부착된 프리스트레스트 콘크리트보의 휨거동에 대하여 개발한 모델에 의한 예측치와 실험치를 비교하고자 하였다. 표 1은 부착된 프리스트레스트 보에 대한 실험 변수를 나타내며 [그림2]는 모델과 실험치의 비교를 나타낸다[1,2].

표 1. 부착된 프리스트레스트 보의 실험체 변수(Main Parameters for Bonded Prestressed Concrete Beam)

Beam	Ref.	b (cm)	h (cm)	Tensile steel area (cm ²)	Comp. steel area (cm ²)	f_y (kg/cm ²)	d_s (cm)	f'_c (kg/cm ²)	Tendon area (cm ²)	d_{ps} (cm)	P_c (kg)
D-1	1	16.0	28.0	1.57	-	2670	25.00	356	0.588	22.00	9240
D-3	1	16.0	28.0	2.36	-	4300	25.00	356	1.568	22.00	8790
PS1	2	11.43	22.86	-	0.11	4800	-	384	0.548	15.88	6518
PS3	2	11.43	22.86	-	0.11	4800	-	395	1.652	15.88	5244
PP2S2	2	11.43	22.86	0.968	0.11	4800	20.32	365	0.548	15.88	6440
PP1S3	2	11.43	22.86	3.871	0.11	4800	20.32	410	0.548	15.88	5670

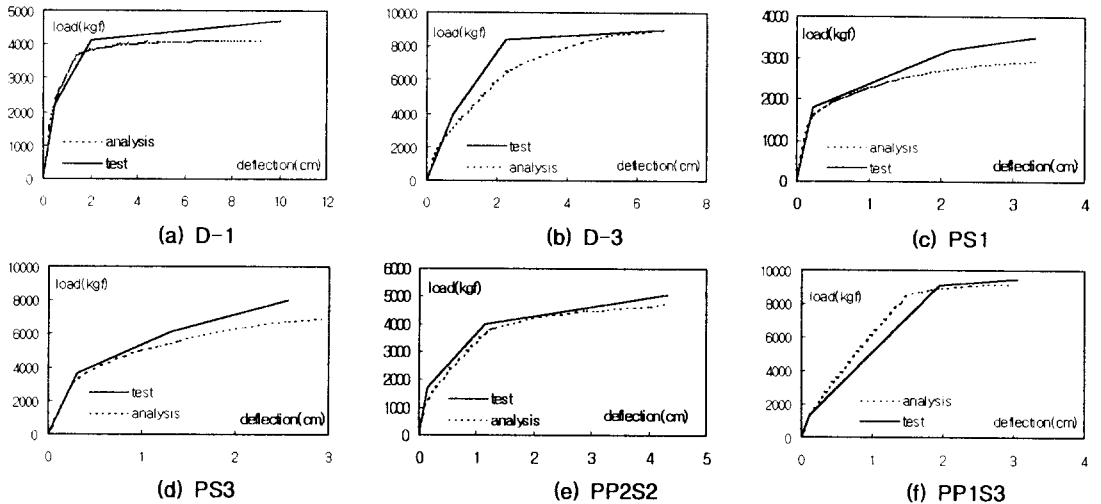


그림 2. 부착된 프리스트레스트보의 하중-처짐 비교(Comparisons between Test and Model)

4.2 비부착된 프리스트레스트 콘크리트보

아래는 비부착된 프리스트레스트 콘크리트보의 휨거동에 대하여 개발한 모델에 의한 예측치와 실험치를 비교하고자 하였다. 표 2는 비부착된 프리스트레스트 보에 대한 실험 변수를 나타내며 [그림3]은 모델과 실험치의 비교를 나타낸다[1].

표 2. 비부착된 프리스트레스트보의 변수(Main Parameters for Unbonded Prestressed Concrete Beam)

Beam	Ref.	b (cm)	h (cm)	Tensile steel area(cm ²)	f _y (kg/cm ²)	d _s (cm)	f' _c (kg/cm ²)	Tendon area (cm ²)	d _{ps} (cm)	P _e (kg)
A-1	1	16.0	28.0	1.57	2670	25.00	306	0.588	22.00	9600
A-2	1	16.0	28.0	1.57	4300	25.00	306	0.980	22.00	9040
A-4	1	16.0	28.0	1.57	4300	25.00	306	0.588	22.00	8690
A-5	1	16.0	28.0	3.08	4000	25.00	306	0.784	22.00	8100
A-6	1	16.0	28.0	4.62	4000	25.00	306	1.568	22.00	8540
A-8	1	16.0	28.0	4.62	4000	25.00	331	0.588	22.00	8940

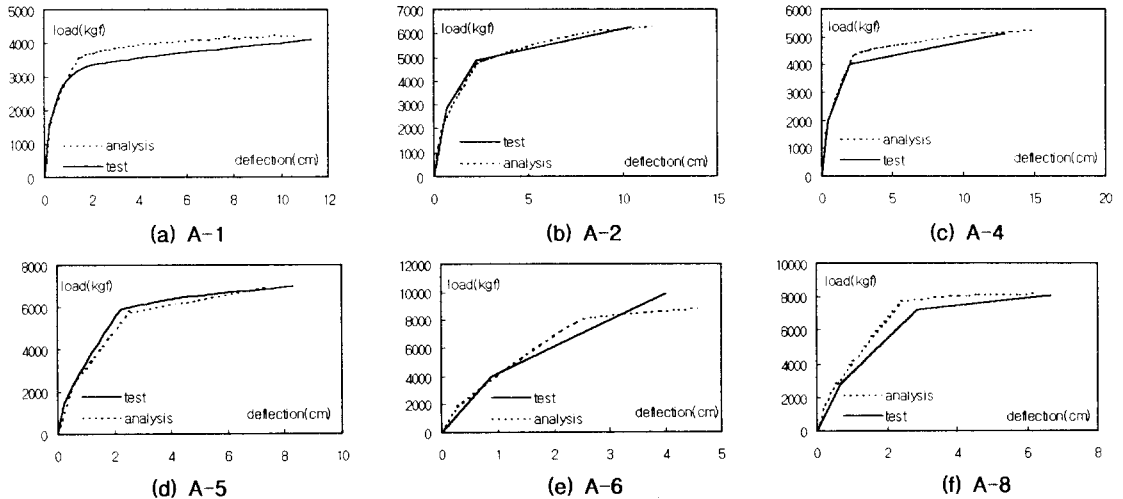


그림 3. 비부착된 프리스트레스트보의 하중-처짐 비교(Comparisons between Test and Model)

5. 결론

본 연구에서는 부착과 비부착 프리스트레스트 철근콘크리트보의 휨거동을 추적하기 위하여 비선형 유한요소법과 Arc-Length 수치해석법을 접목함으로써 다양한 하중형태, 정정 및 부정정 구조물, 그리고 최대하중 후 하중저하 현상등을 고려할 수 있는 모델을 개발하였다. 본 모델은 정정구조물에만 적용할 수 있는 Couple Method, 최대하중점까지만 추적할 수 있는 Newton-Raphson Method를 사용한 비선형 유한요소모델, 특수한 하중에만 고려할 수 있는 처짐 제어 중심의 비선형 유한요소 모델보다 더 일반화된 모델이라고 볼 수 있다.

개발된 모델은 기존의 타 연구자들에 의한 실험값과 비교한 결과 잘 일치함이 고찰되었다.

참 고 문 헌

1. Tao, X. and Du, G., "Ultimate Stress of Unbonded Tendons in Partially Prestressed Concrete Beam", PCI Journal, Vol. 30, No. 6, pp. 72-91, 1985
2. Muhamed Husein Harajli, "Deformation and Cracking of Partially Prestressed Concrete Beams under Static and Cyclic Fatigue Loading", A Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Michigan, 1985
3. Jenn-Chuan Chern, Chii-Ming You, Zdenek P. Bazant, "Deformation of Progressively Cracking Partially Prestressed Concrete Beams", PCI Journal, January-February, 1992
4. Naaman, A. E., "A New Methodology for the Analysis of Beams Prestressed with External or Unbonded Tendons", External Prestressing in Bridges, Naaman, A. E. and Breen, J. E., Editors, SP120-16, the American Concrete Institute, Detroit, 1990, pp. 339-354.
5. Jeong, S. M., "Evaluation of Ductility in Prestressed Concrete Beams Using Fiber Reinforced Plastic Tendons", A Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Michigan, 1994
6. M. A. Crisfield, "An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations", Internal Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, 1269-1289