

다층 구조물내의 탄성과 전파해석

An Analysis of Elastic Wave Propagation in Multilayered Media

김현실*, 김재승*, 강현주*, 김상렬*

Hyun-Sil Kim, Jae-Seung Kim, Hyun-Joo Kang, and Sang-Ryul Kim

ABSTRACT

Elastic wave propagation in a multilayered elastic half-plane is studied by using the Cagniard-de Hoop method. After the unknowns are expressed in terms of the reflection and transmission coefficients in the integral-transformed domains, they are assembled to form the global matrix equation. The inverse Laplace transform of each term is done by applying the Cagniard-de Hoop method. As a numerical example, a four-layered half-plane is considered, where a point source is applied to the first layer. The method described in the present study can be used in checking other numerical methods such as FDM.

1. 서론

지층이나 해양같은 매질은 수직방향으로 재질 및 음향학적 특성이 변하는 불균일재질로 모델링할 수 있는데 이러한 다층구조매질(multilayered media)에서의 지진파(탄성과 및 음향파)전파는 실제 지진파해석 모델로 널리 사용되며 수치적인 접근이 불가피한 복잡한 경우와 달리 해석적인 접근이 가능하므로 많은 연구가 수행되어 왔다. 다층 모델은 대륙과 해양이 접하거나 또는 지층의 용기로 인해 수평거리에 따라 급격히 물성치가 변하는 구조에는 적합치 않으나 대체로 수백 km 범위 내에서는 수평방향으로 균등하며 수직으로만 물성치가 변하는 매질로 볼 수 있으며 지각 상층부의 지진파해석 모델로 유용하다. 지층은 더 좁게 보면 이방성재질(anisotropic medium)이나 아직까지 이방성재질은 물성치에 관련되는 계수가 너무 많아 지진파해석 모델로 널리 활용되고 있지는 않는 실정이다.

다층 매질 중 가장 단순한 경우로 반무한 공간(또는 평면)의 형태를 갖는 두 개의 서로 다른 매질이 평면을 따라 접한 경우를 꼽을 수 있으며 Ewing 등[1]의 초기 연구는 주로 여러 매질의 결합에 대해 주어진 입사파에 대한 반사와 투과계수를 다루었다. 시간영역에 대해서 과도응답(transient response)을 구하기 위해서는 주로 적분변환(integral transform)방법이 사용되는데 복잡

* 한국기계연구원 음향연구그룹

한 문제의 경우 Laplace 역변환을 구할 때 복소수 평면에서 적분구간을 적절하게 변형하는 Cagniard-de Hoop 방법[2]이 유용하게 활용된다.

2개 이상의 층이 연결된 경우 중간에는 두께가 유한한 층의 존재로 인해 지진파는 수많은 반사와 투과를 반복하여 해를 구하는 과정은 매우 복잡하게 된다. 실제 지진파의 시뮬레이션 연구 [2]에는 크게 일반화된 음선방법(generalized ray method)과 반사법(reflectivity method)이 사용되고 있다. 두 가지 방법 모두 깊이변화에 따른 밀도와, P파 및 S파의 전파속도의 차이에 근거하여 지표층을 수십 또는 수백 개의 적층구조로 모델링한 후 특정위치에 가상 지진원을 입력하고 지진원으로부터 수십에서 수백 km 떨어진 곳에서 전파되어온 지진파를 해석한다. 일반화된 음선방법은 Cagniard-de Hoop 방법을 다층 구조에 확장하여 적용한 개념으로 기본 아이디어는 가진점에서 계측점까지 전파하는 음선 경로를 파악하고 계측점에서의 반응(변위 또는 응력)은 해당되는 모든 음선의 합으로 나타낸다. 가장 큰 에너지를 갖는 경로는 가진원과 계측점이 동일 층내에 위치하여 반사없이 직접 전파하는 것으로 일반적으로 반사/투과가 많을수록 에너지는 점점 감소한다. 적층 수가 많은 경우 음선(ray)의 수와 이에 관련된 반사 및 투과횟수가 대단히 많아 실제 해석에서 이를 모두 고려하기는 불가능하므로 해석결과에 큰 영향을 주는 주요 음선(또는 주요 모드)만 고려하며 나머지는 무시하는 것이 보통이다[3,4].

본 논문에서는 여러 개의 탄성층으로 구성된 지층모델에서 포인트 하중이 작용할 때 탄성파의 전파를 일반화된 음선방법의 개념을 이용하여 해석하였다. 모든 음선을 고려하여 엄밀해를 유도하였으며 주어진 시간에 대해 포함되는 음선을 찾기위한 방법을 고안하였다.

2. 지배방정식

본 논문에서는 Fig. 1과 같이 물성치가 다른 탄성층이 N개 적층된 구조에서 2차원 평면파의 전파를 고려하였는데 3차원 문제도 해석의 본질적인 점은 동일하며 약간의 복잡성만 추가된다. 마지막 N번째 층은 반 무한 층이며 표면 ($z = z_1 = 0$)은 공기에 노출된 상태인데 공기의 밀도가 암석의 밀도보다 매우 작으므로 진공으로 간주하였다. 지진원은 임의의 위치에 있을 수 있는데 편의상 처음 층에 있으며 좌표는 $(x = 0, z = z_0)$ 라고 하였다.

n번째 층 ($z_n < z < z_{n+1}$)의 밀도와 Lamé의 상수는 각각 ρ_n, λ_n, μ_n 으로 주어지며 수평과 수직 방향의 변위를 각각 v_n, w_n 이라고 하면 n번째 층에서의 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \rho_n \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} &= (\lambda_n + 2\mu_n) \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial z} \right) + \mu_n \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial z} \right) + \rho_n L_x^n(x, z, t) \delta_{1n} \\ \rho_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} &= (\lambda_n + 2\mu_n) \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial z} \right) + \mu_n \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial z} \right) + \rho_n L_z^n(x, z, t) \delta_{1n} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 δ_{1n} 은 Kronecker delta 함수를 나타내며 가진원 L_x^n, L_z^n 은 첫번째 층에만 작용하는 포인트하중으로 시간에 대해서는 각각 $f_x(t), f_z(t)$ 로 주어진다.

$$L_x^1(x, z, t) = \delta(x)\delta(z - z_0)f_x(t)$$

$$L_z^1(x, z, t) = \delta(x)\delta(z - z_0)f_z(t)$$

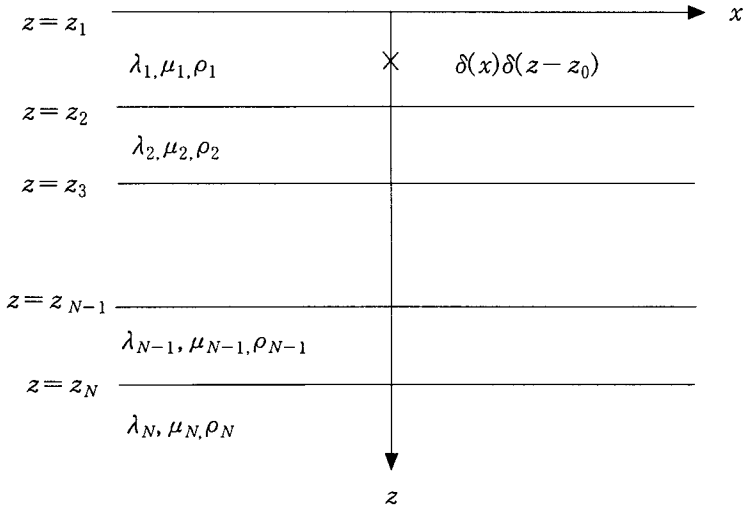


Fig. 1 Multi-layered elastic half-plane

Laplace 및 Fourier 변환을 다음과 같이 정의한다.

$$V(x, z, s) = \int_0^\infty e^{-st} v(x, z, t) dt, \quad V^*(x, z, s) = \int_0^\infty e^{-i\xi x} V(x, z, s) dx$$

여기서 Fourier 변수를 $\xi = isp$ 로 바꾸는 것이 편리하며 이는 후에 Cagniard-de Hoop 방법을 적용하기 위한 것으로 p 는 "horizontal slowness"를 나타낸다. 식 (1)의 지배방정식에서 시간에 대해서는 Laplace 변환을, x 축에 대해서는 Fourier 변환을 적용하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\beta_n^2 \frac{d^2 V_n^*}{dz^2} + (s^2 p^2 \alpha_n^2 - s^2) V_n^* - sp(\alpha_n^2 - \beta_n^2) \frac{d W_n^*}{dz} = -\delta(z - z_0) F_x(s) \delta_{1n}, \quad (2)$$

$$\alpha_n^2 \frac{d^2 W_n^*}{dz^2} + (s^2 p^2 \beta_n^2 - s^2) W_n^* - sp(\alpha_n^2 - \beta_n^2) \frac{d V_n^*}{dz} = -\delta(z - z_0) F_z(s) \delta_{1n},$$

여기서 α_n, β_n 은 n 번째 층의 P파와 S파의 전파속도로 다음과 같이 정의되며

$$\alpha_n^2 = (\lambda_n + 2\mu_n)/\rho_n, \quad \beta_n^2 = \mu_n/\rho_n$$

함수 $F_x(s), F_z(s)$ 는 $f_x(t), f_z(t)$ 의 Laplace 변환된 값이다.

식 (2)의 해는 가진점이 있는 $n=1$ 인 경우와 반무한 평면인 $n=N$ 을 제외하고는 각 층내에서 다음과 같이 위와 아래로 전파하는 P파와 S파 4개의 항으로 구성되어 있다.

$$\exp(-\eta_a^n z), \exp(\eta_a^n z), \exp(-\eta_\beta^n z), \exp(\eta_\beta^n z)$$

여기서

$$\eta_\alpha^n = \sqrt{-p^2 + 1/\alpha_n^2}, \quad \eta_\beta^n = \sqrt{-p^2 + 1/\beta_n^2}$$

식 (2)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_n^* \\ W_n^* \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} p & \eta_\beta^n \\ -\eta_\alpha^n & p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_\alpha^n e^{-s\eta_\alpha^n(z_{n+1}-z)} \\ U_\beta^n e^{-s\eta_\beta^n(z_{n+1}-z)} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} p & \eta_\beta^n \\ \eta_\alpha^n & -p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_\alpha^n e^{-s\eta_\alpha^n(z-z_n)} \\ D_\beta^n e^{-s\eta_\beta^n(z-z_n)} \end{pmatrix}, \quad n=1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 U_α^n, U_β^n 는 위(Up)로 전파하는 P파와 S파, D_α^n, D_β^n 는 아래(Down)로 전파하는 P파와 S파를 나타낸다. 마지막 층($n=N$)은 두께가 무한하므로 아래에서 다시 반사되어 돌아오는 파가 없다. 첫번째 층($n=1$)에서는 식 (3)에 보인 해 외에도 가진항에 의한 해가 추가되며 가진점에서 직접 전파되는 항을 나타낸다. 직접파를 구하기 위해서 무한한 평면이라고 가정하고 식 (2)에서 z 축에 대해 Fourier 변환을 적용하면 구할수 있다.

각 층마다 4개의 미지수 U_α^n, U_β^n 및 D_α^n, D_β^n 가 있으며 경계조건에서 결정한다. 진공에 노출된 평면 $z=0$ 에서는 응력 $\sigma_{xz}^1, \sigma_{zz}^1$ 가 제로가 된다.

$$\sigma_{xz}^1 = \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) = 0, \quad \sigma_{zz}^1 = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial w_1}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

($n-1$)번째와 n 번째 층을 생각하면 경계면 $z=z_n$ 에서는 변위와 응력이 같아야 한다.

$$v_{n-1} = v_n, \quad w_{n-1} = w_n, \quad \sigma_{xz}^{n-1} = \sigma_{xz}^n, \quad \sigma_{zz}^{n-1} = \sigma_{zz}^n$$

자유평면에서의 경계조건은 다음과 같이 2개의 식이 얻어지며

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & 2ip\eta_\beta^1 \\ 2ip\eta_\alpha^1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_\alpha^1 \\ D_\beta^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_1 & -2ip\eta_\beta^1 \\ 2ip\eta_\alpha^1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_\alpha^1 \epsilon_\alpha^1 + G_\alpha e^{-s\eta_\alpha^1 z_0} \\ U_\beta^1 \epsilon_\beta^1 + G_\beta e^{-s\eta_\beta^1 z_0} \end{pmatrix} \quad (4)$$

경계면 $z=z_n$ 에서는 4개의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} ip & \eta_\beta^{n-1} & -ip & -\eta_\beta^n \\ \eta_\alpha^{n-1} & ip & \eta_\alpha^n & ip \\ \delta_{n-1} & 2ip\eta_\beta^{n-1} & -r_n\delta_n & -2ir_n p\eta_\beta^n \\ 2ip\eta_\alpha^{n-1} & \delta_{n-1} & 2ir_n p\eta_\alpha^n & r_n\delta_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_\alpha^{n-1} \\ U_\beta^{n-1} \\ D_\alpha^n \\ D_\beta^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -ip & -\eta_\beta^{n-1} & ip & \eta_\beta^n \\ \eta_\alpha^{n-1} & ip & \eta_\alpha^n & ip \\ -\delta_{n-1} & -2ip\eta_\beta^{n-1} & r_n\delta_n & 2ir_n p\eta_\beta^n \\ 2ip\eta_\alpha^{n-1} & \delta_{n-1} & 2ir_n p\eta_\alpha^n & r_n\delta_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_\alpha^{n-1} \epsilon_\alpha^{n-1} \\ D_\beta^{n-1} \epsilon_\beta^{n-1} \\ D_\alpha^n \epsilon_\alpha^n \\ D_\beta^n \epsilon_\beta^n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\delta_n = -2p^2 + 1/\beta_n^2, \quad r_n = (\rho_n/\rho_{n-1})(\beta_n/\beta_{n-1})^2$$

$$\epsilon_\alpha^n = e^{-s\eta_\alpha^n(z_{n+1}-z_n)}, \quad \epsilon_\beta^n = e^{-s\eta_\beta^n(z_{n+1}-z_n)}$$

식 (4), (5)를 모든 층에 대해 종합하여 이를 변형하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있는데

$$[\mathbf{I} - \mathbf{Q}]\vec{Q} = \vec{F} \quad (6)$$

여기서 벡터 \vec{Q} 는 미지수 항을 나타내며

$$\vec{Q} = \{D_\alpha^1 D_\beta^1 U_\alpha^1 U_\beta^1 D_\alpha^2 D_\beta^2 \dots D_\alpha^N D_\beta^N\}^T$$

매트릭스 \mathbf{Q} 는 반사 및 투과계수를 나타내며 $\eta_\alpha^n, \eta_\beta^n$ 등의 함수로 표현되며 벡터 \vec{F} 는 가진항을 나타낸다. 식 (6)의 해는 다음과 같이 무한 급수의 합으로 구해진다.

$$\vec{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \vec{F} \quad (7)$$

예로써 4개 적층구조의 경우 두 번째 층의 아래로 전파하는 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{D}^2 = T_{DD}^2 \vec{F}_D + T_{DD}^2 \Gamma^1 R_{UD}^1 \vec{F}_U + T_{DD}^2 \Gamma^1 R_{UD}^1 \Gamma^1 R_{DU}^2 \vec{F}_D$$

$$+ R_{UD}^2 \Gamma^2 R_{DU}^3 \Gamma^2 T_{DD}^2 \vec{F}_D + \dots \quad (8)$$

여기서, $\vec{D}^n = \{D_\alpha^n D_\beta^n\}^T$ 이며 T_{DD}^2, R_{UD}^2 등은 투과 및 반사계수 매트릭스를 나타낸다.

역 Laplace 변환(Inverse Laplace Transform)

식 (8)에 주어진 것과 같이 변환된 공간에서의 변위는 무한 급수 형태로 주어지고 각 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{s} R_k(p) e^{-sg_k(p)} \quad (9)$$

여기서 $R_k(p)$ 는 반사 및 투과계수의 곱으로 주어지며 $g_k(p)$ 는 지수항의 누적항을 나타낸다. $R_k(p)$ 와 $g_k(p)$ 는 각 층의 음속, 밀도 등 물리적 성질의 함수이며 $g_k(p)$ 는 또한 지진원과 계측점 등 기하학적인 요소의 함수이나 중요한 점은 변수 s 와는 무관하다는 점으로 이와같은 s 와 p 의 분리는 Cagniard-de Hoop 방법의 적용에 중요한 관건이 된다. 식 (9)에서 $1/s$ 항은 가진원 항에 의해 주어진다. 식 (9)의 역 Fourier 변환을 J_k 라고 하면 정의에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} R_k(p) e^{-sg_k(p) + ix\xi} d\xi = \frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{s} R_k(p) e^{-sg_k(p) + xp} dp$$

여기서 임시로 $F_x = F_z = 1$ 로 가정한다.

일반적으로 함수 $g_k(p)$ 는 다음과 같은 형으로 주어진다.

$$g_k(p) = \sum_n b_n \sqrt{-p^2 + 1/c_n^2}, \quad b_n > 0$$

여기서 c_n 은 n번째 층의 P파 또는 S파의 전파속도이다. Cagniard-de Hoop 방법을 적용하기 위해서 적분경로를 다음과 같이 변형한다.

$$\sum_n b_n \sqrt{-p^2 + 1/c_n^2} + xp = t \tag{10}$$

단, t 는 실수값이다. 주어진 t 와 위치 x 에 대해 복소수변수 p 는 식 (10)에서 수치적으로 구하여야 한다. 적분함수 $R_k(p)$ 의 실수축에 대한 대칭성을 이용하여 크기는 2배로 하고 허수부분만 취하면 다음과 같이 된다.

$$J_k(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{t_m}^{\infty} R_k(p(t)) \frac{\partial p}{\partial t} e^{-st} dt \tag{11}$$

정의에 의해서 Laplace 역변환은 다음과 같이 주어진다.

$$j_k(t) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[R_k(p(t)) \frac{\partial p}{\partial t} \right] H(t - t_m) \tag{12}$$

여기서 $H(t)$ 는 Heaviside 스텝함수를 나타낸다. 만일 가진원의 시간 함수가

$$f_1(t) = f_2(t) = f(t)$$

라면 시간에 대한 컨볼루션 적분을 수행해야 하며 포함되는 모든 경우의 전파경로를 고려해야 한다.

$$\sum_k \int_{t_m}^t f(t - \tau) j_k(\tau) d\tau$$

식 (12)에서 미분항 $\partial p / \partial t$ 는 $t = t_m$ 에서 특이성(singularity)을 보이므로 변수를 다음과 같이 변환하여 특이성을 제거한다.

$$\tau^2 = t_m^2 \cos^2 \phi + t^2 \sin^2 \phi, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \phi} = (t^2 - t_m^2) \cos \phi \sin \phi / \tau$$

최종적으로 변위는 다음과 같이 된다(자세한 과정은 참고문헌[5] 참조).

$$\sum_k \int_0^{\pi/2} f(t - \tau(\phi)) j_k(\tau(\phi)) \frac{\partial \tau}{\partial \phi} d\phi$$

3. 수치해석 예

수치해석 예로 표 1과 같이 4개의 층으로 구성된 모델을 고려하였다.

Table 1. Parameters of the four-layered model

Depth	밀도 $\rho(\text{kg/m}^3)$	P파 속도 $\alpha(\text{m/s})$	S파 속도 $\beta(\text{m/s})$
2100 m > z > 0	2100	3200	1700
6500 m > z > 2100 m	2500	6000	3100
9900 m > z > 6500 m	2700	7000	3800
$\infty > z > 9900$ m	3200	8000	4200

지진원과 관측점의 위치는 $x_0=0$, $z_0=500$ m, $x=10$ km, $z=4500$ m이며 지진원으로는 표준 모델로 사용되는 Ricker의 웨이브렛(wavelet)을 사용하였다.

$$f_x(t) = f_z(t) = \cos(\pi f_c(t-t_c)) e^{-f_c^2(t-t_c)^2/2} \text{ m/s}^2 \quad (13)$$

단, 차단주파수(cut-off frequency) f_c 는 50 Hz, 시간지연 t_c 는 0.06 sec로 잡았다. Fig. 2에는 관측 점에서 0.4 sec까지 수평과 수직방향의 변위를 각각 실선과 점선으로 나타냈다. 시간이 커질수록 많은 음선이 필요한데 본 수치해석에는 반사/투과횟수를 해석시간 0.4 sec까지 포함되는 $k=8$ 까지 잡았다. 주어진 시간에 따라 사전에 얼마나 많은 급수(또는 음선수)가 필요한지 파악하기 위해 시간 t_{\max} 가 정해지면 반사/투과횟수 k 를 증가시키며 시간 t_m 을 식 (10)에서 계산하여 $t_m < t_{\max}$ 만족여부를 확인하고 k 를 증가시킨다.

4. 검토 및 결론

본 논문에서는 지진원은 첫 번째 층에 있다고 가정하였으나 임의의 층에 작용하는 지진원이나 여러 층에 함께 작용하는 다중 지진원 등 일반적인 경우에도 용이하게 확장할 수 있다. 본 논문의 목적은 적층 수가 대단히 많은 복잡한 경우에 대해 실제 지진파를 잘 설명할 수 있는 최적의 해를 찾기보다는 몇 개의 층으로 구성된 비교적 단순한 모델에 대해 엄밀해를 제시함으로써 단순 모델로 설명할 수 있는 지진파문제의 해석외에 FDM 등 다른 수치해석방법의 검증용으로도 활용할 수 있는 수단을 제공하는데 있다.

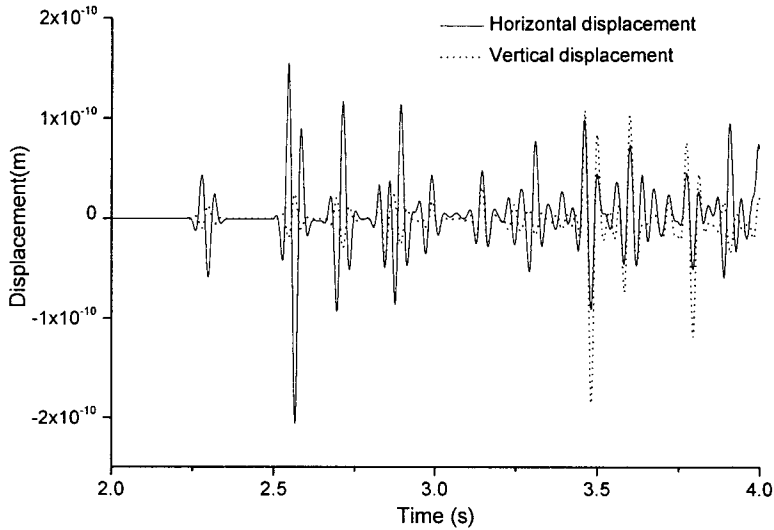


Fig. 2 Displacements at the receiver point.

후 기

본 연구는 과학기술부에서 지원한 기관고유 연구사업의 일환으로 수행된 것임을 밝힌다.

참 고 문 헌

1. K. Aki and P. G. Richards (1980), "Quantitative Seismology, Theory and Methods", Volume I, W. H. Freeman and Co.
2. W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, and F. Press (1957), "Elastic Waves in Layered Media", McGraw-Hill, New York.
3. D. V. Helmberger (1968), "The crust-mantle transition in the Bering sea", Bull. Seismol. Soc. Am. Vol. 58, pp. 179-214.
4. R. A. Wiggins, and D. V. Helmberger (1974), "Synthetic seismogram computation by extension in generalized rays", Geophys. J. R. astr. Soc. Vol. 37, pp. 73-90.
5. 김재승외(1998), "구조물 안전성 확보기술개발", 제 2장 지진파의 전파해석, 한국기계연구원, UCN0610-646.M.