한국시뮬레이션학회 '99추계학술대회 논문집 1999.10.9 한양대학교

마코프 리뉴얼 과정에서 평균 busy cycle의 2계도함수에 대한 시뮬레이션

박 홍 식

세종대학교 응용수학과

A Simulation for the Second Derivative of a Mean Busy Cycle in a Markov Renewal Process

Heung-Sik Park
Department of Applied Mathmatics
Sejong University
e-mail : parkhs@sejong.ac.kr

Abstract

In this paper, through simulations, we find the second derivative SPA(Smoothed Perturbation Analysis) estimates of mean busy cycle with respect to a given parameter in a Markov renewal process which is generated by two exponential distributions. We compare these SPA estimates with the traditional SD(symetric difference) estimates.

1. 서론

평균 수행측도들의 주어진 모수에 대한 도함수를 구하는 새로운 방법인 PA(Perturbation Analysis)방법은 그 우수성이 여러 가지로 입증되어 왔다. 시뮬레이션 횟수에 있어서도 재래의 방법인 SD(Symmetric Difference)방법은 적어도 두 번의 시뮬레이션 실행을 필요로 하지만 PA방법은 한 번으로 족하다. 한편 정확도에 있어서도 PA방법이 우수하다는 것이 여러 논문을 통해 발표되었다. M/G/1 그리고 G/G/1 대기행렬에서 평균 시스템시간의 평균 써비스시간에 대한 도함수에 대하여 [5,8] 그리고 일반화된 semi-Markov 과정에서 유한 event동안 수행측도들의 평균 써비스 시간에 대한 도함수에 대하여[2] PA 방법으로 얻은 추정치가 재래의 방법으로 얻은 추정치보다 더 적은 신뢰구간을 갖는다는 것이 보여졌다. 한편 Zazanis와 Suri는 unbiased의 조건하에 PA추정치의 MSE(Mean Squared Error)가 SD추정치의 MSE에 비해 시뮬레이션의 반복(replication)에 따라 더 빨리 감소한다는 것을 보였다[7]. 마코프 리뉴얼과정 에서도 평균 수행측도 들의 주어진 모수에 대한 1계도함수 또는 2계도함수의 추정치를 효과적으로 구하는 방법이 연구되어 왔다[3,4]. 이러한 연구를 통해 조건부 기대치를 이용한 SPA추정치 들이 구하여 졌고 특히 M/M/1 대기행렬에서 평균 busy cycle의 평균 써비스시간에 대한 1계도함수의 SPA추정치가 재래의 추정치에 비해 정확도에서 우수함이 보여졌고[1] 본 논문에서는 2계도함수에 대해서도 같은 결과를 얻음으로서 SPA추정치의 우수성이 우연히 나타난 것이 아님을 보인다.

2. 평균 busy cycle의 2계도함수에 대한 추정

이 장에서는 지수함수

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp(-x/\theta)$$

와

$$g(y,\mu)=\frac{1}{\mu}\exp(-y/\mu)$$

에 의해 생성되는 마코프 리뉴얼과정에서 평균 busy cycle의 평균 도착간격시간 θ에 대한 2계도함수를 SPA(Smoothed Perturbation Analysis) 추정량을 통해 구하는 방법을 설명한다. 이 경우 생성된 마코프리뉴얼과정은 M/M/1대기행렬로서 관심의 대상이 되는 2계도함수의 이론치 값을 알 수 있어 시뮬레이션을 통해 구한 SPA추정치의 정확도를 알아보는데 도움이 될 것이다. 다음으로 재래의 방법으로 2계도함수의 추정치를 구하는 방법을 설명하고 3장에서는 이들 두 방법을 통한 시뮬레이션 결과를 비교하여 SPA추정량이 더 우수하다는 것을 보이고자 한다.

마코프 리뉴얼과정에서 상태가 n이된 순간부터 그후 처음으로 상태가 0이되는 순간 까지의 길이를 $C_{n,0}(\theta)$로 표시하고 그동안 상태가 감소한 수를 $N_{n,0}(\theta)$로 나타내자. 대기행렬에서 사용하는 용어를 준용하면 $C_{0,0}(\theta)$는 busy cycle의 길이를 나타내고 $N_{0,0}(\theta)$는 busy cycle 동안 써비스를 받은 고객의 수라고 말할 수 있을 것이다. 나머지 부호는 [3]을 참조하기 바라며 먼저 평균 busy cycle의 평균 도착간격시간 θ에 대한 1계도함수의 SPA추정량부터 소개한다. [3]에서 유도한 바와 같이

$$\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta}=\frac{1}{\theta}E[\sum_{j\in U}X_j]$$

$$-\frac{E[f(Y)Y]}{\theta P(Y<X)}E[N_{0,0}(\theta)]E[C_{2,0}(\theta)]$$

-------(1)

이 된다. 한편

$$E[C_{2,0}(\theta)] = 2E[C1,0(\theta)]$$

$$= 2\{E[C_{0,0}(\theta)] - E[X_1]\}$$

또한

$$E[\sum_{j\in U} X_j] = E[X_1]$$

$$+ E[X|X<Y]E[N_{0,0}(\theta) - 1]$$

인고로 이들을 (1)에 대입하면

$$\frac{dE[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta} =$$

$$\frac{1}{\theta}\{E[X_1] + E[X|X<Y]E[N_{0,0}(\theta) - 1]\}$$

$$- \frac{2E[f(Y)Y]}{\theta P(Y<X)} E[N_{0,0}(\theta)] *$$

$$\{E[C_{0,0}(\theta)] - EX_1]\}$$

------(2)

이 된다. 한편 [3]에서 유도된바

$$\frac{dE[N_{0,0}(\theta)]}{d\theta} = \frac{E[f(Y)Y]}{\theta P(Y<X)} *$$

$$E[N_{0,0}(\theta)]\{1 - 2E[N_{0,0}(\theta)]\}$$

------(3)

으로 주어지고 또한 M/M/1 대기행렬에서

$$E[X|X<Y] = \frac{\mu\theta}{\mu+\theta}$$

그리고

$$\frac{E[f(Y)Y]}{P(Y<X)} = \frac{\mu}{\mu+\theta} \qquad \text{-----(4)}$$

인고로 식(2)에 이들을 대입한 후 양변을 θ에 관해 미분하고 식(3)을 이용하여 정돈하면

$$\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2} = \frac{\mu}{\mu+\theta} *$$

$$\{1 + \frac{3\mu - 5\theta}{\theta} E[N_{0,0}(\theta)]$$

$$- \frac{12\mu}{\theta} E[N_{0,0}(\theta)]^2$$

$$+ \frac{4}{\theta} E[N_{0,0}(\theta)]E[C_{0,0}(\theta)]$$

$$+ \frac{8\mu}{\theta^2} E[N_{0,0}(\theta)]^2 E[C_{0,0}(\theta)]\}$$

-----(5)

이 된다. 이로부터 위의 식 (5)에 대한 추정통계량은

$$(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2})_{est} = \frac{\mu}{(\mu+\theta)^2} *$$

$$\{1 + \frac{3\mu - 5\theta}{\theta} \sum_{i=1}^{M} N_{0,0}(\theta, i)$$

$$- \frac{12\mu}{\theta} \sum_{i=1}^{M} (N_{0,0}(\theta, i))^2$$

$$+ \frac{4}{\theta}(\sum_{i=1}^{M} N_{0,0}(\theta, i)) \sum_{i=1}^{M} C_{0,0}(\theta, i)$$

$$+ \frac{8\mu}{\theta^2}(\sum_{i=1}^{M} N_{0,0}(\theta, i))^2 \sum_{i=1}^{M} C_{0,0}(\theta, i)\}$$

-----(6)

와 같이 주어진다. 여기서 물론 $C_{0,0}(\theta, i)$는 i번 째 busy cycle의 길이를, 그리고 $N_{0,0}(\theta, i)$는 i번 째 busy cycle에서 써비스를 받고 시스템을 떠난 사람 수를 나타낸다.

한편 $E[C_{0,0}(\theta)]$의 θ에 대한 2계도함수를 구하는 재래의 방법은

$$(\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2})_{SD} =$$

$$(\sum_{i=1}^{M} C_{0,0}(\theta + \Delta\theta, i) - 2\sum_{i=1}^{M} C_{0,0}(\theta, i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} C_{0,0}(\theta - \Delta\theta, i))/M(\Delta\theta)^2$$

-----(7)

으로 주어진다.

3. SPA추정치와 SD추정치의 비교

여기에서는 2장 식(6)의 공식을 사용하여 얻은 $E[C_{0,0}(\theta)]$의 θ에 대한 2계도함수의 SPA추정치와 식 (7)로부터 얻은 SD추정치의 값을 비교한다. 먼저 $dE[C_{0,0}(\theta)]/d\theta$에 대한 SD 추정치의 MSE를 최소로하는 $\Delta\theta$를 각 ρ에 대해 구하고 이 $\Delta\theta$들을 사용하여 식 (7)의 SD추정치들의 값을 구하고 이들을 식 (6)으로부터 얻은 SPA추정치와 비교하도록 한다. M/M/1 대기행렬의 경우

$$\frac{d^2E[C_{0,0}(\theta)]}{d\theta^2} = \frac{2\mu^2}{(\lambda-\mu)^3} \quad \text{-----}(8)$$

인고로[6] 위의 두 방법으로 얻은 추정치의 값들을 식 (8)로부터 얻은 이론치의 값과도 비교한다. 이들에 대한 시뮬레이션 결과가 다음 표에 주어진다. [1]에서와 같이 10000 busy cycle의 시뮬레이션을 50회 행하여 95% 신뢰구간을 구하였다.

표1. $d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 에 대한 SPA 추정치의 95% 신뢰구간

ρ	SPA추정치	이론치
0.2	0.00156±0.00003	0.00156
0.5	0.03983±0.00041	0.04
0.8	1.60632±0.03127	1.6

표2. $d^2E[C_{0,0}(\theta)]/d\theta^2$ 에 대한 SD 추정치의 95% 신뢰구간

ρ	$\Delta\theta$=5	$\Delta\theta$=14	$\Delta\theta$=38
0.2	0.01383± 0.02660	0.00037± 0.00410	0.00200± 0.00052
0.5	0.05666± 0.05863	0.04520± 0.00653	0.09438± 0,00179
0.8	1.63742± 0.31559	3.15601± 0.10529	*

위의 표들에서 볼 수 있듯이 신뢰구간의 길이는 모든 $\Delta\theta$에 대해 SD추정치 보다 SPA추정치가 현저하게 짧음을 알 수 있다. 또한 SPA추정치의 경우 이론치의 값이 ρ의 값에 관계없이 신뢰구간에 포함된 반면 SD추정치의 경우 $\Delta\theta$와 ρ가 큰 경우 이론치의 값이 포함되지 않아 불안정함을 보인다.

4. 결론

본 논문에서는 [4]에서 구한 마코프 리뉴얼 과정에서 평균 busy cycle의 평균 써비스 시간에 대한 2계도함수의 SPA추정공식을 M/M/1 대기행렬에 적용하여 시뮬레이션을 행하고 이를 재래의 SD추정치와 비교함으로서 SPA추정치가 우수하다는 것을 보였다. 이러한 결과는 일반적인 마코프 리뉴얼과정 에서도 성립하리라 믿어지며 앞으로 이에대한 이론적인 증명을 보이는 것이 필요하리라 생각된다.

참고문헌

[1] 박홍식, "시뮬레이션을 통한 SPA 추정치와 SD 추정치의 비교", 「한국통계학회 추계 학술발표회 논문집」 (1997), pp35-39.

[2] Fu, M.C. and J.Q. Hu "Extensions and Generalizations of Smoothed Perturbation Analysis in a Generalized Semi-Markov Process Framework", *IEEE Transations on Automatic Control,* Vol37(1992),pp1483-1500.

[3] Park, H.S, "Smoothed Perturbation Analysis

for Performance Measures in a Markov Renewal Process", *Journal of the Korean Statistical Society,* Vol.25(1996), pp445-456.

[4] Park, H.S, "Second Derivative Estimation for Performance Measures in a Markov Renewal Process", *The Korean Communications in Statistics,* Vol.4, No.2(1977), pp515-522.

[5] Suri, R. and M.A. Zazanis, "Perturbation Analysis Gives Strongly Consistent Sensitivity Estimates for the M/G/1 Queue", *Management Science,* Vol.34(1988), pp39-64.

[6] Wolff, R.W. Stochatic Modeling and the Theory of Queues, Prentice-Hall International, 1989.

[7] Zazanis, M.A. and R. Suri, "Convergence Rates of Finite-difference Sensitivity Estimates for Stochastic Systems",
Operations Research, Vol.41(1993), pp694-703.

[8] Zazanis, M.A. and R. Suri, "Perturbation Analysis of the GI/GI/1 Queue", *Queueing Systems,* Vol.18(1994), pp199-248.