한국시뮬레이션학회 '99추계학술대회 논문집 1999.10.9 한양대학교

복수 서버를 갖는 대기행렬시스템 분석에 대한 2단계 근사법

이호현*, 허선**
한양대학교 산업공학과
*e-mail: blueice@metropal.hanyang.ac.kr
**e-mail: hursun@email.hanyang.ac.kr

A Two-step Approximation for Multi-server Queueing Systems

Ho Hyun Lee, Sun Hur
Department of Industrial Engineering
Hanyang University

요 약

본 연구에서는 변환을 취하지 않고 M/G/c 시스템의 고객수분포를 구하는 방법으로 2단계 분석을 제시한다. I 단계에서는 마코비안 서비스를 따르는 전통적인 고객수분포로부터 출발하여 여기에 새롭게 정의된 모수를 도입해서 근사하여 고객수가 c명일 때까지의 분포를 구한다. II 단계에서는 선수 작업으로 하나의 대기행렬을 각각의 고객의 대기공간으로 구별하여 나눈 후에 현재 시스템내의 고객수에 따라 고객의 도착시점에서 바라 본 대기공간의 부하 유형별로 나누고, 해당 대기공간에 부하를 주는 정도에 따라 정리된 식으로부터 축차적으로 고객수분포를 유도한다.

유도된 고객수분포로부터 평균 시스템 체재시간과 평균 대기시간 등을 구하고 이를 시뮬레이션과 비교하여, 본 근사법의 유용성을 논의한다.

1. 서론

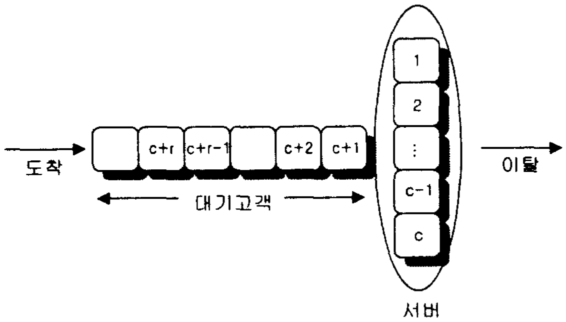
복수 서버를 갖는 $M/G/c$ 대기행렬시스템의 안정상태에서의 대기고객수 분석을 함에 있어서 변환 과정을 거치지 않고 수행하는 방법을 제시하고자 한다. 서버가 한 명일 경우는 내재 마코프체인을 이용한 방법, 부가변수법, 여러 형태의 근사법 등 여러 가지 방법이 제시되어 있으나 서버가 여러 명일 경우는 연구 활동이 많이 이루어지지 않았으며, 정확한 해를 내는 해법 또한 알려지지 않고 있다.

본 논문에서는 변환을 취하지 않고 $M/G/c$ 시스템의 고객수분포를 구하는 방법으로 2단계 분석을 실시한다. I 단계에서는 마코비안 서비스를 따르는 모형에서의 고객수분포로부터 출발하여 여기에 새로이 정의된 모수를 도입하고 moment matching 방법과 Little의 식을 이용하여 모수를 구해낸 후, 근사하여 고객수가 c명일 때까지의 분포를 구한다. II 단계에서는 선수 작업으로 하나의 대기행렬을 각각의 고객의 대기공간으로 구별하여 나눈 후에 현재 시스템내의 고객수에 따라 고객의 도착시점에서 바라 본 대기공간의 부하 유형별로 나누고 해당 대기공간에 부하를 주는 정도에 따라 정리된 식과 잔여서비스시간의 적절한 계산식으로부터 축차적으로 고객수분포를 유도한다. 구해진 고객수분포를 가지고 평균시스템체재시간과 평균대기시간 등을 구한다.

2. 모형설명

고객의 도착은 도착률 λ를 갖고 포아송과정으로 이루어지며, 각 서버의 서비스는 서비스율 μ, 평균서비스시간 $E[S]$의 일반분포를 따른다. 서버의 수는 c명으로 각 서버는 동일하고 상호독립이며, 대기공간은 무한하고 안정상태조건 ($\lambda < c\mu$)를 만족하는 시스템이라고 하자. 또한 바쁜 서버의 잔여서비스시간은 다른 서버의 서비스

시간과 독립이라고 하자. 서비스 정책은 선입선출이다. $M/G/c$ 대기행렬시스템은 [그림 1]과 같이 표현할 수 있다.



[그림 1] $M/G/c$ 대기행렬시스템

3. I 단계 : 고객수 확률분포 (c명 이하)

3.1 $M/M/c$ 시스템에서 $M/G/c$ 으로의 근사

고객수분포를 구하기 위하여 우선 $M/M/c$ 시스템의 고객수분포를 고려하여 근사의 초기치로 삼는다. $M/M/c$에서 안정상태에 시스템 내 고객수를 N명이라 하고
$\Pr(N=n)=P_n(M)$으로 표기하면 식(1)과 같이 주어진다.

$$P_n(M)=\begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0(M), & (0\le n\le c-1) \\ C(c,c\rho)(1-\rho)\rho^{n-c}, & (n\ge c)\end{cases} \quad (1)$$

여기서 $\rho=\frac{\lambda}{c\mu}$, $C(c,c\rho)=\frac{(\lambda/\mu)^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}P_0(M)$

이며, $P_0(M)=\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)}\right)^{-1}$ 이다.

식 (1)로부터 서비스시간이 일반분포를 따르는 $M/G/c$ 시스템의 분포를 근사시키기 위하여 임의의 모수 ν $(0<\nu<1)$를 도입하여 식(1)의 ρ와 대치한다. 즉, $P_n(G)$를 $M/G/c$에서 시스템 내에 n명 있을 확률이라고 하면,

$$P_n(G)=\begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0(M), & (0\le n\le c-1) \\ C(c,c\rho)(1-\nu)\nu^{n-c}, & (n\ge c)\end{cases} \quad (2)$$

와 같이 변형할 수 있다. 이제 모수(ν)를 구하기 위하여 Little의 식과 moment matching방법을 쓰자, M은 $M/M/c$ 모형, G는 $M/G/c$ 모형을 의미한다고 하면 $L(M)=\lambda E[W(M)]$, $L(G)=\lambda E[W(G)]$로부터 다음을 근사 시킬 수 있다.

$$\frac{\rho}{1-\rho}E[W(G)]\simeq\frac{\nu}{1-\nu}E[W(M)] \quad (3)$$

를 얻고, $R=\frac{E[W(G)]}{E[W(M)]}$로 나타내자. 그리고

$$\nu=\frac{\rho R}{1-\rho+\rho R} \quad (4)$$

를 구한다. 여기서 R은 다음과 같은 근사를 취한다(Kimura[6]).

$$\lim_{\rho\to 0}R=c\cdot E[T^+]\cdot\frac{1}{E[S]} \quad (5)$$

$$\lim_{\rho\to 1}R=\frac{1+(cv)^2}{2} \quad (6)$$

단, $E[T^+]=\int_0^\infty(1-G_+(t))^c dt$, $t>0$, $(cv)^2$은 변동계수의 제곱이다.

식 (5)는 light traffic의 경우이고 식 (6)는 heavy traffic의 경우인데 각 경우에 따라 구별하여 사용하도록 하겠다. 그리고 light traffic의 경우에는

$$\begin{aligned} E[T^+] &= E[\min\{S_1^+,S_2^+,\cdots,S_c^+\}] \\ &\fallingdotseq \frac{[E(S)+3E(S^+)]}{4c}\end{aligned} \quad (7)$$

의 근사(Wang and Wollf [3])와 4.2절의 $E[T_1^+]$를 사용한다. 식 (4)과 (7) 그리고 $R=\frac{E[W(G)]}{E[W(M)]}$로부터 모수 ν를 구한다.

4. II 단계 : 고객수 확률분포 (c명 이상)

I 단계에서 구한 P_c를 가지고 II 단계를 진행한다. 여기서는 대기장소(Queue)를 도착하는 고객의 관점에서 개별적인 고객이 차지하고 있는 대기공간으로 구별하여 나누어 생각한다. 예를 들어, 각 대기공간을 $R_{c+r}(r=1,2,3\cdots)$이라 하면 서비스를 받기 위해 대기중인 고객이 한 명일 경우 그 고객의 대기 공간은 R_{c+1}, 두 명일 경우 두 번째 고객의 대기공간은 R_{c+2}가 될 것이다.

현재 시스템 내에 있는 고객수에 따라 r번째 대기공간 R_{c+r}에 부과되는 부하의 정도가 달라지는데 이를 알아보기 위하여 시험고객의 도착시점에서의 고객수에 따른 부하 유형을 구분한다.

▶ 시험고객의 도착 시점에서의 부하 유형

a) $(c+r-2)$명 이하인 경우
- R_{c+r}에 부하를 주지 못한다.

b) $(c+r-1)$명
- 현재 서비스를 받고 있는 고객 중 잔여서비스시간이 가장 적게 남은 고객의 잔여서비스시

간 동안 R_{c+r}에 부하를 준다.

c) $(c+r)$명 이상

- 현재 서비스를 받고있는 고객의 잔여서비스 시간과 새로 서비스를 시작하는 서버의 서비스 시간 중에서 가장 적은 시간 동안 R_{c+r}에 부하를 준다.

위의 유형들로부터 단위시간당 도착하는 고객들이 대기공간 R_{c+r}에 주는 평균 부하량을 다음과 같이 구한다.

$$\lambda(P_0+P_1+\cdots+P_{c+r-2})\cdot 0 \;+\; \lambda P_{c+r-1}E[T_1^+] + \lambda(P_{c+r}+P_{c+r+1}+\cdots)E[T_2^+] \tag{8}$$

여기서 $T_1^+=\min\{S_1^+,S_2^+,\cdots,S_c^+\}$는 서비스 중인 서버의 잔여서비스시간 중에서 최소인 것을 나타낸다. $T_2^+=\min\{S,S_1^+,S_2^+,\cdots,S_{c-1}^+\}$는 새로 setup되는 서버의 서비스시간과 나머지 서버의 잔여서비스시간 중에서 최소인 것을 의미한다. 단, S는 서비스시간, S_k^+는 k번째 서버의 잔여서비스시간이다
$(k=1,2,\cdots,c)$.

4.1 시스템 방정식

앞에서 언급한대로 각 대기공간 R_{c+r}에 $(r=1,2,3\cdots)$ 가해지는 부하의 정도에 따라 구분하고 r번째 대기공간이 점유될 확률로 Q_{c+r}을 정의한다.

$$\begin{aligned}
Q_{c+1} &= P_{c+1}+P_{c+2}+P_{c+3}+\cdots\\
&= \lambda P_c E[T_1^+] + \lambda Q_{c+1}E[T_2^+]\\
Q_{c+2} &= P_{c+2}+P_{c+3}+P_{c+4}+\cdots\\
&= \lambda P_{c+1} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+2}E[T_2^+]\\
&\vdots\\
Q_{c+r-1} &= P_{c+r-1}+P_{c+r}+P_{c+r+1}+\cdots\\
&= \lambda P_{c+r-2} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+r-1}E[T_2^+]\\
Q_{c+r} &= P_{c+r}+P_{c+r+1}+P_{c+r+2}+\cdots\\
&= \lambda P_{c+r-1} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+r}E[T_2^+]\\
Q_{c+r+1} &= P_{c+r+1}+P_{c+r+2}+P_{c+r+3}+\cdots\\
&= \lambda P_{c+r} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+r+1}E[T_2^+]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$P_{c+i}=Q_{c+i}-Q_{c+i+1}$가 되므로 위의 관계식 $Q_{c+r}\ (r>1)$을 정리하여 축차적으로 풀어 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
Q_{c+1} &= \lambda P_c E[T_1^+] + \lambda Q_{c+1}E[T_2^+]\\
&\therefore Q_{c+1} = \frac{\lambda}{1-\lambda E[T_2^+]}E[T_1^+]P_c\\
Q_{c+2} &= \lambda P_{c+1} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+2}E[T_2^+]\\
&\therefore Q_{c+2} = \frac{\lambda}{1-\lambda E[T_2^+]}E[T_1^+]P_{c+1}\\
&\vdots\\
Q_{c+r-1} &= \lambda P_{c+r-2} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+r-2}E[T_2^+]\\
&\therefore Q_{c+r-1} = \frac{\lambda}{1-\lambda E[T_2^+]}E[T_1^+]P_{c+r-2}\\
Q_{c+r} &= \lambda P_{c+r-1} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+r}E[T_2^+]\\
&\therefore Q_{c+r} = \frac{\lambda}{1-\lambda E[T_2^+]}E[T_1^+]P_{c+r-1}\\
Q_{c+r+1} &= \lambda P_{c+r} E[T_1^+] + \lambda Q_{c+r+1}E[T_2^+]\\
&\therefore Q_{c+r+1} = \frac{\lambda}{1-\lambda E[T_2^+]}E[T_1^+]P_{c+r}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

그리고

$$P_{c+1} = Q_{c+1}-Q_{c+2} = \frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}P_c \tag{9}$$

$$P_{c+2} = Q_{c+2}-Q_{c+3} = \left(\frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}\right)^2\cdot P_c \tag{10}$$

$$\vdots$$

$$P_{c+r-1} = Q_{c+r-1}-Q_{c+r} = \left(\frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}\right)^{r-1}P_c \tag{11}$$

$$P_{c+r} = Q_{c+r}-Q_{c+r+1} = \left(\frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}\right)^{r}\cdot P_c \tag{12}$$

$$P_{c+r+1} = Q_{c+r+1}-Q_{c+r+2} = \left(\frac{\lambda E[T_1^+]}{1-\lambda E[T_2^+]+\lambda E[T_1^+]}\right)^{r}P_c \tag{13}$$

$$\vdots$$

각 상태의 확률들은 두 가지 유형의 서비스시간 평균 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$, 고객도착율, P_c를 포함하고 있는데 다음절에서 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$를 구하기로 한다.

4.2 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$의 계산

G_+를 잔여서비스시간의 분포라고 하자. 그러면,

$$G_+(t)=\frac{1}{E[S]}\int_0^t(1-G(x))dx \tag{14}$$

의 관계식이 성립하고 $\int t dG_+(t)=\frac{E[S^2]}{2E[S]}$이다.

[정리 1]

$S_k^+\ (k=1,2,\cdots,c)$를 서버의 잔여서비스시간을

나타내며 분포 G_+를 따르는 독립인 확률변수라 하고 서비스시간 S는 분포 G를 따르며 S_k^-와 독립인 확률변수라 하자. 그러면 다음을 만족한다.

$$E[(S-\text{ the } n^{th} \text{ smallest of } (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+))^+] \tag{15}$$
$$= E[S]\frac{c+1-n}{c+1}. \quad \text{단, } 1 \le n \le c-1$$

증명)

식 (14)로부터 $E[S]G_+(t) = \int_0^t (1-G(x))dx$가 되고 t에 관해 미분하면 $E[S]g_+(t) = (1-G(t))$이다.

$E[(S-\text{ the } n^{th} \text{ smallest of } (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+))^+]$는 T_2^+에서 정의했던 바와 같이 $E[S] - E[\min\{S,\ n^{th} \text{ smallest of } (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)\}]$이다. 오른 쪽의 식을 계산하면 다음과 같다.

$$E[\min\{S,\ n^{th} \text{ smallest of } (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)\}]$$
$$= \int_0^\infty \Pr(S>t)\cdot \Pr\{\ n^{th} \text{ smallest of } (S_1^+, S_2^+, \cdots, S_c^+)>t\ \}dt$$
$$= \int_0^\infty (1-G(t))\cdot \sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i} G_+^i(t)(1-G_+(t))^{c-i}\, dt$$
$$= \int_0^\infty E[S]\cdot \sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i} G_+^i(t)(1-G_+(t))^{c-i} g_+(t)\, dt$$
$$= E[S]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i}\int_0^1 z^i(t)(1-z)^{c-i}\, dz$$
$$= E[S]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{c}{i}\frac{i!(c-i)!}{(c+1)!}$$
$$= E[S]\frac{n}{c+1} \tag{16}$$

$G_+(t) = z$로 치환하고 ($0<t<\infty \rightarrow 0<G_+(t)=z<1$) 베타분포의 확률밀도함수를 이용하여 계산하였다. 그리고 일반적으로 S_k^+들은 독립이라고는 볼 수 없으나 근사의 편의상 독립이라고 하였다.□

4.2.1. $E[T_1^+]$의 계산

$$T_1^+ = (S - \max(S_1^-, S_2^-, \cdots, S_c^-))^+$$
$$= S - \min(S, \max(S_1^-, S_2^-, \cdots, S_c^-))$$

로 볼 수 있는데 이는 서비스시간에서 가장 큰 경과시간을 뺀 것이며 가장 작은 잔여서비스시간으로 볼 수 있고, 잔여서비스시간과 경과서비스시간의 분포는 확률적으로 동일하므로 잔여서비스시간의 경우를 적용한 위의 정리로부터 T_1^+의 기대값을 구하면 아래와 같다.

$$E[T_1^+] = \frac{1}{c+1}E[S] \tag{17}$$

4.2.2. $E[T_2^+]$의 계산

$$T_2^+ = \min\{S, S_1^+, S_2^+, \cdots, S_{c-1}^+\}$$
$$= \min\{S, \min(S_1^+, S_2^+, \cdots, S_{c-1}^+)\}$$

로 표현할 수 있고, 서비스를 새로 시작한 고객의 서비스시간과 나머지 $c-1$명의 고객의 잔여서비스시간 중에서 가장 작은 시간으로 볼 수 있다. T_2^+의 기대값은 위의 정리의 증명으로부터 $n=1$로 놓고 정리하면

$$E[T_2^+] = \frac{1}{c}E[S] \tag{18}$$

가 된다.

4.3 M/G/c 시스템의 변환을 취하지 않은 형태의 고객수분포

4.1절의 시스템 방정식에 I 단계의 3.2절에서 유도한 P_c와 4.2절에서 구한 $E[T_1^+]$와 $E[T_2^+]$를 대입하면 파라미터 ν와 서비스시간의 평균 $E[S]$의 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
P_{c+1} &= \frac{(c+1)\lambda E[S]}{c(c+1)-\lambda E[S]}\cdot P_c \\
P_{c+2} &= \left\{\frac{(c+1)\lambda E[S]}{c(c+1)-\lambda E[S]}\right\}^2\cdot P_c \\
&\vdots \\
P_{c+r} &= \left\{\frac{(c+1)\lambda E[S]}{c(c+1)-\lambda E[S]}\right\}^r\cdot P_c \\
P_{c+r+1} &= \left\{\frac{(c+1)\lambda E[S]}{c(c+1)-\lambda E[S]}\right\}^{r+1}\cdot P_c \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{19}$$

와 같은 결과를 얻을 수 있으며

$$P_c = \frac{\dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!}\dfrac{1-\nu}{1-\rho}}{\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)}\right)} \tag{20}$$

이다.

5. 평균시스템체재시간, 평균대기시간

식 (19)와 (20)으로부터 평균대기고객수는

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n \tag{21}$$

와 같음을 알 수 있고, 평균대기시간은

$$\begin{aligned}
E[W(G)] &= \frac{L_q}{\lambda} \\
&= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n(G) \\
&= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)C(c, c\rho)(1-\nu)\nu^{n-c} \\
&= C(c, c\rho)\frac{\nu}{(1-\nu)^2}
\end{aligned} \tag{22}$$

이다. 그러면 시스템 내의 평균고객수는

$$L = L_q + \lambda E[S]$$

이고 평균대기시간은

$$W = \frac{L_q + \lambda E[S]}{\lambda}$$

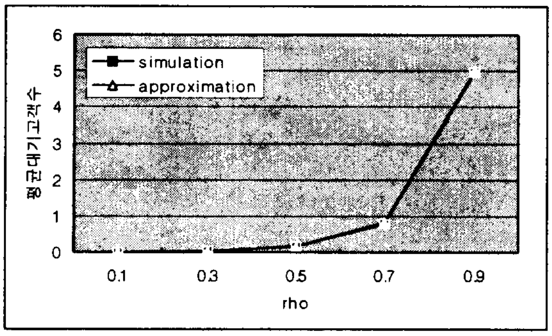
이다.

6. 실험결과

본 연구에서 제시한 방법에 대한 타당성 검토를 위하여 다음과 같은 조건 하에서 시뮬레이션과 비교 검토하였다.

서버의 수는 3명이고, 서비스분포는 계차-3의 Erlang분포이며 ρ의 값을 [그림 2]와 같이 변화시켜 가면서 Arena 3.5로 실험하였다. 시뮬레이션 시간은 10^7으로 하였으며 warm-up period는 2×10^6, 반복수는 50회로 두었다.

[그림 2]는 traffic을 변화시켜가면서, 본 연구에서 제시한 방법과 시뮬레이션과의 차이점을 살펴본 것으로 근사법과 거의 비슷한 결과가 나오는 것을 알 수 있었다. traffic이 상대적으로 너무 작거나 큰 경우에 다소 차이가 나는 것을 볼 수 있는데, 이는 잔여서비스시간을 상호독립으로 보고 근사하였기 때문이다.



[그림 2 . $M/E_3/3$ 시스템의 평균대기고객수]

7. 결론

$M/G/c$ 시스템은 이론적으로는 정확한 분석이 가능하지만 c가 크면 경계값의 결정이 실제적이지 않다. 따라서 본 논문에서는 변환과정을 택하지 않고 2단계 근사법을 통하여 $M/G/c$ 대기행렬시스템을 분석하였다. I 단계에서는 친숙한 모형인 $M/M/c$ 모형에서 출발하여 $M/G/c$와 $M/M/c$의 비율과 ρ로 표현되는 모수를 갖는 시스템으로 분석하였고, II 단계는 대기공간을 개별적인 고객이 점유하는 장소로 나누고 여기에 도착 시점에서의 부하유형별로 분석하였다. 계산과정 쉽고 간단하며 특히, 서비스시간의 1차 모멘트만으로도 고객수분포를 구해낼 수 있다는 것이 장점이다.

본 연구에서 제시한 방법에 대한 타당성 검증을 위해 시뮬레이션과 비교 검토한 결과 극도의 heavy/light traffic 이 아닌 경우와 마코비안 서비스의 경우에는 우수한 성능을 보여주고 있다.

본 연구의 결과를 통하여 다중접속을 하는 통신네트워크시스템의 성능분석, 재고시스템에 적용되어 그 효과를 발휘할 수 있으리라 기대한다.

8. 추후 연구과제

- ▶ 다양한 데이터와 환경에서의 실험이 필요하다.
- ▶ 잔여서비스시간들과 서비스시간의 독립성 여부 판정과 모두 독립으로 두었을 때의 오차
- ▶ 경과서비스시간과 잔여서비스시간의 합(재귀시간)이 서비스시간으로의 근사가 가능한지 여부 확인.
- ▶ busy/idle period, heavy/light traffic 특성 등을 정리한다.
- ▶ 주어진 시간 내에 서비스를 받지 못하면 시스템을 떠나는 시스템에 대한 연구 (통신서비스와, 재고시스템에서의 활용 방안)

References

[1] 윤봉규, 김남기, 채경철, 1999, "*Little's 법칙의 미시적 활용 사례*", Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers, vol. 25, no. 1, pp. 125-129.

[2] 이호우, 1998, "*대기행렬 이론*", 시그마프레스.

[3] Chia-Li Wang and Ronald W. Wolff, 1998, "*The M/G/c queue in light traffic*", Queueing Systems, vol. 29, no. 17-34, pp. 17-34.

[4] Jerry Banks, "*Handbook of Simulation*", 1998, Engineering & Management Press,

[5] Nam Kyoo Boots, Henk Tijms, 1999, "*A Multiserver Queueing System with Impatient Customers*", Management Sci., vol. 45, no. 3, pp. 444-448.

[6] Toshikazu Kimura, 1996, "*A Transform-free Approximation for the Finite Capacity M/G/s Queue*", Operations Research, vol. 44, no. 6, pp. 984-988.

[7] W. D. Kelton, R. P. Sadowski, D. A. Sadowski, 1998, "*Simulation with Arena*", WCB/McGraw-Hill.