

# MacCormack기법을 이용한 하천흐름의 동수역학적 해석

한건연\* · ○김동구\*\* · 이홍래\*\*\*

## 1. 서론

수학적 모형 중 하천에서의 부정류를 포함한 흐름 문제를 해석하는데 널리 사용되는 것은 1차원 모형이다. 1차원 모형은 전체적인 수리 현상에 대해서는 비교적 합리적으로 계산결과를 제시하고 있으나 1차원 해석이 갖는 약점 때문에 경계조건이 복잡하거나 흐름의 양상이 다양하게 변하는 구간에서는 해석상 많은 어려움이 있다. 따라서, 하천에서의 유동현상에 대한 정확한 해석을 위해서는 1차원 해석만으로 부족하며 2차원 해석이 수반되는 모형이 필요로 하게 된다. 이에 본 연구에서는 기체 동역학 분야에서 적용되어 그 활용도가 입증된 MacCormack 기법을 도입하여 흐름에 대한 1차원 및 2차원 해석을 수행하여 일관성있는 흐름 모형으로 제시하였다.

## 2. MacCormack 기법에 의한 동수역학적 해석

### 2.1 1차원 MacCormack 기법

#### 2.1.1 기본방정식

자연하천에서 흐름의 1차원 부정류 해석을 위한 Saint-Venant 식은 식 (1), (2)에서와 같이 연속방정식과 운동방정식으로 구성된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gI_2 + gA(S_0 - S_f) \quad (2)$$

$$\text{여기서, } I_1 = \int_0^{h(x,t)} [h(x,t) - \eta] b(x,\eta) d\eta \quad (3)$$

$$I_2 = \int_0^{h(x,t)} [h(x,t) - \eta] \left[ \frac{\partial b(x,\eta)}{\partial x} \right] \Big|_{h=const.} d\eta \quad (4)$$

---

\* 경북대학교 토목공학과 교수

\*\* 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 연구원

\*\*\* 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 선임연구원

식 (1), (2)을 벡터의 보존형으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (5)$$

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_\rho) \end{pmatrix}$$

### 2.1.2 유한차분방정식

본 연구에서는 식 (1), (2)를 해석하기 위해서 MacCormack 유한차분기법을 적용하였다. MacCormack 기법의 적용은 다음과 같이 두단계로 구성할 수 있다.

첫 번째 단계로서, predictor 부분에 후방차분법이 사용되고 corrector 부분에 전방차분법을 사용하며, predictor 부분에서 결정된 변수값은 corrector 부분에서 사용된다. 두 번째 단계로서, 전방차분법이 predictor 부분에서 사용되고, 후방차분법이 corrector 부분에서 사용된다. 일반적으로 추천하는 과정은 번갈아 가며 두 가지 방법을 사용하는 것이다. 식 (5)의 Saint-Venant 식에 대한 1차원 MacCormack 기법의 적용을 수식으로 나타내면 식 (6)~(12)과 같이 기술된다.

Predictor과정의 식

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^* - U_i^k}{\Delta t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_i^k - F_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (7)$$

$$U_i^* = U_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^k - F_{i-1}^k) - S_i^k \Delta t \quad (8)$$

Corrector과정의 식

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{**} - U_i^k}{\Delta t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^* - F_i^*}{\Delta x} \quad (10)$$

$$U_i^{**} = U_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^* - F_i^*) - S_i^* \Delta t \quad (11)$$

$$U_i^{k+1} = \frac{1}{2} (U_i^* + U_i^{**}) \quad (12)$$

## 2.2 2차원 MacCormack 해석

### 2.2.1 기본방정식

수심평균치를 취한 2차원 천수방정식은 자유수면을 가진 물의 운동을 기술하는 3차원 Navier-Stokes식을 수심방향으로 적분함으로써 유도될 수 있는데 이를 위하여서는 연직방향의 속도항은 무시하여 정수압 분포로 처리하는 가정이 필요로 한다. 일반적으로 하천에서의 흐름의 경우, 난류 성분에 기인한 운동량의 확산을 기술하는 항은 천수방정식에 있어 나머지항과 비교하

여 무시될 수 있는데, 정교한 난류형 모형을 이러한 경우에 대하여 적용하는 것은 그 가치가 상대적으로 적은 것으로 나타나 있다. 2차원 천수방정식을 각각 식 (13)~(15)과 같은 연속방정식과 운동방정식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = E_x \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = E_y \quad (15)$$

### 2.2.2 유한차분방정식

MacCormack 기법은 복잡한 유한차분 연산자를 보다 간단한 순서로 나누어 놓은 fractional-step 방법으로서 그 과정은 각 시간 간격마다 계산 횟수를 줄여주고 연산자의 대칭적 순서를 이용할 경우 시간과 공간에 대해 2차의 정확도를 나타낸다.

MacCormack 기법에서 격자  $(i, j)$ 에서  $(n+1)\Delta t$  시간대에서의 해는 다음 과정을 적용함으로써 얻을 수 있다.

$$U_{i,j}^{n+1} = L_x(\Delta t_x)L_y(\Delta t_y)L_y(\Delta t_y)L_x(\Delta t_x)U_{i,j}^n \quad (16)$$

식 (16)에서 각 연산자는 predictor-corrector 과정으로 구성되며, 천수방정식에 대한  $L_x$ 연산자는 다음과 같이 기술될 수 있다. 이제  $L_x$ 연산자에서는 y 방향의 미분이 없는 것처럼 해서  $\Delta t_x$ 에 의 해 해가 구해지고,  $L_y$ 연산자도 똑같이 고려할 수 있다. 두 연산자에서 predictor에서는 후방 차분법을 사용하고 corrector에서는 전방 차분법을 사용하였다. 그러나, 수치실험 결과에서 식 (16)을 다음 방식에 따라 수행해야 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

1차 $L_x$ 연산자	Predictor과정 : 후방차분 Corrector과정 : 전방차분
1차 $L_y$ 연산자	Predictor과정 : 후방차분 Corrector과정 : 전방차분
2차 $L_y$ 연산자	Predictor과정 : 전방차분 Corrector과정 : 후방차분
2차 $L_x$ 연산자	Predictor과정 : 전방차분 Corrector과정 : 후방차분

### 3. 1차원 MacCormack 기법의 적용

#### 3.1 댐파괴류의 경우

이 수치실험은 마찰 없는 수평수로에서 댐의 순간적 파괴를 모의 수행하는 것이다. 그림 1은 댐 파괴류 해석을 위한 초기자료를 나타낸다. 그림 2는 파의 선단부에서 일어나는 수치동요를 막기 위해 인위 감쇠항을 모형에 추가하여 그 적용성을 평가해 본 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 선단부에서의 수치동요가 감쇠되는 것을 볼 수 있다. 본 MacCormack 모형에서는 양해기법의 단점인 선단부의 과도한 수치동요는 보여주지 않았다. regulation factor  $k$ 의 값을 0에서 0.8까지 변화시켜 본 결과 값이 커질수록 수치동요에 대한 조절 능력이 미세하게 향상되는 것으로 사료된다. 그림 3(a)와 3(b)는 계산 시간 30초와 60초에서의 계산해를 특성선에 의한 해석해와 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 해가 거의 일치함을 볼 수 있다.

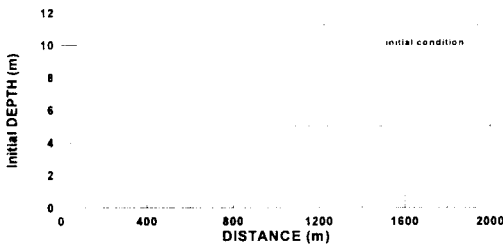


그림 1. 초기조건

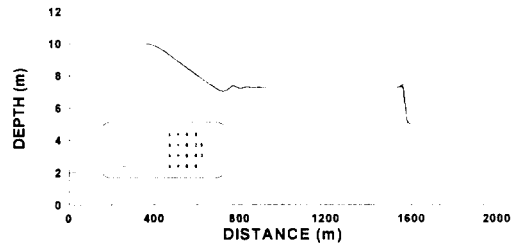
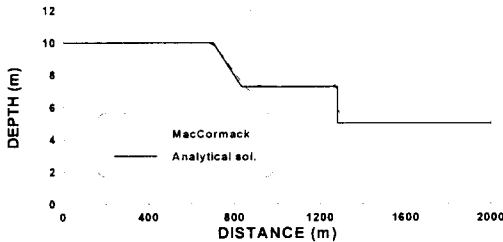
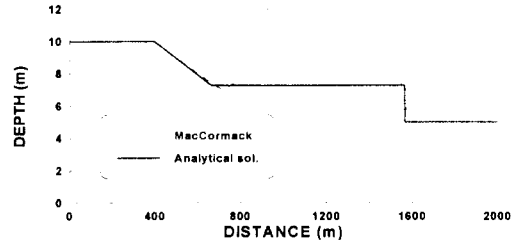


그림 2. 다양한  $k$  값에 따른 수위 양상



(a)  $t=30$  sec



(b)  $t=60$  sec

그림 3. 댐파괴파의 전파

#### 3.2 균일단면의 경우

본 연구는 실제 하도에 대한 적용성을 평가하기 앞서 모형이 단순한 가상하도에서 어떻게 적용되는지 알아보기 위한 것이다. 그림 4와 5는 가상하도에 대한 모의수행 결과로서 계산된 유량수문곡선과 수위수문곡선을 나타내고 본 모형에서 수행된 결과를 NETWORK (Fread, 1985) 모형과 비교한 것이다. 전체적인 양상이나 세부적인 수치를 비교한 결과, 비교적 정확하게 일치되는 것으로 나타났다. 단지 양해기법의 단점인 조건에 따른 안정성 문제가 부분적으로 나타났고 계산거리 간격은 음해기법중 Preissmann 기법을 사용한 기존의 NETWORK 모형보다 약 3~4배의 구간으

로 세분해야만 해석결과가 안정되게 수렴하였다.

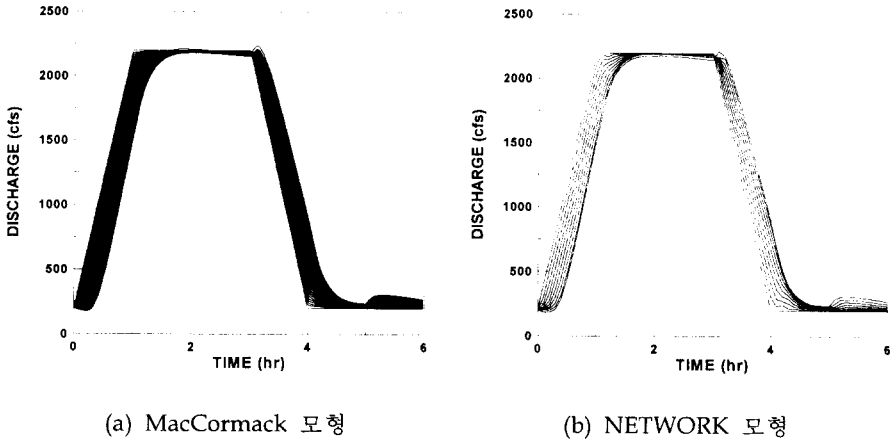


그림 4. 균일단면에서의 계산된 유량의 비교

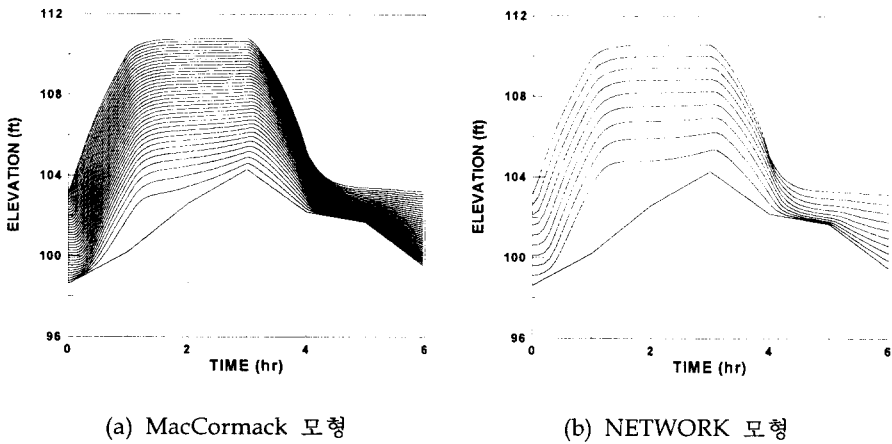


그림 5. 균일단면에서의 계산된 수위의 비교

#### 4. 2차원 MacCormack 기법의 적용

본 수치실험의 목적은 자유수면 흐름에서의 비선형 난류향으로 인한 순환현상을 모의하기 위함이다. 그림 6(a)은 모의 수행 30 초 후의 유속에 관해 나타낸 것이다. 상류단 유입부의 흐름이 저수지에 영향을 미치기 시작하였고 수로와 저수지가 접속되는 부분에서 유입된 유량의 영향으로 수환류가 발생하였고 시간이 경과함에 따라 순환류가 저수지 내부로 이동하였다. 발생한 순환류는 안정되면서 순환류의 영역의 점차 확대되는 것을 알 수 있다. 그림 6(b)는 1000 초 후의 유속과 수위를 도시한 것이다.

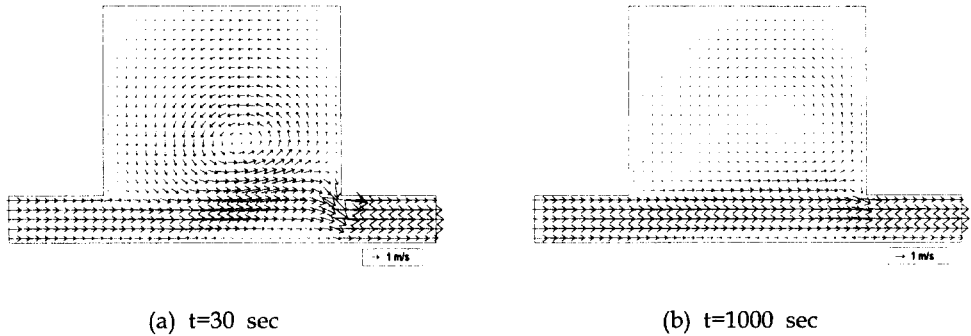


그림 6. 하도-저류 시스템에서의 속도벡터

#### 4. 결론

자유수면을 가진 1차원 흐름해석을 위해서 Saint-Venant 식에 대한 MacCormack 해석을 실시하였고 2차원 흐름해석을 위해서 천수방정식에 대한 MacCormack 해석을 실시함으로써, 1, 2차원에 대해 일관성 있는 수치해석기법으로 제시하였다. 1차원 MacCormack 모형은 정진동 수치실험, 댐 파괴류 등에 적용하여 해석해와 비교를 실시하였다. 균일하도에서 홍수파 해석에 적용하고 그 결과를 기존의 NETWORK 모형과 비교함으로써 본 연구 모형의 적용성을 입증하였다. 2차원 MacCormack 모형은 하도-제내지 시스템, 단면 급축소부, 댐 파괴류에 대한 모의는 합리적으로 수행될 수 있었다.

#### 5. 참고문헌

- Chaudhry, M.H. (1993). *Open-Channel Flow*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Fennema, R.J. (1985). "Numerical Solution of Two-Dimensional Free-Surface Flows." Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, Washington State University.
- Garcia, R., and Kahawita, R.A. (1986). "Numerical solution of the Saint Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 6, pp. 259-274.
- Jin, M., and Fread, D.L. (1997). "Dynamic flood routing with explicit and implicit numerical solution schemes." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 123, No. 3, pp. 166-173.
- Stoker, J.J. (1957). *Water waves*, Interscience, Wiley, New York, NY.
- Zhang, W., and Schmid, B.H. (1994). "Numerical simulation of rapidly varying flows in nonprismatic channels." *2nd International Conference on River Flod Hydraulics*, York, 22-25 March, 1994, England, pp. 337-346.