

콘크리트에서 국소화된 파괴해석을 위한 유한요소법

A Finite Element Method for Localized Failure Analysis of Concrete

송 하 원* 김 형 운** 우 승 민***
Ha-Won Song Hyoung-Woon Kim Seung-Min Woo

ABSTRACT

Localized failure analysis of concrete structures can be carried out effectively by modeling fracture process zone of concrete during crack initiation and propagation. But, the analysis techniques are still insufficient for crack modeling because of difficulties in numerical analysis procedure which describe progressive crack. In this paper, a finite element with embedded displacement discontinuity is introduced to remove the difficulties of remeshing for crack propagation in discrete crack model during progressive failure analysis of concrete structures. The performance of this so-called embedded crack approach for concrete failure analysis is verified by several analysis examples. The analysis results show that the embedded crack approach retains mesh size objectivity and can simulate localized failure under mixed mode loading. It can be concluded that the embedded crack approach can be an effective alternate to the smeared and discrete crack approaches.

1. 서론

콘크리트 구조물은 여러 가지 이유에 의하여 균열이 발생하고 발생한 균열이 국소화되어 진행되는 경우, 국소화된 균열의 성장과 진행에 의하여 콘크리트 구조물 전체의 거동이 지배되어 구조물은 궁극적인 파괴에까지 이르게 된다.

콘크리트의 국소화된 진행성 파괴해석방법으로는 크게 균열을 연속체로 처리한 분포균열접근법(smeared crack approach)¹⁾과 균열을 기하학적 불연속으로 처리한 이산균열접근법(discrete crack approach)²⁾이 있다. 분포균열방법은 프로그래밍이 비교적 간단하나 균열로 인한 불연속을 표현하지 못하여 진행하는 국부적인 균열이 구조물의 전체 파괴거동을 지배하는 경우에는 적합하지 않은 단점이 있고, 이산균열방법은 국소화된 균열을 잘 표현하나 균열의 발생과 함께 새로운 절점을 추가하여 요소를 분할하여야 하거나 균열의 진행방향을 고려하여 균열이 유한요소경계를 따라 진행하도록 미리 유한요소 이산화하여야 하는 단점을 갖고 있다.³⁾

최근에 기존의 이산균열모델의 단점을 보완하기 위해 준취성재료에 발생하는 국소화된 전단띠나 균열의 진행성 파괴해석에 유한요소안에 불연속면을 갖게 하는 소위 매입균열접근법(embedded crack approach)⁴⁾⁻⁶⁾에 관한 활발한 연구가 수행되고 있다. 매입균열법은 유한요소내에 균열이나 전단띠 등의 내부 변위 불연속을 고려하여 국소화된 진행성 파괴해석시 요소의 분할이나 이에 따른 절점의 생성이 필요없도록 한 이산형 균열해석방법의 일종이다.

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수

** 정회원, 연세대학교 토목공학과 석사과정

*** 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

본 논문에서는 새로운 파괴진행 해석방법으로 매입균열해석방법을 도입한 유한요소 프로그램을 개발하여 콘크리트의 파괴진행해석을 수행하였다. 개발된 프로그램은 내부 불연속면을 갖는 연속체에 대해 수정가상일의 원리를 적용하여 구한 유한요소의 정식화와 균열이 매입된 균열요소에 필요한 이중사상 수치적분을 적용하였으며, 균열면의 구성방정식으로 콘크리트 파괴진행영역의 연화곡선을 적용하므로써 콘크리트의 파괴진행해석이 가능하도록 하였다. 개발된 프로그램을 사용하여 매입균열 해석방법의 요소크기 객관성을 확인하였으며 콘크리트 구조물의 혼합모드 파괴를 포함한 해석 예제에 대하여 해석결과를 실험결과 및 타 연구자의 해석결과와 비교하여 프로그램을 검증하였다.

2. 진행성 파괴의 정식화 및 균열요소

Fig. 1과 같이 불연속면 Γ_{sb} 를 포함하는 연속체 Ω 에서 수정가상일의 원리를 적용하면 식(1)을 얻을 수 있는데, 이것은 연속체 내부에 불연속면이 존재할 때 외력에 의한 일에 내부 불연속면에서의 표면력에 의한 일이 추가된다는 것을 의미한다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{T}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_a} t_i \delta d_i d\Gamma \quad (1)$$

여기서, σ_{ij} 는 연속체내에서의 응력, $\delta \epsilon_{ij}$ 는 가상변형률, f_i 는 체적력, 그리고 δu_i 는 가상변위를 나타내며 \bar{T}_i 는 연속체 경계 Γ 에 작용하는 표면력이고, t_i 와 δd_i 는 각각 내부 불연속면

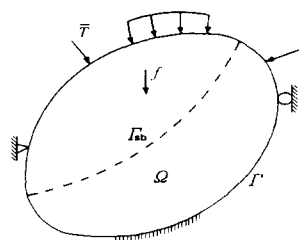


Fig. 1. Model with embedded discontinuous line

Γ_{sb} 에 작용하는 표면력과 가상내부불연속변위이다. 시간의 흐름에 따라 연속체와 불연속면에서의 변위가 선형거동을 한다고 가정하면 연속체에서의 응력과 변형률사이의 구성방정식과 불연속면에서의 표면력과 불연속변위 사이의 구성방정식은 다음 식(2)와 같다.

$$\Delta \sigma_{ij} = L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}, \quad \Delta t_i = \eta_{ij} \Delta d_j \quad (2)$$

여기서 L_{ijkl} 는 연속체의 구성텐서이며 η_{ij} 는 불연속면 Γ_{sb} 에서의 구성관계를 표현하는 2차텐서이다. 식(2)를 이용하여 식(1)을 증분형으로 수정하면 다음과 같은 증분형 수정가상일의 원리를 얻을 수 있으며, 다음 식(3)이 증분 해석을 위한 유한요소 이산화식이 된다.

$$\int_{\Omega} L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \delta (\Delta \epsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega} \Delta f_i \delta (\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \Delta \bar{T}_i \delta (\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_a} L_{ij} \Delta d_j \delta (\Delta d_i) d\Gamma \quad (3)$$

내부 불연속 유한요소의 이산화를 위하여 요소체적 Ω_e 의 변위영역에서 절점변위증분 $\Delta \mathbf{u}$ 와 변형률증분 $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ 는 절점변위증분 $\Delta \mathbf{u}$ 와 국소화 절점변위증분 $\Delta \mathbf{d}$ 를 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{N}^{(\beta)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{d}}, \quad \Delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}^{(\alpha)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad (4)$$

여기서, 뒀첨자 α, β 는 각각 연속과 불연속을 의미하며, $\mathbf{N}^{(\alpha)}, \mathbf{N}^{(\beta)}$ 는 다항식으로 표현된 보간함수의 행렬이고 $\mathbf{B}^{(\alpha)}, \mathbf{B}^{(\beta)}$ 는 적합행렬로서 내부보간함수 $\mathbf{N}^{(\alpha)}, \mathbf{N}^{(\beta)}$ 의 미분식으로 표현될 수 있다. 불연속면의 내부보간함수 $\mathbf{N}^{(\beta)}$ 는 Fig. 2와 같이 요소체적 Ω_e 가 내부 불연속면 Γ_{sb} 에 의하여 양의 요소체적 Ω_e^+ 와 음의 요소체적 Ω_e^- 로 나뉠 때 각각의 체적에 대하여 식(5)로 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} N_1^{(\beta)+} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)d_1 & N_1^{(\beta)-} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)d_1 \\ N_2^{(\beta)+} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)d_2 & N_2^{(\beta)-} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)d_2 \end{aligned} \quad (5)$$

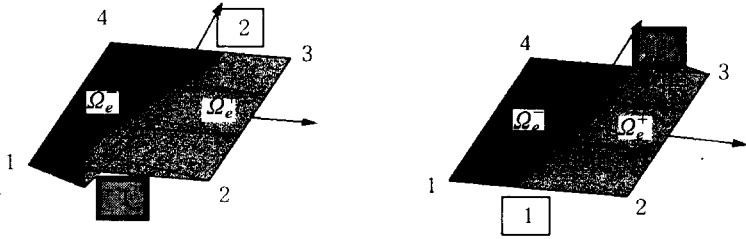


Fig. 2. Discontinuous shape function for a 4-node quadrilateral element

불연속을 고려한 적분은 균열요소에서 이중사상(dual mapping)을 이용하여 수행할 수 있다. 이중사상은 Fig. 3과 같이 가우스적분을 2차에 걸쳐서 적용하는 방법으로 불연속 사변형요소의 적분을 수행하기 위해서 불연속면에서의 적분점 2개를 포함하여 10개의 적분점에서 적분이 이루어진다. 이중사상 적분법을 이용하여 강성행렬 K_{ij}^e 에 대한 적분은 요소의 양의 영역 Ω_e^+ 과 음의 영역 Ω_e^- 에서 다르기 때문에 수치적분은 각각의 영역에 대하여 분리되어야 하며 식(6)과 같이 수행된다.⁽⁶⁾

$$K_{ij}^e = \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 K_{ij}^{e,+} (r_i, s_j) (\det J_{ij}) (\det J^*_{ij}) w_i w_j + \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 K_{ij}^{e,-} (r_i, s_j) (\det J_{ij}) (\det J^*_{ij}) w_i w_j \quad (6)$$

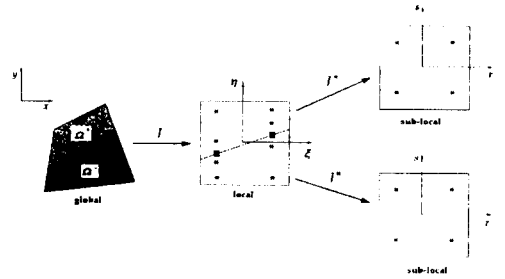


Fig. 3. Dual mapping technique for numerical integration

Fig. 3과 식(6)에서 ξ_i, η_j 는 국부좌표, r_i, s_j 는 부국부좌표, J 는 전체좌표에서 국부좌표로 변환하는 Jacobian, J^* 는 국부좌표에서 부국부좌표로 변환하는 Jacobian 그리고 w_i 는 적분가중치이다.

3. 콘크리트의 진행성 파괴해석

균열선단의 파괴진행영역에서 연화상태를 인장연화곡선과 전단연화곡선을 사용하여 불연속면의 구성방정식에 고려하기 위하여, 본 논문에서는 Fig. 4와 같이 불연속면에서 작용하는 인장응력 f 와 전단응력 τ 의 균열열림변위 w 와 균열미끄러짐변위 δ 와의 관계는 각각 불연속면에서의 선형인장연화곡선과 선형전단연화곡선을 사용하여 나타내었다.

Fig. 4에서 인장 및 전단연화곡선으로 둘러싸인 면적에 해당하는 G_{fI} 과 G_{fII} 는 각각 파괴모드 I과 II의 파괴에너지이다. (2)식에서의 불연속면의 구성텐서 η 은 식(7)과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta_{ij} = \begin{bmatrix} \eta_{nn} & 0 \\ 0 & \eta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \eta_{nn} = -\frac{f_t}{w_c}, \quad \eta_{tt} = -\frac{\tau_t}{\delta_c} \quad (7)$$

여기서 η_{nn} 는 선형인장연화곡선의 기울기, f_t 는 인장강도, w_c 는 한계균열열림변위, η_{tt} 는 선형전단연화곡선의 기울기, τ_t 는 전단강도, δ_c 는 한계균열미끄러짐변위를 의미한다.

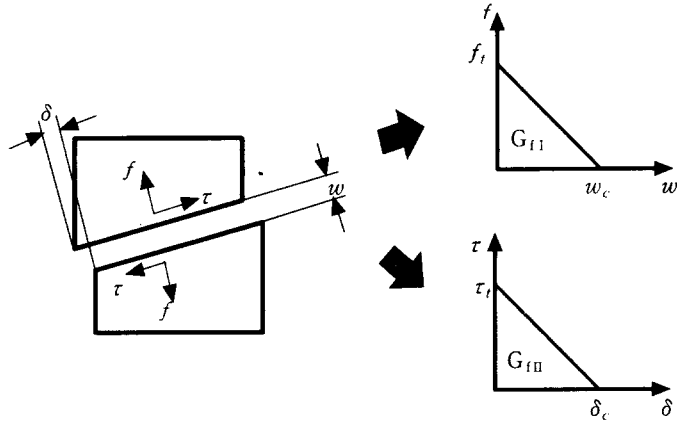


Fig. 4 Tension/shear softening curve of discontinuous line

개발된 프로그램이 파괴해석에 사용될 때 요소 크기의 객관성을 검증하기 위하여 Fig. 5의 콘크리트 시편의 파괴해석의 하중-변위 관계곡선은 Fig. 6에서 보여주는 것처럼 사용한 요소의 갯수에 관계없이 거의 동일한 결과가 나왔다.

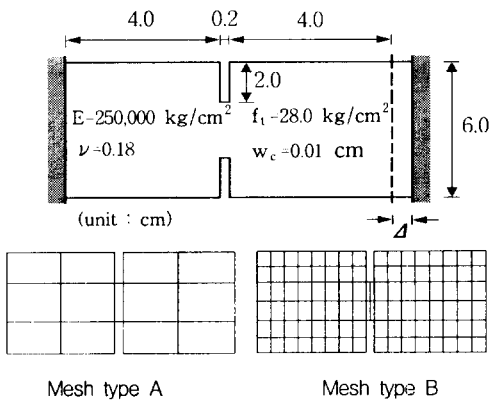


Fig. 5. Model for mesh size objectivity

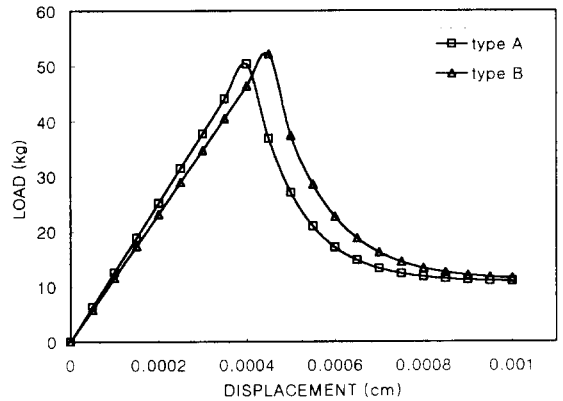


Fig. 6. Load-displacement curves

파괴해석에 사용한 실험모델⁷⁾은 높이 $d=7.8$ cm, 두께 $b=3.8$ cm의 콘크리트 공시체로서 그 형상은 Fig. 7과 같이 3점 힘 보시편이며, 유한요소해석을 위한 모델링은 Fig. 8과 같이 노치가 있는 부분을 좀 더 조밀하게 요소를 분할하였다. 하중과 하중점 아래의 수직변위에 대한 해석결과는 실험결과 및 타 연구자의 해석한 결과⁸⁾와 비교하여 Fig. 9에 나타내었다. 하중과 CMOD의 관계는 Fig. 10에 실험값과 비교하여 나타내었다.

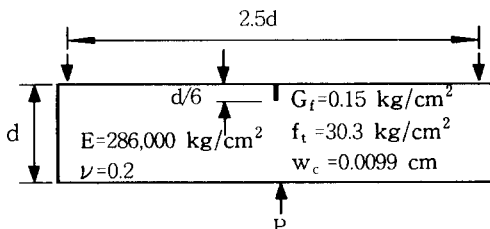


Fig. 7. Three point bending fracture specimen

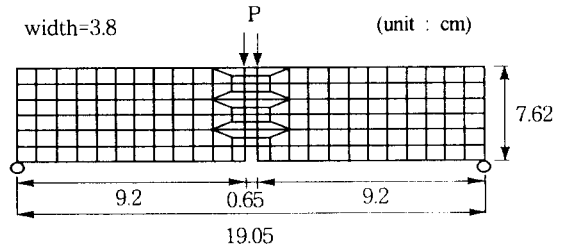


Fig. 8. Modeling of notched simple beam

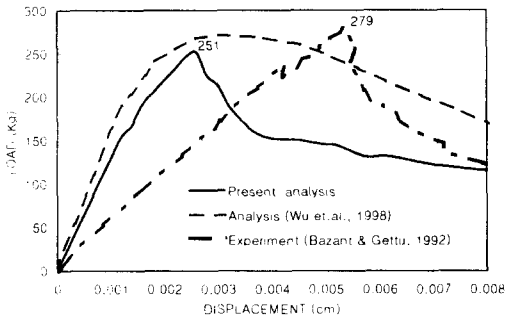


Fig. 9. Load-displacement relations

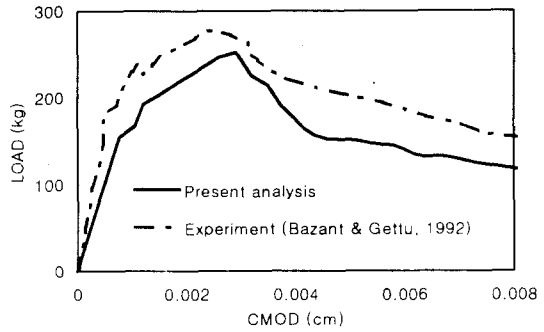


Fig. 10. Load-CMOD relations

한편, 혼합모드 하중하의 파괴에 대한 해석을 수행하기 위하여 혼합모드 실험모델⁹⁾을 해석대상 구조물로 선정하였다. 혼합모드의 파괴 해석은 하중재하점에서 변위제어의 방법이 적용되었다. 해석결과 얻어진 하중-변위 관계곡선과 각 하중단계에서의 균열진행은 실험결과와 비교하여 Fig. 12에 나타내었다. Fig. 12에서 보듯이 균열의 진행방향은 하중의 변화에 따라서 계속 변화함을 알 수 있으며, 실제 실험에서의 균열진행방향과 거의 일치함을 알 수 있다.

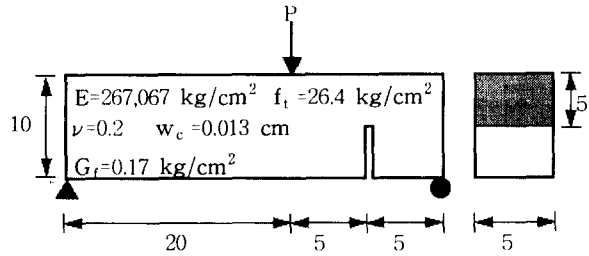


Fig. 11. Mixed mode fracture specimen

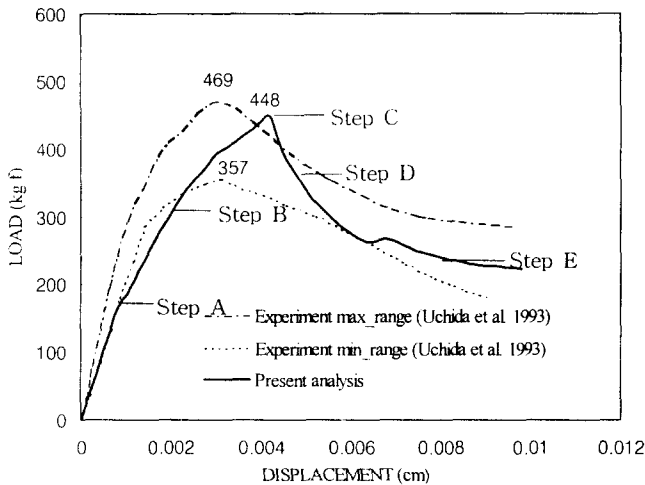
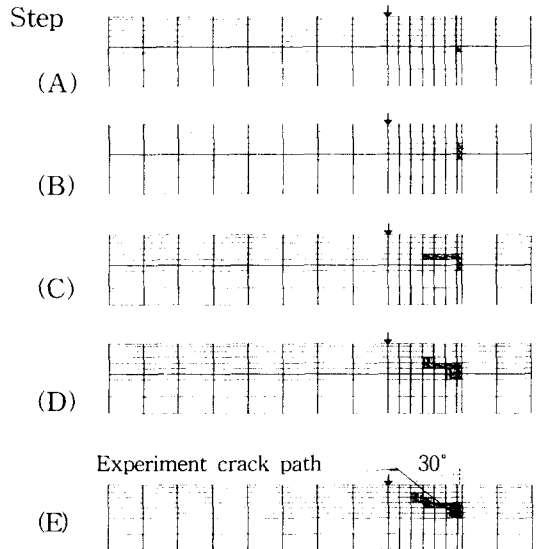


Fig. 12 Load-displacement relation and crack propagations of mixed mode loading



4. 결론

콘크리트의 진행성 파괴를 해석하기 위하여 변위의 불연속이 매입된 요소를 사용하였으며 불연속에서의 구성모델로서 콘크리트 파괴선단에서의 파괴진행영역의 연화곡선을 적용하였다. 이에 따른 알고리즘이 적용된 유한요소 프로그램을 개발하여 콘크리트 진행성파괴해석에서의 소위 매입균열법의 성능을 해석예제로부터 검증하였다. 먼저 인장시편을 이용하여 파괴해석의 요소개관성을 검증하였고, 노치가 있는 콘크리트 단순보의 파괴진행 해석을 수행하여 극한하중과 극한하중이후의 거동을 예측하였다. 또한, 혼합모드 하중하의 콘크리트 보의 파괴해석을 수행하여 파괴의 진행경로와 이에 따른 극한하중을 구하였다. 매입균열법으로 구한 콘크리트의 국소화된 파괴 해석결과는 실험결과 및 타 해석결과와 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다. 매입균열법은 균열을 요소안에 매입시킴으로써 이산균열법의 단점을 개선할 수 있는 새로운 균열해석방법의 하나임을 알 수 있다.

참고문헌

1. Bazant, Z. P. and Oh, B. H., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", RILEM Mater. Struct., 16, 1983, pp. 155-177.
2. Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P. E., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by means of Fracture Mechanics and Finite Element", Cement Concr. Res., 6, 1976, pp. 773-782.
3. 송하원, "유한요소법에 의한 콘크리트의 진행성 파괴해석", 콘크리트학회 논문집, Vol. 8, No.1, 1996. 2., pp. 145~153.
4. Dvorkin, E. N., Cuitino A. M. and Gioia G., "Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distortions", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 30, 1990, pp. 541-564.
5. Wan, R. G., Chan, D. H., and Morgenstern, N. R., "A Finite Element Method for the Analysis of Shear Bands in Geomaterials", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 7, Elsevier, 1990, pp. 129-143.
6. 송하원, 우승민, 김형운, "내부 불연속 요소를 사용한 콘크리트의 파괴진행해석", 한국콘크리트학회 1998년 가을학술발표회 논문집, Vol. 10, No. 2, 1998. 11., pp. 450~451.
7. Bazant, Z. P. and Gettu, R., "Rate Effect and Load Relaxation in Static Fracture Concrete", ACI Material J., 89(5), 1992, pp. 456-468.
8. Wu, Z., Machida, A., and Gao, D., "一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発", 日本土木學會論文集, No. 598, 1998, pp. 149-159.
9. 内田裕市, 六郷惠哲, 小柳裕, "混浴モードの荷重下におけるコンクリートのひびわれ挙動", 日本土木學會第48回 年次學術講演會論文集, 342, 1993, pp. 710-711.