

셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 설계를 위한 새로운 방법론

김혜연, 박연목, 박주영, 이성환

고려대학교 컴퓨터학과/인공시각연구센터

A New Methodology to Design of Cellular Neural Network-based Associative Memories

Hye-Yeon Kim, Yonmook Park, Jooyoung Park and Seong-Whan Lee

Dept. of Computer Science and Engineering/Center for Artificial Vision Research, Korea University

요약

본 논문에서는 연상 메모리 기능을 수행하는 셀룰라 신경망(Cellular Neural Network)의 설계를 위한 새로운 방법론을 제안한다. 먼저, 셀룰라 신경망 모델의 기본적인 특성들을 소개한 후, 최적 성능을 가지고 이진 원형 패턴들을 저장할 수 있는 셀룰라 신경망 모델의 설계 방법을 제약 조건이 가해진 최적화 문제로 공식화한다. 다음으로 이 문제의 제약 조건을 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequalities)을 포함하는 부등식의 형태로 변환시킬 수 있음을 관찰한다. 마지막으로 셀룰라 신경망 최적 설계 문제를 내부점 방법(interior point method)에 의해 효율적으로 풀릴 수 있는 일반화된 고유값 문제(Generalized Eigen Value Problem)로 변환하고 설계 예제를 통해 제안된 방법의 유효성을 검증한다.

1. 서론

최근 들어 셀룰라 신경망 모델은 연상 메모리, 영상 처리, 패턴 인식 등 다양한 분야에서 관심을 끌고 있다[1]. 1988년 Chua와 Yang에 의해 처음 소개된 셀룰라 신경망은 이웃 셀들과만 연결된 셀들로 구성된 폐환 신경망(feedback neural network)의 일종으로[2] 국소 상호 연결 특성에 기인하여 VLSI 구현에 적합하다고 알려져 있다. 본 논문에서는 셀룰라 신경망을 통해서 연상 메모리를 설계하는 문제를 고려한다.

연상 메모리는 주어진 패턴을 흡인 영역(attraction domain)을 갖는 메모리로 저장하는 것을 목적으로 한다. 즉, 저장된 패턴에 충분히 가까운 임의의 벡터가 초기 조건으로 주어졌을 때 저장된 패턴이 최종 출력으로 상기(retrieval)될 수 있도록 하는 것이다. 셀룰라 신경망은 매개 변수를 적절히 선택했을 경우 연상 메모리로서 잘 동작될 수 있음이 여러 논문들에서 보여지고 있다[4][5].

Liu와 Michel[4]은 신경 연상 메모리 설계에 가장 효과적이라고 알려져 있는 고유구조 방법(eigenstructure method)으로, Liu와 Lu[5]는 퍼셉트론 학습 알고리즘에 기반하여 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리를 설계하였다.

본 논문에서는 다음의 정의들 및 기호 약속들을 사용한다. \mathbf{R}^n 은 실수 n 벡터들의 선형 공간을 나타낸다. 임의의 대칭 행렬 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 에 대해, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ 가 만족되면, \mathbf{A} 는 양의 정부호(positive definite)이다라고 하며, $\mathbf{A} > 0$ 로 표기한다. 또한, $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ 는 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 가 양의 정부호임을 의미한다. $\mathbf{I}_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 은 항등 행렬을, \mathbf{H}^n 은 초입방체 $[-1, +1]^n$ 을 뜻한다. 이진 벡터는 양극 이진 벡터를 의미하고, \mathbf{H}^n 에 속하는 모든 이진 벡터들의 집합은 \mathbf{B}^n 으로 표시된다. \mathbf{B}^n 에서 벡터 \mathbf{x}^* 와 \mathbf{x} 사이의 해밍 거리 $HD(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ 는 $HD(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i|$ 이다. 임의의 벡터 집합 γ 에 대해 $\gamma^{(k)}$ 은 γ 의 k 번째 벡터를 의미한다.

2. 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리

2.1 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 모델

본 논문에서 고려하는 이차원, 연속 시간, 제로 입력인 셀룰라 신경망은 아래와 같은 행렬-벡터 형태로 표현될 수 있다[2][4].

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \\ \mathbf{y} = \text{sat}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1)$$

셀룰라 신경망 시스템 (1)은 $n = M \times N$ 개의 셀들로 구성된 이차원 $M \times N$ 배열이다. 여기서 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 는 상태 벡터, $\mathbf{y} \in \mathbf{H}^n$ 는 출력 벡터, $\mathbf{T} = [T_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 는 연결 강도 행렬, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ 은 바이어스 벡터를 나타내고, $\text{sat}(\mathbf{x}) = [\text{sat}(x_1), \dots, \text{sat}(x_n)]^T$ 이다($\text{sat}(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|)$). (1)의 초기 조건 벡터들은 항상 $|x_i(0)| \leq 1, i = 1, \dots, n$ 를 만족한다고 가정한다. 본 논문에서 다루는 셀룰라 신경망 시스템 (1)의 \mathbf{T} 는 아래 정의되는 색인 행렬 $\mathbf{S} = [S_{ij,kl}] \in \mathbf{R}^{M \times N \times M \times N}$ [4]에 의해 결정된다($\mathbf{T} = \mathbf{T}_S$).

$$S_{ij,kl} = \begin{cases} 1, & C(k,l) \in N_r(i,j) \\ 0, & \text{그 외의 경우.} \end{cases}$$

양의 정수 r 에 대해 i 번째 행 j 번째 열 셀 $C(i,j)$ 의 r -이웃(r -neighborhood) $N_r(i,j)$ 은 $N_r(i,j) = \{C(k,l) : \max(|k-i|, |l-j|) \leq r, 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N\}$ 로 정의된다.

2.2 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리의 안정성 판별 기준

만약 $\alpha \in \mathbf{B}^n$ 와 $\beta \cong \mathbf{T}\alpha + \mathbf{b}$ 가

$$\alpha_i \beta_i = \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n T_{ij} \alpha_j + b_i \right) > 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

이면, (α, β) 는 기억 벡터와 시스템 (1)의 점근적 안정 평형점(asymptotically stable equilibrium point)의 쌍이 된다[4].

만약 T 가 대칭이면, 시스템 (1)은 전역적으로 안정(globally stable)하다[2].

2.3 연상 메모리에 관한 정성적 분석

위의 안정성 기준과 함께 원형 패턴에 대한 흡인 영역과 의사 상태(spurious memory)의 개수와 같은 다른 성능 지수들에 중점을 두는 지침들이 병행되어야 만족스러운 성능의 신경 연상 메모리를 설계할 수 있다.

연결 강도 행렬 T 의 대각 원소들을 +1로 고정시켰을 때 아래와 같은 바람직한 특성을 얻을 수 있다[5].

- 시스템 (1)은 이진 기억 벡터만 갖는다.
- 임의의 기억 벡터 $\alpha \in B^n$ 에 대해서
 - $HD(\gamma, \alpha) = 1$ 인 $\gamma \in B^n$ 는 기억 벡터가 될 수 없다.
 - 만약 $x(0) = \gamma$, $HD(\gamma, \alpha) = 1$ 이고 $\gamma \neq \alpha_i$ 이면, $x_i(t)$ 는 $t = 0$ 일 때의 α_i 로 움직인다.

또한, 이 대각 제약 조건을 만족하는 셀룰라 신경망은 그렇지 않은 경우에 비해 적은 개수의 의사 상태를 갖고, 기억 벡터들에 대해서는 더 큰 흡인 영역들을 갖는다[5]. 본 논문에서는 이러한 바람직한 특성을 이용하기 위해 T_{ii} , $i \in \{1, \dots, n\}$ 를 +1로 고정시켰다; 표기상의 편의를 위해 연결 강도 행렬 T 의 비대각 부분을 \tilde{T} 로 표시한다(즉, $\tilde{T} \equiv T - I_n$, $\tilde{T}_{ii} = 0, i \in \{1, \dots, n\}$).

2.4 셀룰라 신경망 시스템의 성능 향상을 위한 추가 지침

본 논문에서는 셀룰라 신경망 시스템 (1)의 성능 향상을 위한 추가 지침으로 사용될 새로운 정리를 제시한다.

정리: $\alpha \in B^n$ 를 시스템 (1)의 기억 벡터라 하고 k 가 $\{1, \dots, n\}$ 에 속하는 정수라 하자. 만약 \tilde{T} 와 b 가 다음 식

$$\alpha_i (\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{ij} \alpha_j + b_i) > 2(k-1) \max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{T}_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

를 만족하면 다음 특성을 갖는다.

- 시스템 (1)은 이진 기억 벡터만 갖는다.
- $1 \leq HD(\alpha, \alpha^*) \leq k$ 인 임의의 이진 벡터 $\alpha^* \in B^n$ 에 대해서
 - α^* 는 기억 벡터가 아니다.
 - 만약 $x(0) = \alpha^*$ 이고, $\alpha_i^* \neq \alpha_i$ 이면, $x_i(t)$ 는 $t = 0$ 일 때의 α_i 로 움직인다.

증명: 생략.

본 논문에서 제시된 정리로부터, 큰 k 로 조건 (3)를 만족하는 경우 저장된 기억 벡터 $\alpha \in B^n$ 의 흡인성을 증가시킬 수 있으며, 또한 α 주변 꼭지점들에 의사 상태가 존재할 가능성이 적어지게 한다. 이러한 고찰에 따라 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 설계를 다음과 같이 공식화할 수 있다:

이진 기억 벡터 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)} \in B^n$ 이 주어졌을 때, 최적의 성능을 발휘하는 셀룰라 신경망의 매개변수들 (b_i, T_{ij}) 는 다음의 최적화 문제를 풀으로써 얻어질 수 있다.

$\max \delta (> 0)$

$$s.t. \begin{cases} \alpha_i^{(k)} (\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{ij} \alpha_j^{(k)} + b_i) > 2\delta \max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{T}_{ij}|, & i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \tilde{T}_{ij} = 0, & i = 1, \dots, n, \\ \tilde{T} = \tilde{T}^T = \tilde{T}|_S. \end{cases} \quad (4)$$

이 최적화 문제는 비선형 제약 조건(즉 (4)의 첫 번째 조건)을 갖는데, 이것은 simplex 방법과 같은 선형 프로그래밍 기술을 적용시키는데 장애가 된다. 다음 장에서 이러한 문제가 효율적으로 풀릴 수 있는 다른 종류의 최적화 문제로 변환될 수 있음을 보인다.

3. 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 설계 문제를 풀기 위한 일반화된 고유값 문제 방법

이 장에서는, 식 (4)를 일반화된 고유값 문제라고 불리는 선형 행렬 부등식에 기초한 최적화 문제로 변환한다.

3.1 선형 행렬 부등식

선형 행렬 부등식은 다음과 같은 형태의 제약 조건이다.

$$A(z) \equiv A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_n A_n > 0. \quad (5)$$

여기서 $z \equiv [z_1, \dots, z_n]^T$ 는 변수이고, A_0, \dots, A_n 은 주어진 대칭 행렬들이다. 복수 개의 선형 행렬 부등식 $A^{(1)}(z) > 0, \dots, A^{(p)}(z) > 0$ 은 단일 선형 행렬 부등식 $diag[A^{(1)}(z), \dots, A^{(p)}(z)] > 0$ 로 표현될 수 있다. 그러므로, 선형 행렬 부등식들의 집합과 단일 선형 행렬 부등식은 차이가 없다[6].

3.2 일반화된 고유값 문제

일반화된 고유값 문제의 일반적인 형태는 다음과 같다[6].

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ s.t. \quad & \lambda B(z) - A(z) > 0, \\ & B(z) > 0, \\ & C(z) > 0. \end{aligned}$$

여기서 $A(z), B(z), C(z)$ 는 변수 z 에 관한 affine 함수들로 대칭 행렬들이다. 일반화된 고유값 문제는 상용 소프트웨어에 의해 효율적으로 풀릴 수 있다[6]. 본 논문에서는 MATLAB LMI Control Toolbox[3]의 "gevp" 함수를 사용한다.

3.3 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리 최적 설계 조건을 일반화된 고유값 문제로 변환

식 (4)을 일반화된 고유값 문제로 변환하기 위해, 먼저

$$\alpha_i^{(k)} (\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{ij} \alpha_j^{(k)} + b_i) > 2\delta q_i > 2\delta \max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{T}_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (6)$$

를 만족하는 추가적인 변수들 q_i 를 제시한다. 또한, $|\tilde{T}_{ij}|$ 가 최종 구현에 합당한 상한을 갖도록 하기 위해 다음 선형 행렬 부등식이 추가로 고려된다.

$$L < q_i < U, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

결국, 최적 성능을 가지고 기억 벡터 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)}$ 을 저장할 수 있는 셀룰라 신경망의 매개 변수들을 찾는 문제는, 식 (6)과 (7)을 선형 행렬 부등식과 그 집합으로 분리하여 다음 일반화된 고유값 문제로 재공식화될 수 있다.

$$\begin{aligned} \min & (-\delta) \\ \text{s.t.} & (-\delta)(2q_i) + \alpha_i^{(k)}(\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{ij}\alpha_j^{(k)} + b_i) > 0, \\ & i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ & \left\{ \begin{array}{l} q_i - \tilde{T}_{ij} > 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, \\ q_i + \tilde{T}_{ij} > 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, \\ L < q_i < U, i = 1, \dots, n, \\ \tilde{T}_{ii} = 0, i = 1, \dots, n, \\ \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}^T = \tilde{\mathbf{T}}^s. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8)$$

4. 모의 실험 및 분석

본 논문에서 제안된 일반화된 고유값 문제 방법론의 적용 가능성을 검증하고, 기존의 설계 방법들과 성능을 비교하기 위해, 상호 연결된 $n = 12$ 인 셀들로 구성된 셀룰라 신경망 모델을 고려한다. 본 예제에서는 그림 1의 네 가지 패턴 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(4)}$ 을 기억 벡터로 저장하는 것을 목적으로 한다.



그림 1. 모의 실험에 사용된 4개의 원형 패턴 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(4)}$

(7)의 경계를 $L = 1, U = 10$ 으로 고정시키고 일반화된 고유값 문제를 풀어 연결 강도 행렬 \mathbf{T} 와 바이어스 벡터 \mathbf{b} 를 구했다.

본 논문에서 제안된 방법에 의해 설계된 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리의 성능을 평가·비교하기 위해, 고유구조 방법[4]과 퍼셉트론 방법[5]에 따라 셀룰라 신경망을 설계해 보았다. 세 개의 셀룰라 신경망 기반 연상 메모리의 성능을 평가하기 위해 MATLAB의 "ode45" 함수를 이용해 모의 실험을 수행하였다. 각각의 셀룰라 신경망에 대해 모든 경우의 이진 벡터를 시스템의 초기치로 주고 그것의 최종 출력들을 분석하였다. 모의 실험 결과에 의하면 제안된 방법에 의해 설계된 셀룰라 신경망은 \mathbf{B}^n 위에서 오직 한 개의 의사 상태를 갖는 반면 고유구조 방법 셀룰라 신경망 [4]은 두 개, 퍼셉트론 방법 셀룰라 신경망 [5]은 여덟 개의 의사 상태를 갖는다.

다음으로, 상기 능력 확률률 조사하기 위해, 초기 조건 벡터와 최종 출력 벡터 사이의 해밍 거리에 따라 데이터를 분류하였다. 각각의 메모리 벡터 $\alpha^{(k)}$ 와 각 초기 조건 벡터와의 해밍 거리 p 에 대해 상기 능력 확률 $P(\alpha^{(k)}, p)$ 는

$$\frac{n(\{\mathbf{x} | (HD(\alpha^{(k)}, \mathbf{x}) = p) \wedge (\mathbf{y} = \alpha^{(k)}), \mathbf{x} \in \mathbf{B}^n\})}{n(\{\mathbf{x} | (HD(\alpha^{(k)}, \mathbf{x}) = p), \mathbf{x} \in \mathbf{B}^n\})}$$

로 계산된다. 그림 2에서 평균 상기 능력 확률의 백분율을 그래프로 나타내었다(즉, $\{(\sum_{k=1}^4 P(\alpha^{(k)}, p))/4\} \times 100$).

마지막으로 표 1에서는, \mathbf{B}^n 안에 존재하는 초기 조건 벡터들의 궤적이 가장 가까운 기억 벡터로 수렴한 개수를 통하여 각 셀룰라 신경망의 효율성을 비교한다. 표 1의 내용은 본 논문에서 제안된 방법론으로 설계된 셀룰라 신경망이 원형 패턴을 상기하는데 더 효과적이라는 것을 입증한다.

5. 결론

본 논문에서는, 최적 성능으로 연상 메모리 기능을 수행하는 셀룰라 신경망의 설계 방법론을 제안하였다. 즉,

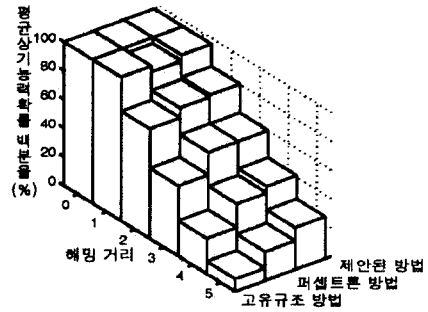


그림 2. 평균 상기 능력 확률의 백분율을 비교

표 1. \mathbf{B}^n 안에 존재하는 초기 조건 벡터들의 응답

설계 방법	최종 응답 벡터	
	가장 가까운 기억 벡터	임의의 기억 벡터
고유구조 방법[4]	1464	1550
퍼셉트론 방법[5]	2262	2602
제안된 방법	2428	3624

기존의 결과와 새로 얻어진 셀룰라 신경망 모델의 특성들을 기반으로 설계 문제를 일반화된 고유값 문제로 공식화하였다. 이 변형 작업은 실용적인 측면에서 유용하다. 그 이유는 주어진 오류 범위 이내에서 전역 최적 상태를 찾을 수 있는 효과적인 내부점 방법이 이미 상용화되어있기 때문이다. 제안된 방법이 셀룰라 신경망 설계에 적용될 수 있음을 예제를 통해 보았으며, 기존 방법론들과의 성능 비교로 제안된 방법이 우수하다는 것을 입증하였다.

감사의 말씀

본 연구는 부분적으로 과학기술부 창의적연구진흥사업의 연구비 지원을 받았다.

참고 문헌

- [1] T. Roska and J. Vandewalle (Eds.), *Cellular Neural Networks*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [2] L. O. Chua and L. Yang, "Cellular neural networks: Theory and Applications," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 35, pp. 1257-1290, 1988.
- [3] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc., Natick, MA, 1995.
- [4] D. Liu and A. N. Michel, "Cellular neural networks for associative memories," *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, Vol. 40, pp. 119-121, 1993.
- [5] D. Liu and Z. Lu, "A new synthesis approach for feedback neural networks based on the perceptron training algorithm," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 8, pp. 1468-1482, 1997.
- [6] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.