

LQG 보상기를 이용한 건물의 진동제어 실험

Experimental Study on the Vibration Control for Building Structures using LQG Compensator

민 경 원*
Min, Kyung-Won*

이 성 경**
Lee, Sung-Kyung**

김 성 춘***
Kim, Sung-Choon***

ABSTRACT

To control the motion of building structures under earthquakes, their response should be measured first by various sensors and transformed into the control forces using some control algorithms. Of many control algorithms, linear quadratic control is widely used as it is easy to implement and analyze. However, the algorithms has the disadvantage that it needs the real-time measurements of all state variables (i.e., building's displacements and velocities), which are difficult to achieve for the building structures under earthquakes. Thus, the practical algorithms employing output feedback are developed. In this paper LQG algorithm is used for the control of the building model with an active mass driver. The building's acceleration is used to obtain the control gain and the Kalman filter gain. The LQG control strategy is verified with the experimental study on the one-story building model equipped with the active mass driver. This paper demonstrates experimentally the efficacy of the LQG algorithm based on the active mass driver system in reducing the response of seismically excited buildings.

1. 서 론

지진력을 받는 건물의 응답을 제어하기 위해서는 센서를 이용하여 응답을 계측하여야 한다. 이렇게 계측된 응답은 다양한 제어 알고리즘과 제어기에 의하여 제어력으로 변환이 되어 건물의 응답을 제어하게 된다. 여러 제어 알고리즘 중에서 LQ(linear quadratic)제어는 2차 성능지수를 최적화하여 제어이득을 산정하는 방법으로 제어의 안정성이 보장된다는 장점이 있으나 실시간에서 건물의 모든 상태변수를 측정하여야 한다는 불편함이 따른다. 또한, 상태변수인 건물의 변위와 속도에는 지진력이 가해지는 지반의 거동이 포함되어 있기 때문에, 지진력에 위한 건물의 순수한 상대변위와 속도를 계측하기가 매우 어렵다.^{(1),(2)} 따라서, 이와 같은 제약에 대한 대안으로 건물의 시스템이 안정하고 응답의 계측이 가능할 때에 관

* 인천대학교 건축공학과 교수, 정회원

** 인천대학교 건축공학과, 연구원

*** 인천대학교 건축공학과, 석사과정

측기(observer)를 이용하여 출력 되먹임 제어시스템을 설계하는 Kalman filter^{(3),(4)} 제어 알고리즘을 적용할 수가 있다. 출력으로는 지반과의 상대응답이 아닌 절대응답인 건물의 가속도를 이용하며, 관측기인 Kalman filter 를 사용하여 상태변수를 추정하는 것이다.

2. 해석 및 실험모델

본 연구에서 적용되는 실험모델은 민경원이 구축한 시스템^{(5),(6)}으로써, 다음 그림 1.과 같은 1층 전단형 건물모델이다. m 과 M 은 각각 슬래브와 AMD 의 왕복운동하는 질량체의 질량을, $\ddot{x}_0, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ 은 각각 지반, 건물, AMD 의 질량체에 설치한 가속도계 센서로부터 측정 한 절대가속도를, k 와 c 는 각각 건물모델의 강성과 감쇠상수를, f 는 건물에 가해지는 제어력을 나타낸다. 건물 슬래브에 설치된 가속도계로부터 제어력을 산정하여 actuator 에 제어력을 발생시키는 시스템으로써, 해석의 편의상 제어력과 건물의 상호작용은 무시하기로 한다.

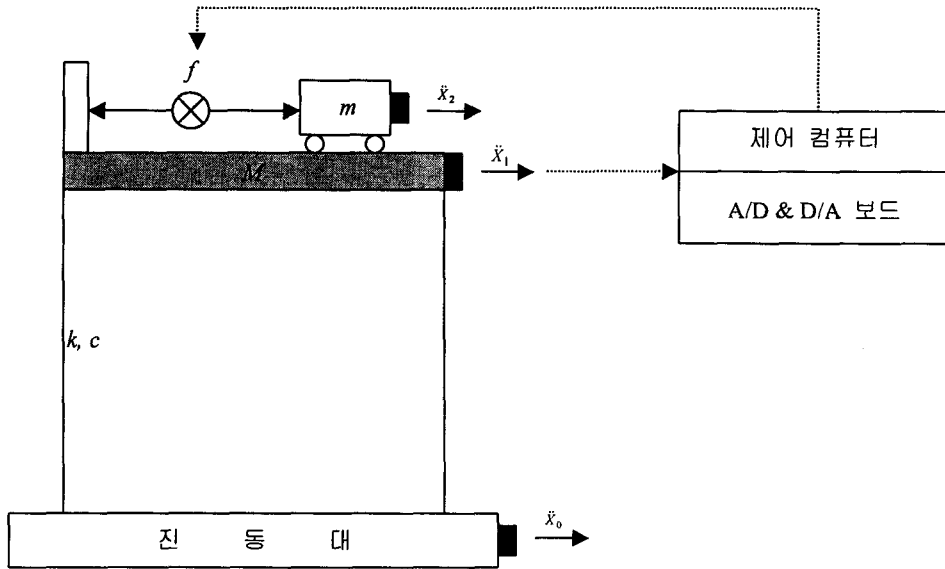


그림 1. 실험모델

위의 그림 1.과 같은 실험모델에 대한 운동방정식은 다음식과 같은 미분방정식으로 표현 된다.

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -M\ddot{x}_0 - f \quad (1)$$

위 식(1)에서 $x = x_1 - x_0$ 는 건물과 지반의 상대변위를 나타낸다.

(1)식으로부터, 상태변수 $z = [x, \dot{x}]^T$ 를 정의하면, 다음과 같은 상태방정식으로 변환된다.

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bf(t) + \Gamma \ddot{X}_0(t) \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

위 (2)식과 같이 본 연구에서는 외란으로써 지반에서 측정된 절대가속도를 사용하였으며, (3)식과 같은 시스템행렬, 제어기의 위치행렬등은 다음 장에서 논하는 시스템 식별과정으로부터 구하기로 하며, LQG 알고리즘을 적용한 능동제어 해석과 실험결과를 비교, 분석하고자 한다.

3. 시스템 식별(System Identification)

제어시스템 설계시 가장 중요한 요소중의 하나는 구조물의 수학적인 모델을 정확히 구하는 것이다. 그러한 수학적인 모델을 구하는 과정은 첫째, 입력과 출력으로부터 구조물의 전달함수를 측정하고 둘째, 측정된 전달함수를 라플라스 변수 s 로 표현된 분모, 분자의 다항식의 비로써 나타내고, 마지막으로 다항식의 비로써 표현된 전달함수를 상태방정식으로 표현하는 것이다.^{(1),(2)}

전달함수는 다음식 (4)와 같이 두개의 신호인 입력 $u(t)$ 와 출력 $y(t)$ 를 측정해서, 입력신호의 자기스펙트럼 밀도(autospectral density), S_{uu} 를 입력과 출력 두 신호의 교차스펙트럼 밀도(cross-spectral density), S_{uy} 로 나눈 것이다.

$$H_{yu}(j\omega) = \frac{S_{uy}(\omega)}{S_{uu}(\omega)} \quad (4)$$

그러나, 일반적으로 실험으로 구한 전달함수는 불연속 시간 데이터로부터 결정된다. 즉, 규정한 시스템의 입력과 출력에 대한 연속시간 이력은 일정시간동안 T 초 시간간격으로 A/D 변환기를 통해서 N 개씩 측정함으로써, $u(nT), y(nT)$ 로 표현되며($n = 1, 2, \dots, N$) 식(4)의 전달함수는 다음 식(5)와 같이 표현된다.

$$H_{yu}(jk\Omega) = \frac{S_{uy}(k\Omega)}{S_{uu}(k\Omega)} \quad (5)$$

위 (5)식에서, $k = 0, 1, \dots, N-1, \Omega = \omega_s/N, \omega_s =$ 샘플링 주파수이다.

실제로 (5)식과 같은 N 개의 샘플을 1회 측정된 결과는 (4)식의 전달함수를 정확히 묘사하지 못하기 때문에, 더 좋은 전달함수를 얻기 위해서는 동일한 N 개의 샘플을 여러 번 측정된 스펙트럼 밀도를 평균화하면 된다. 입력과 출력을 각각 M 회 측정했을 때의 스펙트럼 밀도와 평균화된 전달함수는 다음 식(6), (7)과 같다.

$$\bar{S}_{uu}(k\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_{uu}^i(k\Omega), \quad \bar{S}_{yy}(k\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_{yy}^i(k\Omega) \quad (6)$$

$$\bar{H}_{yu}(jk\Omega) = \frac{\bar{S}_{yy}(k\Omega)}{\bar{S}_{uu}(k\Omega)} \quad (7)$$

위 (6)식에서 S^i 는 i 번째 샘플 집합의 스펙트럼 밀도를 나타낸다.

본 연구에서는 그림 1.에서와 같은 1층 건물모델의 전달함수를 구하기 위하여 진동대 입력, $u(t)$, 으로 25Hz까지의 진동수 성분이 골고루 포함된 무작위 파를 사용했으며, 출력, $y(t)$, 는 건물모델 1층의 절대가속도응답을 측정하였다. 샘플링 간격 $T = 0.02$ 초로 하였으며, 측정횟수 $M = 20$ 회로 구한 전달함수는 다음 그림 2.와 같다.

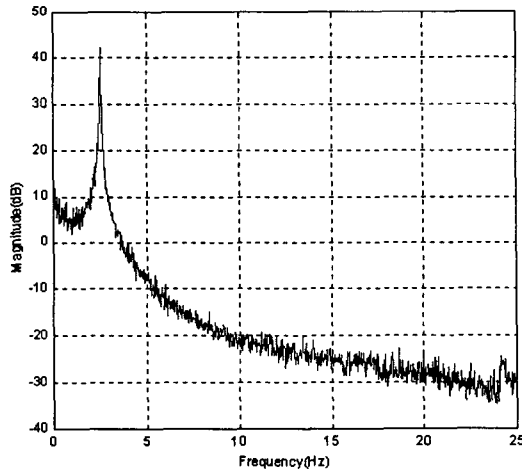
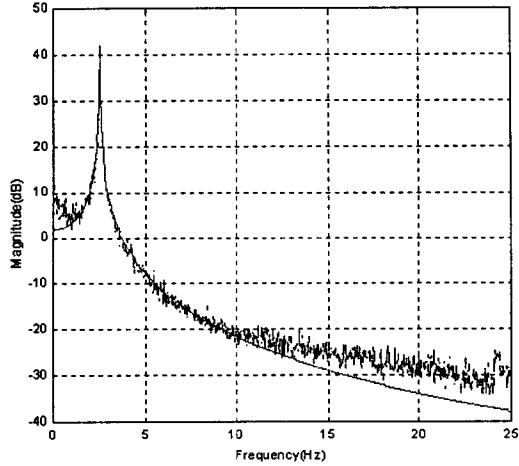


그림 2. 실험적으로 구한 건물모델의 전달함수

다음 그림 3.은 그림 2.에서 실험적으로 구한 전달함수를 다항식의 비인 수학식으로 나타내어 비교한 그림으로 실험으로 구한 건물모델의 전달함수가 식으로 표현이 잘되는 것을 확인할 수 있다.



해석(--), 실험(-)

그림 3. 전달함수 비교

다음 식(8)은 식으로 표현한 전달함수를 변환하여 1층 건물모델의 시스템행렬 즉, (3)식의 A 행렬을 의미한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -250.73 & -0.1768 \end{bmatrix} \quad (8)$$

4. LQG 제어가 설계

LQG 제어방법은 확정(deterministic)한 시스템에 대하여 최적추정 및 최적제어 이론을 이용한 보상기를 설계하여 출력 되먹임 제어시스템을 구성하는 것이다. 그림 4.의 구조에서 LQ 제어에서의 제어이득 행렬과 Kalman filter에서의 필터이득 행렬을 선정하여 제어를 설계하는 것이다.

(1) 최소값 원리를 이용한 LQR의 해

다음 (9)식과 같이 (2)식의 상태방정식에서 외란이 배제된 선형시스템과 2차의 성능지수를 고려한다.

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bf(t) \quad (9)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [z(t)^T Q z(t) + f(t)^T R f(t)] dt \quad (10)$$

(9)식은 건물의 상태변수 및 제어력의 가중치가 적용된 에너지의 합임을 알 수 있으며, LQR 문제는 상태벡터 $x(t)$ 와 제어력 $f(t)$ 에 대한 2차의 성능지수 J 를 최소화하는 최적제어 $f^*(t)$ 를 구하는 것이다. 위의 성능지수의 식에서 설계변수는 Q 와 R 이며, R 이 Q 에 비하여 상대적으로 크다면 제어에너지를 더욱 비중 있게 다루는 것으로써 이는 물리적으로 작은 모터, 작동기로 나타나게 된다. 반대로, Q 가 R 보다 더 크다면 상태변수에 비중을 둔다는 의미이다.

(9)식과 같은 상태방정식을 구속조건으로 하는 (10)식의 성능지수는 다음 (11)식과 같다.

$$J^* = \int_0^T [(z^T Q z + f^T R f) + \lambda^T (Az + Bf - \dot{z})] dt \quad (11)$$

위 (11)식에서 λ^T 는 Lagrangian multiplier matrix 이다. 변분법의 원리⁽⁷⁾를 적용하여 유도된 대수 Riccati 방정식은 다음과 같으며,

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (12)$$

위 방정식에서 P 를 구하여 제어이득 $K = R^{-1}B^T P$ 인 관계를 이용하여 제어력 f 를 계산한다.

$$f = -Kz \quad (13)$$

(2) Kalman filter

앞에서 언급한 바와 같이 제어대상의 상태변수를 추정하는 수학적인 모델을 관측기라고 하는데, 관측기에 입력되는 정보는 제어대상으로부터 측정된 값이며, 관측기로부터 출력되는 정보는 상태추정값 이라 하여 상태변수와 구분한다. 이러한 관측기는 D. Luenverger 에 의해 최초로 제시되었는데, 최적 추정 문제 즉, Kalman filter 는 잡음이 포함된 측정값으로부터 시스템과 잡음의 통계적 특성에 대한 특정한 가정하에 상태변수와 상태추정값 사이의 오차를 최소화하도록 필터이득을 구함으로써 최상의 상태를 추정하는 것이다.

본 연구에서는 건물모델의 응답을 측정시 가속도계를 사용하였으므로, 출력방정식은 다음과 같다.

$$y(t) = Cz(t) + Df(t) + v(t) \quad (14)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}, \quad D = -\frac{1}{M}, \quad v(t) = \text{센서측정잡음} \quad (15)$$

Kalman filter의 해를 구하기 위해서는 다음 식과 같은 확률적인 가정사항들 즉, 외란 $\ddot{X}_0(t)$ 과 센서 측정잡음 $v(t)$ 의 평균은 각각 0이며, 둘은 서로 비상관이고, 양쪽 모두가 각각 분산 Q_0, R_0 를 가지는 백색 Gaussian이다.⁽⁴⁾

$\hat{z}(t)$ 가 상태변수 $z(t)$ 의 추정값이라면, (2)식의 상태방정식과 (14)식의 출력방정식을 고려한 Kalman filter 식은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) + Bf(t) + L[y(t) - C\hat{z}(t) - Df(t)] \quad (16)$$

위 식에서 L은 필터게인을 나타낸다.

(2), (16)식으로부터 관측기의 오차 방정식, $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$,는 다음과 같다.

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (A - LC)\tilde{z}(t) + \Gamma\ddot{X}_0(t) - Lv(t) \quad (17)$$

위의 오차방정식을 최소화시킬 성능지수는 다음 식과 같이 주어진다.

$$J_0 = E[\tilde{z}^T(t) \cdot \tilde{z}(t)] = \text{오차분산} \quad (18)$$

앞에서 규정한 확률적인 가정하에서, 위의 성능지수를 최소화시키는 최적 필터게인행렬은

$$L = GC^T R_0^{-1} \quad (19)$$

이며, G는 다음과 같은 대수 Riccati 방정식의 해가 된다.

$$AG + GA^T + \Gamma Q_0 \Gamma^T - GC^T R_0^{-1} CG = 0 \quad (20)$$

(3) LQG 알고리즘

LQG 보상기는 그림 4.에서와 같이 (1)절의 LQR 이론과 (2)절의 Kalman filter를 결합한 것이다. 즉, 확률적인 가정하에서 (2)식의 상태방정식과 (14)식의 출력방정식으로 표현된 확률 선형 시불변 시스템에 대하여 Kalman filter와 같은 구조를 가지는 LQG 보상기는 확률입력 $\ddot{X}_0(t)$, $v(t)$ 에 대한 (18)식과 같은 성능지수 J_0 가 최소가 되도록 하는 최적 상태추정벡터 $\hat{z}(t)$ 를 추정하며, LQR을 통해 이득행렬 K를 구한 뒤 이 둘을 결합하는 것이다.⁽⁸⁾ 그러므로,

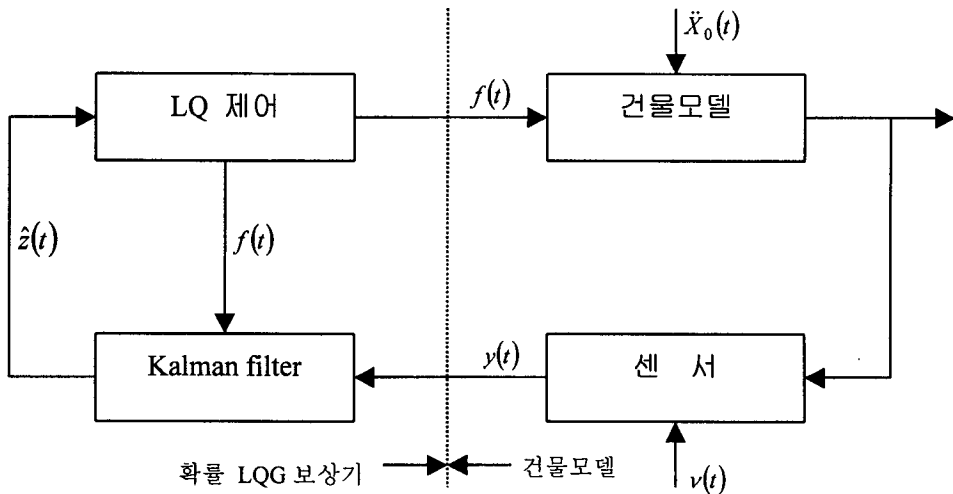
본 연구에서 사용하는 Kalman filter 식(16)은 다음 (21)식과 같이 표현되며,

$$\dot{\hat{z}}(t) = [A - BK - LC + LDK]\hat{z}(t) + Ly(t) \quad (21)$$

(13)식의 제어력은 다음 (22)식과 같이 표현된다.

$$f = -K\hat{z}(t) \quad (22)$$

이상과 같은 LQG의 개략적인 구조를 살펴보면 다음과 같다.⁷⁾



$\ddot{X}_0(t)$ =외란, $v(t)$ =센서측정잡음, $y(t)$ =출력벡터, $\hat{z}(t)$ =상태추정벡터, $f(t)$ =제어력벡터

그림 4. LQG 제어시스템의 구조

5. 해석 및 실험결과

본 연구에서는 4장에서 논한 LQG 제어를 설계하기 위해서 해석프로그램으로 Matlab⁹⁾을 사용하였으며, LQG 제어 알고리즘을 실험적으로 구현하기 위해서 LabView¹⁰⁾ 제어 프로그램을 이용하였다.

우선 실험적으로 구현한 Kalman filter가 시스템의 상태를 잘 추정하는가를 알아보기 위해서 제어력이 없을 때를 해석과 실험결과를 비교하였다.

Kalman filter 게인 L을 얻기 위해서는 외란 $\ddot{X}_0(t)$ 과 센서측정잡음 $v(t)$ 를 알아야 하기 때

문에, 다음 그림 5.와 같이 진동대에 설치한 가속도계에서 측정된 값과 슬래브에 설치한 가속도계의 센서잡음을 matlab 해석시 이용하였다.

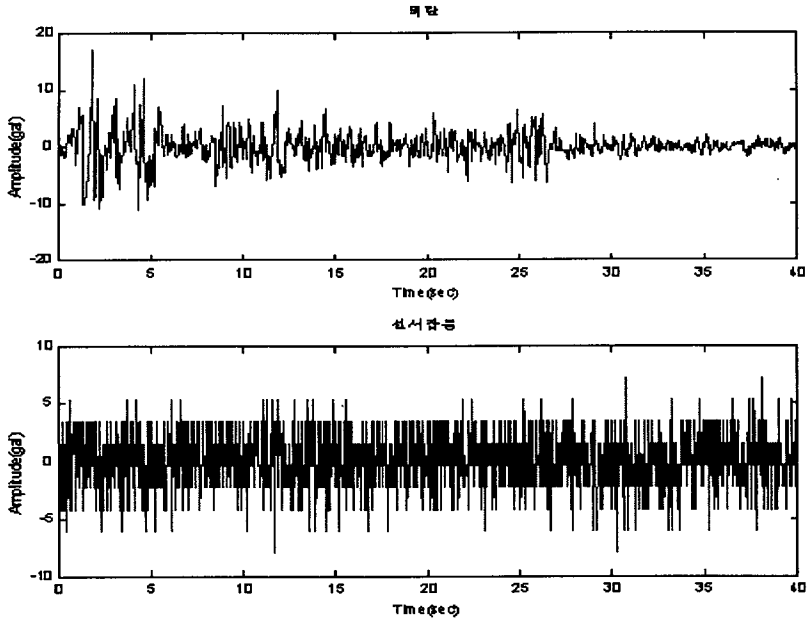


그림 5. 외란과 센서측정잡음

위의 그림 5.와 같은 외란과 센서측정잡음의 분산은 각각 6.191 과 5.2662 였으며, 이로부터 구한 Kalman filter 계인행렬은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} -0.0616 \\ -0.4750 \end{bmatrix} \quad (24)$$

(24)식과 같은 Kalman filter 계인행렬을 이용하여 해석한 상태추정변수(상대변위와 상대속도)는 다음 그림 6.과 같다.

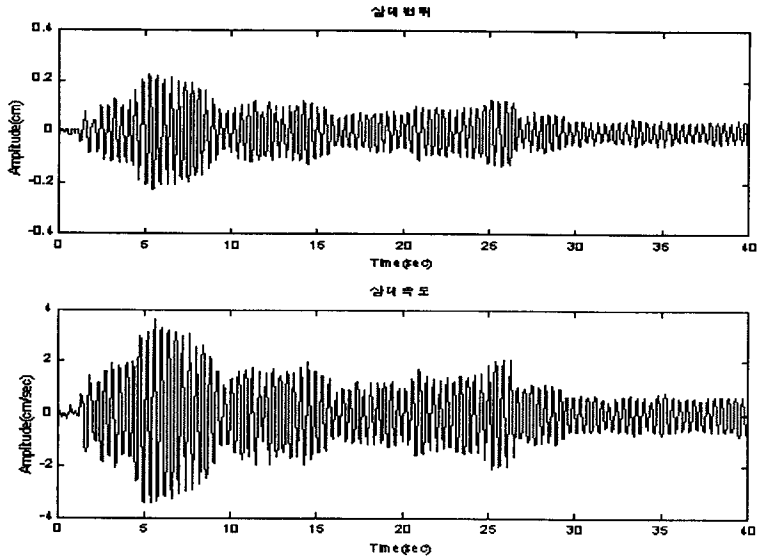


그림 6. matlab 로 해석한 상태추정변수

다음 그림 7.은 (24)식과 같은 Kalman filter 게인행렬을 제어프로그램인 LabView 에 반영함으로써, 실험적으로 측정된 상태추정변수이다.

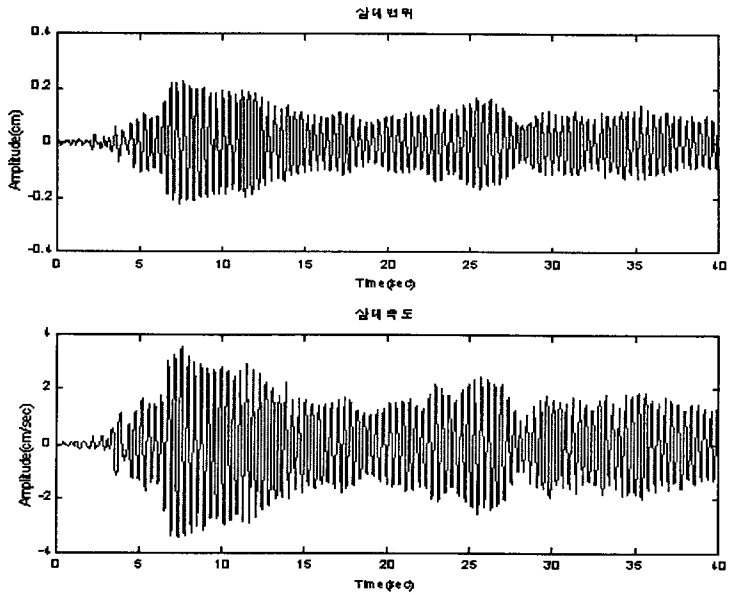


그림 7. 실험으로 측정된 상태추정변수

위의 그림 6.과 7.을 비교해보면 해석결과 실험결과가 정확히 일치하지 않는 것을 알 수 있는데 이는 모델링에서의 오차, 확률적인 가정사항들의 오차, 실험에 사용된 장비들의 예측할 수 없는 잡음등에 기인한 것으로 판단된다.

LQG 제어기를 실험으로 구현시 (24)식과 같은 Kalman filter 게인행렬외에 필요한 행렬이 (22)식과 같은 제어게인 행렬이다.

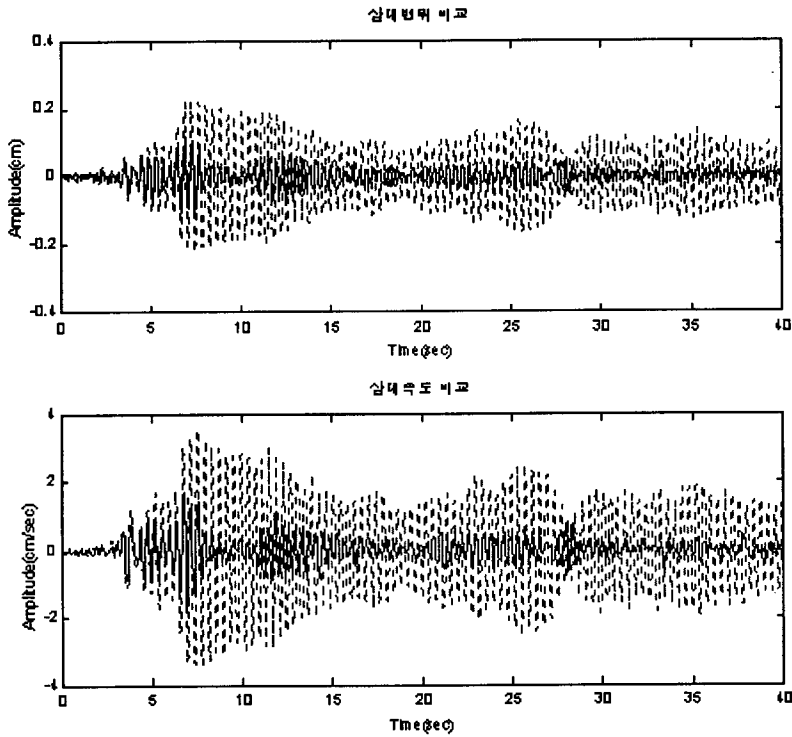
본 연구에서는 제어게인 행렬인 K를 구하기 위해서, 설계변수인 Q와 R을 각각 다음 식으로 하였다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 100 \quad (25)$$

위의 설계변수에 의한 제어게인 행렬은 다음과 같다.

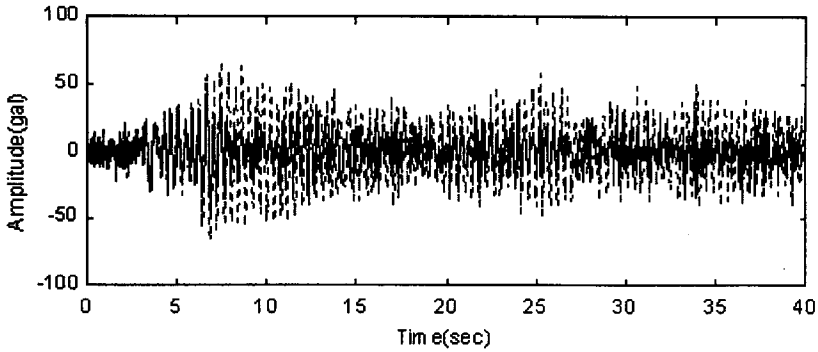
$$K = [-0.0007 \quad -0.0952] \quad (26)$$

따라서, (24)식의 게인 L과 (26)식의 게인 K를 실험에 반영한 LQG 제어기의 제어결과는 다음과 같다.



비제어(--) 제어(-)

그림 8. 상태변수 비교



비제어(--) 제어(-)
 그림 9. 절대가속도 비교

위의 그림 8. 9.를 보면 절대가속도 보다는 상태변수의 제어효과가 더 우수한 것을 시각적으로 확인할 수 있는데, 이는 (10)식에서와 같이 성능지수에 출력벡터 $y(t)$ 가 아닌 상태벡터 $z(t)$ 를 성능지수로 삼았기 때문이다.

6. 결 론

1 층에 설치된 가속도계 센서로부터 건물의 절대가속도 응답을 측정하여, 이를 Kalman filter 에 입력하고 상태변수를 추정하여 제어를 하는 LQG 알고리즘을 실험적으로 적용하고 이를 해석과 비교하였다. 이에 따른 결론은 다음과 같다.

실험으로 측정한 건물모델의 전달함수를 해석과 비교하여 건물모델의 시스템 행렬을 수식화 하였다. 두 결과를 비교해 봤을 때, 상당히 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

실험적으로 추정한 상태변수가 해석적으로 추정한 상태변수와 비교해 보았을 때, 신호의 전체적인 모양이나 크기가 유사하다는 점으로부터, 본 연구에서 제안한 슬래브에 설치한 센서의 측정잡음과 진동대에 설치한 가속도계 측정값을 외란으로 규정하여 게인 L 을 산출하는 방법이 어느 정도 정확한 것을 알 수 있다. 그러나, 두 결과가 완전히 일치하지 않는 것은 제어력과 구조물의 상호작용을 무시한데 따른 오차, 실험장비에서의 잡음에 의한 오차에 따른 것으로 판단된다.

본 실험에 사용된 액추에이터의 성능을 고려하여 설계변수인 Q, R 을 조정함으로써 게인 K 를 산정하였으며, 상태변수와 제어력을 성능지수로 삼은데 따른 결과로 인하여 절대가속도 보다는 상태변수의 제어효과가 더 우수한 것을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 STEPI 의 지진대응 기술개발과제의 소과제 일부로 수행되었으며, 과학기술부 및 유니슨산업(주)의 연구비 지원에 대해서 감사드립니다.

7. 참고문헌

- (1) S.J. Dyke, B.F. Spencer, Jr., P. Quast, D.C. Kaspari Jr., and M.K. Sain (1995), "Implementation an AMD Using Acceleration Feedback Control", *Microcomputers in Civil Engineering : Special Issue on Active and Hybrid Structural Control*, to appear
- (2) S.J. Dyke, B.F. Spencer, Jr., P. Quast, M.K. Sain and D.C. Kaspari, Jr., and T.T. Soong (1994), "Experimental Verification of Acceleration Feedback Control Strategies for an Active Tendon System", *Nat. Center for Earthquake Engrg. Res., Tech. Report NCEER-94-0024*
- (3) B. Shahian, M. hassul (1993), "Control System Design using Matlab", Prentice-Hall Inc., pp. 379~394
- (4) 김종식 (1998), "선형 제어시스템 공학", 청문각, pp. 454~495
- (5) 민경원, 김두훈, 이성경, 황재승 (1998), "능동 제어장치를 이용한 건물의 진동제어 (I): 시스템 설계", 한국지진공학회 논문집, 제 2 권 제 4 호 (통권 제 8 호), pp. 87~94
- (6) 민경원, 김두훈, 이성경, 황재승 (1998), "능동 제어장치를 이용한 건물의 진동제어 (II): 진동대 실험", 한국지진공학회 논문집, 제 2 권 제 4 호 (통권 제 8 호), pp. 95~101
- (7) D.N. Burghes, A. Graham (1980), "Introduction to Control Theory, Including Optimal Control", John Wiley & Sons, pp. 233~240
- (8) 이규석 (1997), "LQG/LTR 기법을 이용한 2 차원 구조물 플러터의 능동제어", 서울대학교 대학원 토목공학과 공학석사학위논문
- (9) MathWorks Inc. (1992), "MATLAB for Windows User's Guide", MathWorks
- (10) Lisa K. Wells (1995), "LabVIEW-Student Edition User's Guide", Prentice Hall