

관망 부정류해석과 보간방법에 관한 연구

김상현*, 김학용**, ○정봉석***, 김주인***

1. 서론

특성선방법은 미소공간축과 미소시간축의 비가 충격파의 속도로 정의된 특성선상에서 운동량방정식과 질량보존방정식을 결합하여 유한차분형태로 나타내어지는 방법으로 부정류 해석에 효율적인 방법으로 각광받고 있는 방법이다. 그러나, 이 방법은 시간간격과 거리간격의 일치성에 대한 제약으로 보간법을 도입하여 근사해를 구한다. 여러 가지 보간방법들 중 본 연구에서 사용되어지는 방법은 미지점 선형시간보간법(Linear timeline interpolation at unknown level), 기지점 선형시간보간법(Linear timeline interpolation at known level), 선형공간보간법(Linear spaceline interpolation), 파속도 조정법(Wave speed adjustment), 입방공간보간법(Compact cubic spaceline interpolation), 입방시간보간법(Compact cubic timeline interpolation)으로 6가지를 제시하고 비교 검토하여, 가장 효율적인 보간방법을 선정하여 신뢰성있는 부정류해석에 기여한다.

2. 특성선방법의 지배방정식과 해석

일반적인 관로내에서 부정류해석을 위한 미분방정식으로 나타나는 운동량방정식과 질량보존 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + RQQ = 0 \quad (2)$$

여기서, $R=f/(2DA)$, H =piezometric수두, Q 는 유량, D 는 내부관경, f 는 Darcy-Weisbach 마찰계수, a 는 충격파속도, g 는 중력가속도, A 는 관로단면적이다. 식 (1)과 식 (2)를 조합하여 유량 Q 와 수두 H 로 이루어진 특성방정식을 얻을 수 있는데 이 식은 천이상태에서 효율적인 수치 해석적 해를 구하는데 이용되어진다

$$\frac{dQ}{dt} \pm \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + RQQ = 0 \quad (3)$$

위의 식은 $dx/dt = \pm a$ 로 정의되어지는 C^+ 와 C^- 특성선(characteristic line)상에서만 유효하게 적용되어진다. 이러한 특성관계를 만족하기 위해서는 $\Delta x = \pm a \Delta t$ 의 관계가 성립되어야 한다. 일단 초기조건과 시간-공간 축이 결정되어지면 식 (3)은 그림 1에서 보여지는 AP 와 BP 선을 따라 적분되어진다. 그림 1에서 미지점 P에 대한 2 개의 방정식은 다음과 같다.

$$Q_p = C_p - C_a H_p \quad (4)$$

$$Q_p = C_n + C_a H_p \quad (5)$$

여기서 적분상수는 다음과 같다.

$$C_p = Q_A + C_a H_A - RQ_A|Q_A|\Delta t \quad (6)$$

$$C_n = Q_B - C_a H_B - RQ_B|Q_B|\Delta t \quad (7)$$

* 부산대학교 환경공학과 조교수

** 한일 네트워크 엔지니어링

*** 부산대학교 환경공학과 석사과정

$$C_a = \frac{gA}{a} \quad (8)$$

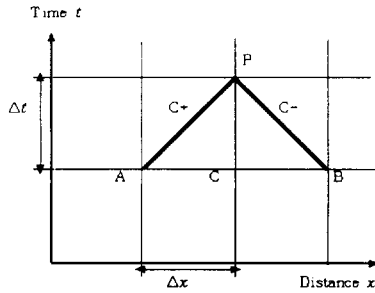


그림 1. 관망을 해석하는 축

여기서, 수두와 유량의 아래첨자는 그 지점의 수두와 유량을 의미한다(즉 P는 $t + \Delta t$ 의 지점, A와 B는 t 의 지점). 특성값($t + \Delta t$ 지점값)을 구하기 위해서는 초기조건 A점과 B점이 알려져야 하는데, 임의의 관망에 위의 관련 식을 적용하는 과정은 정류상태의 값들을 부정류상태의 초기 값으로 취함으로써 부정류상태의 계산이 진행될 수 있다.

3. 각 보간방법

3.1. 보간의 필요성

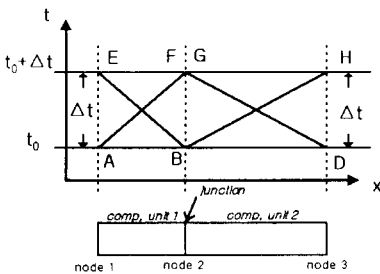


그림 2. 동일한 진행시간을 가진 특성선

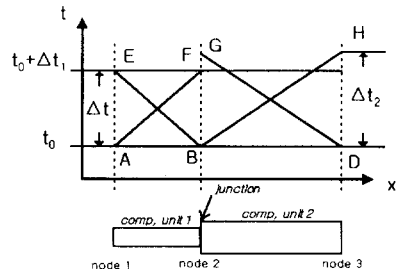


그림 3. 상이한 진행시간을 가진 특성선

그림 2는 계산요소1과 계산요소2가 절점 2에 의해 연결되어 있다. 각 계산요소의 파진행시간(Δt)이 같다면, Δt 는 같은 계산시간간격으로 계산되어지고, 각 단위들은 Courant number 즉 $c(\text{wave celerity})/(\text{dx}/\text{dt})$ 가 1이 된다. 이 방법에서는, 유일한 해가 각 시간마다 얻어진다. 그림 3에서처럼, 두 개의 계산요소에 대한 진행시간이 다르다면, 그림 2에서처럼 F와 G가 서로 일치하지 않게 된다. 이 문제를 해석하기 위해서는, F와 G점간의 보간이 필요하게 된다. 이것이 특성선 방법의 주요 단점이다. 즉 계산 요소의 진행시간이 모든 진행시간중 가장 짧은 Δt 의 배수가 되지 않으면 보간을 필요로 한다. 보간은 계산이 진행됨에 따라 오차를 유발하기 때문에, 좋은 보간 방법은 신뢰성 있는 천이문제해석에 중요하다.

3.2 선형 공간 보간 (Spaceline Linear Interpolation)

그림 4는 $(n+1, i)$ 로부터 특성선은 절점이 아닌 시간 n 축의 A점으로 공간선을 나누고 A점의 값은 보간에 의해 구해진다. 절점($n, i-1$)과 절점(n, i)사이의 선형적인 보간은 다음과 같다.

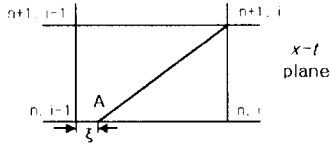
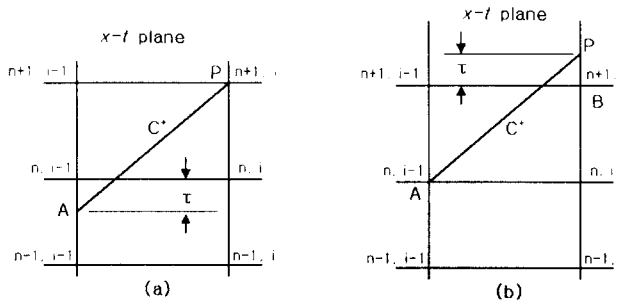


그림 4. C^+ 특성선에 대한 공간선 보간; n=시간축, i=공간축

$$h_A = \frac{\xi}{\Delta x} h_i^n + \frac{\Delta x - \xi}{\Delta x} h_{i-1}^n \quad (9)$$

$$Q_A = \frac{\xi}{\Delta x} Q_i^n + \frac{\Delta x - \xi}{\Delta x} Q_{i-1}^n \quad (10)$$

3.3. 선형 시간 보간 (Timeline Linear Interpolation)



기지점 선형 시간 보간

미지점 선형 시간 보간

그림 5. C^+ 특성선에 대한 시간선 보간; n=시간축, i=공간축

만약 특성선이 미지의 시간축인 $n+1$ 로부터, A점으로 기지의 시간선을 양분한다면(그림 5a), 절점(n-1, i-1)와 절점(n, i-1)사이에 보간이 다음과 같이 이루어 진다.

$$h_A = \frac{\tau}{\Delta t} h_{i-1}^{n-1} + \frac{\Delta t - \tau}{\Delta t} h_{i-1}^n \quad (11)$$

위의 식은 기지점 시간 보간(Linear timeline interpolation at known level)을 나타낸다. 반면에, 특성선의 밑이 절점A(그림 5b)에 위치되어 있다면, 이 특성선은 시간선을 가로질러 절점P에 위치하게 된다. 절점 B에 대한 수두는 P점과 절점(n, i)을 이용한 보간으로 구해질 수 있다.

$$h_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta t + \tau} h_P + \frac{\tau}{\Delta t + \tau} h_i^n \quad (12)$$

이 식은 아직 계산되지 않은 값을 가지고 있기 때문에, 이식을 미지점 시간 보간(Linear timeline interpolation at unknown level)이라 한다.

3.4. 파속도 조정(Wave Speed Adjustment)

Ghidaoui와 Karney(1994)는 모든 보간방법은 실재값의 산란에 더하여 파속도의 수치적 변화가 포함되는 것을 알아냈다. 따라서 그들은 간단한 보간방법을 제시했는데, 즉 기지값으로부터 미지값으로 직접 특성선을 연결하기 위해 파속도의 변형을 제시했다. 그림 5는 변형된 기울기AB 를 가진 특성선을 나타낸다.

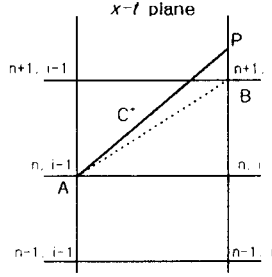


그림 6. 파속도 조정; 점선AB가 조정된파속도를 나타낸다.

3.5. 입방 공간 보간(Cubic Compact Space Interpolation)

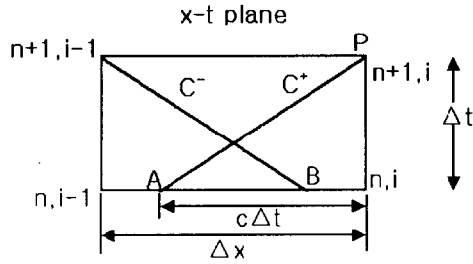


그림 7 Compact cubic spaceline interpolation을 위한 계산단위에서의 특성선

선형적인 방법들과 비교해, 입방 보간방법은 해를 근사시키는데 더욱 정확하다. 이 보간방법은 시간 n 축의 알고있는 모든 절점의 수두와 유량값, 그리고 수두와 유량의 도함수값을 이용하여 얻어진다. 그림 7은 공간 선상에서 적용되어지므로 입방공간보간이라 한다. A점의 수두와 유량은 다음과 같다.

$$h_A = a_1 h_{i-1}^n + a_2 h_i^n + a_3 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1}^n + a_4 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i^n \quad (13)$$

$$Q_A = a_1 Q_{i-1}^n + a_2 Q_i^n + a_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{i-1}^n + a_4 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_i^n \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_A = c_1 h_{i-1}^n + c_2 h_i^n + c_3 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1}^n + c_4 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i^n \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_A = c_1 Q_{i-1}^n + c_2 Q_i^n + c_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{i-1}^n + c_4 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_i^n \quad (16)$$

여기서 각 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= C_r^2(3-2C_r) & a_2 &= 1-C_r^2(3-2C_r) = 1-a_1 \\ a_3 &= C_r^2(1-C_r)\Delta x & a_4 &= -C_r(1-C_r^2)\Delta x \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 1+2C_r^3-3C_r^2 & b_2 &= C_r^2(3-2C_r) = 1-b_1 \\ b_3 &= -C_r(1-C_r)^2\Delta x & b_4 &= -C_r^2(C_r-1)\Delta x \end{aligned} \quad (18)$$

3.6. 입방 시간 보간(Cubic and Fifth Order Compact Timeline Interpolations)

입방 공간 보간과 반대로, 입방 시간 보간은 공간도함수대신에 시간도함수를 이용한다. 그림 8의 A점과 B점의 보간해유도는 입방 공간 보간과 유사하다. 일반적으로 입방 보간방법은 선형적인 보간방법에 비해 훨씬 더 큰 정확도를 제공한다. 하지만 이 고차방법들은 위의 식에서 처럼 Q 와 h 의 천이방정식의 계산과 도함수 $\partial Q/\partial t$ 와 $\partial h/\partial t$ 에 대한 천이방정식을 계산하기 위해 더욱 많은 계산시간을 요구한다.

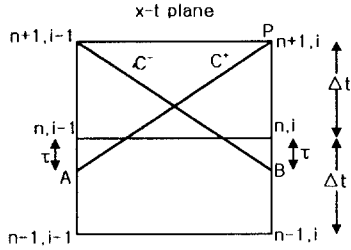


그림 8. 일방 시간 보간에 대한 특성선

4. 적용예

앞에서 제시되었던 각각의 보간방법들을 그림 8, 그림 9에 나타난 관망에 도입하여 수치모의를 한다.

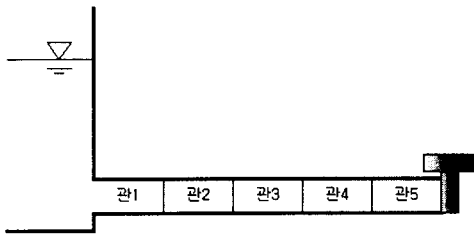


그림 8. 보간이 필요 없는 관망

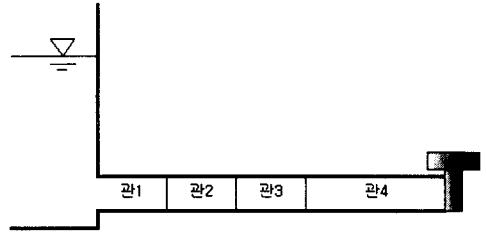
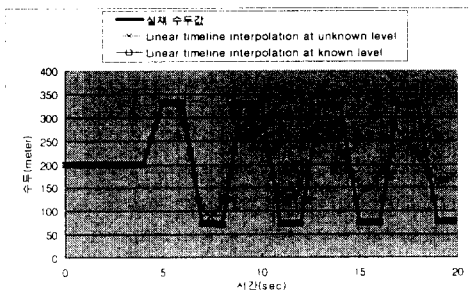
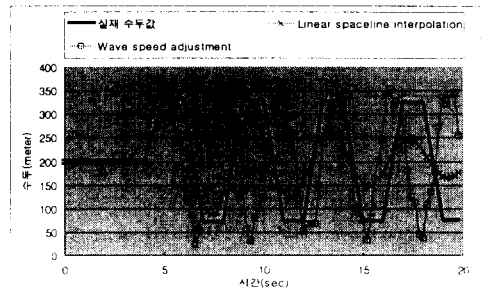


그림 9. 보간이 필요한 관망

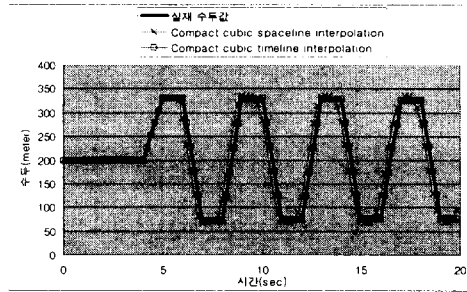
위 그림 8을 적용된 관망의 재원은 총관길이 1000m, Darcy-Weisbach 마찰계수는 0.012, 각 관망마다의 길이는 200m이다. 저수지 쪽의 200.99m의 수두로 물이 밸브 쪽으로 흐르면서 시간 4초에서 5초 동안 밸브가 선형적으로 닫힘으로써, 수격현상을 유도한다. 현재 이 관망의 파속도(wave celerity)는 1000m/s로 설정하여 각 구간마다의 미소시간 Δt 가 0.2초가 되도록 설정하여 Courant Number를 1이 되게 하여 보간 없이 부정류해석을 할 수 있도록 했다. 그림 9는 그림 8에서 관4와 관5를 합쳐서 400m관으로 만들었다. 따라서 관1, 관2, 관3에서는 Courant Number가 1이 되지만, 관4에서는 Courant Number가 0.5가 되게 되어 보간 없이 직접적인 해석이 불가능하게 된다. 따라서 앞에서 서술되어진 보간방법들을 이용하여 그림 8에서 얻어진 정확한 값과 비교한다.



(a)



(b)



(c)

그림 9. 실제 수두값과 보간에 의한 수두값의 비교

그림 9는 그림 7을 모형으로 수치모의한 보간 없는 수두값과 그림 8을 모형으로 보간을 하여 얻어진 수두값을 비교한 것이다. 보간방법들중 선형보간방법 즉 선형 시간 보간, 선형 공간 보간방법보다는 입방 보간방법이 더 해에 근접한 값을 나타남을 알 수 있다. Wave speed adjustment는 보간방법의 특성상 Courant Number가 1보다 많이 작아질수록 그림 9에서처럼 실패와 많은 차이를 보여준다. 수치모의 결과값이 나오는 계산시간은 선형보간방법과 파속도 조정방법보다 입방 보간방법이 계산상의 복잡성으로 인해 이 더 많은 시간을 요함을 알 수 있었다.

5. 결론

본 연구에서는 부정류해석을 위한 특성선방법과 특성선방법의 제약조건으로 인한 보간방법으로 미지점 선형 시간 보간, 기지점 선형 시간보간, 선형 공간 보간, 파속도 조정, 입방 공간 보간, 입방 시간 보간을 제시하고 비교하였다. 입방 보간방법이 다른방법에 비해 많은 시간을 요하지만 비교적 정확한 해에 근사하는 것을 알 수 있었다. 그러나 경우에 따라 입방보간법의 불안정성도 보이고 있어 차후 더 많은 연구가 필요할 것으로 생각된다. 정확한 부정류 해석을 하기 위해서는 보간방법의 설정뿐만 아니라 수치모의를 하기 위한 관망의 재구성도 필요하다. 복잡한 관망에서는 가능한 한 Crout Number가 1에 근접할 수 있도록 관망을 재구성하고 적절한 보간방법을 선정하여 수치모의를 한다면 신뢰성 있는 부정류해석을 할 수 있다.

6. 참고문헌

- Chaudhry, M. H., and Hussaini, M. Y. (1985). "Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Waterhammer Analysis." *J.Fluid Eng.*, Vol. 107, No.4, pp.523-529.
- Chen, L.C., and Liggett, J.A., "Inverse transient analysis in pipe networks." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 8, pp. 934-955, 1997.
- Elansary, A.S., Chaudry, M.H., and Silva, H., "Numerical and experimental investigation of transient pipe flow." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 32, No. 5, pp. 689-706, 1994.
- Ghidaoui, M.S., and Karney, B.W. (1994). "Equivalent Differential Equations in Fixed-Grid Characteristics Method." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 10, Oct., pp. 1159-1175.
- Karney, B. and McInnis, D., "Efficient calculation of transient flow in single pipe network." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 118, No. 7, pp. 1014-1030, 1992.
- Karney, B. and McInnis, D., "Efficient valve representation in fixed-grid characteristics method." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 8, pp. 709-718, 1997.
- Roberson, J., Cassidy, J., and Chaudhry M.H., *Hydraulic engineering*. Boston Graphics, Inc., 1993.
- Wylie, E.B., and Streeter, V.L., *Fluid transients*. FEB Press, Ann Arbor, Mich., 1982.