

유한요소법을 이용한 난류유동해석

문창호 * · 황상무 **

The Turbulent flow analysis by the Finite Element Method

Moon Chang-Ho * · Hwang Sang-Moo **

Abstract

The Streamline Upwind Petrov-Galerkin(SUPG) finite element method is used to solve the two-dimensional laminar and turbulent flows. The flow is simulated by averaged Navier-Stokes equations with a penalty function approach and the logarithmic ($k - \epsilon$) turbulent model is employed to take into account its turbulent behavior. The near-wall viscous sublayer model is employed to approach the dominant viscous effects in the near wall zones. To find a good-enough initial guess of the Newton-Raphson iteration solving Nonlinear Matrix, the Incremental method is considered for momentum and the Incomplete logarithmic turbulent equations for Turbulence. The validation of our method is investigated in comparison with published experimental data.

Key Words : Finite Element Method, Logarithmic turbulent equation, Near-wall viscous sublayer model, Initial Guess

1. 서론

유한요소법은 층류 및 난류 유동문제를 풀기 위해 최근 널리 이용되어 왔다. 특히 난류유동의 물리적 성질을 묘사하기 위해 추가적인 편미분 방정식, 경계조건 등의 난류모델이 사용되므로 난류 유동을 해석하는 것은 층류유동을 해석하는 것보다 더 어렵다. 이러한 난류모델에는 0-, 1-, 2- 방정식 모델과 2차분류 모델(second-order closure model) 등이 있으며, 2-방정식 $k - \epsilon$ 모델이 가장 보편적으로 사용되어 지고 있다. [1]

본 연구에서는 Navier-Stokes, 난류방정식들을 해석하기 위해 빠른 대류 유동에 대한 높은 수렴성과 정확성을 나타내는 SUPG 유한요소법을 사용하였고, 난류모델로서 $k - \epsilon$ 방정식의 변형인 Ilinca [2] 등에 의한 $\kappa - \epsilon$ 방정식과 FIDAP [3]에 기술된 점성내층 모델(Near-wall viscous sublayer model) 을 채택하였다. 또한 뉴튼 반복법의 수렴반경을 높이기 위해 초기해를 구하는 방법으로 밀도중분법과 불완전한 난류방정식의 사용을 제시하였다.

* 포항공과 대학교 대학원

** 포항공과 대학교

2. 이론적 배경

2.1 지배방정식

점성 뉴턴 유체의 정상상태 2차원 난류유동의 지배방정식은 아래와 같다.

- 비압축성 $u_{i,i} = 0$
선형 사각형 요소(bilinear quadrilateral)는 가상의(spurious) 압력모드를 생성할 수 있으므로 벌칙 상수 $\lambda(10^5 \sim 10^6)$ 를 도입하는 벌칙 방법을 사용하였다.
즉 $P = -\lambda u_{k,k}$.
- 운동량 방정식 $\rho u_{i,j} u_j = \sigma_{ij,j} + f_i$
여기서 $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \sigma_{ij}'$, $\sigma_{ij}' = 2\mu_e \epsilon_{ij}$, $\mu_e = \mu_l + \mu_t$, $P = p + \frac{2}{3}\rho k$
- 전달 방정식
 k, ϵ, μ_t 는 모두 그 정의로부터 양(positive)이나, $k - \epsilon$ 난류 방정식으로부터 구한 수치해는 항상 이 성질을 보장하지 않는다. 만약 수치해가 음이라면, 이로부터 구해진 속도장은 더 이상 실제현상을 반영하지 않는다. 이를 위해 Ilincă [2] 등은 k 와 ϵ 등의 자연로그인 $\kappa (= \log k)$ 와 $\epsilon (= \log \epsilon)$ 을 도입했다.

난류운동에너지 전달방정식

$$\rho u_j \kappa_{,j} = [(\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \kappa_{,j}]_{,j} + (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) [\kappa_{,j}]^2 + \mu_t e^{-\kappa} S(u) - \rho^2 C_\mu C_D \frac{\epsilon^\kappa}{\mu_t} - \frac{2}{3} \rho u_{j,j}$$

난류운동에너지 소산율 전달방정식

$$\rho u_j \epsilon_{,j} = [(\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}) \epsilon_{,j}]_{,j} + (\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}) [\epsilon_{,j}]^2 + \rho C_{\epsilon_1} C_\mu S(u) e^{\kappa - \epsilon} - \rho C_{\epsilon_2} e^{\epsilon - \kappa} - \frac{2}{3} \rho C_{\epsilon_1} u_{j,j}$$

$$\text{여기서 } S(u) = (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j}, \\ \mu_t = \rho C_\mu e^{2\kappa - \epsilon}.$$

위의 방정식의 상수들은 Launder와 Spalding(1974) [4] 에 의해 제시된 값을 사용하였다. ; $C_\mu = 0.09, C_D = 1.0, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, C_{\epsilon_1} = 1.44, C_{\epsilon_2} = 1.92, \kappa^* = 0.41$

2.2 벽층 경계조건

$\kappa - \epsilon$ 모델을 사용하여 난류를 풀 때 난류효과가 전 영역에 대해 미치는 것으로 가정한다. 그

려나, 점성효과가 크고 유동변수들이 급격하게 변화하는 벽층에서는 수일이 많은 요소를 두지 않는 한 이 가정은 성립되지 않는다. 이를 위해 FIDAP [3] 등에 제시된 점성내층모델(Near-wall viscous sublayer model)을 사용한다.

속도계산을 위해 벽으로부터 한개의 요소를 가정하고, 벽으로부터의 수직거리, k, ϵ 등에 따라 변화하는 벽으로부터 수직방향 형상함수(shape function)를 가정한다.

$$\varphi_1(n) = 1 - A(n), \varphi_2(n) = A(n) \\ A(n) = \frac{A_1(n)}{A_2(=A_1(n=1))}$$

벽층요소의 절점의 난류점도 μ_t 는 $\rho l_m^2 S(u)^{1/2}$ 으로 가정한다. 여기서 l_m 은 Van Driest mixing length 이고, δ 는 벽으로부터의 수직거리이다. 또한 이 절점의 κ, ϵ 경계조건은 $\frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0, \epsilon = \frac{3}{4} \ln(C_\mu) - \ln(\kappa^* \delta) + \frac{3}{2} \kappa$ 이다.

2.3 해를 구하는 방법

1. 속도장의 초기해를 구한다.;
뉴턴반복법의 수렴반경을 넓히기 위해 밀도를 하중계수로 가정하여 낮은 Re 수(낮은 밀도)에서 초기해를 구한 다음, 그 해를 다음 증분된 Re 수에서의 초기해로 가정하여 최종적으로 문제의 초기해를 구하는 증분법(incremental method)를 사용한다. 난류 점도는 0으로 가정한다.

2. 난류점도를 위한 난류변수 k, ϵ 을 구한다.;
 $\kappa - \epsilon$ 방정식의 해는 난류변수들의 양인 성질을 만족하나, κ, ϵ 모두 로그함수이므로, 대개의 경우 사용하는 0인 초기해를 가정할 수 없고, 방정식내에 지수함수가 포함되어 있어 작은 변화에도 발산하는 경향을 보이므로 적절한 초기해가 반드시 필요하다. 이에 본 연구에서는 아래와 같은 불완전한 $\kappa - \epsilon$ 방정식의 해로부터 초기 난류점도, k, ϵ 등을 구하였다.

$$\rho u_j \kappa_{,j} = [\mu_l \kappa_{,j}]_{,j} - \frac{2}{3} \rho u_{j,j} \\ \rho u_j \epsilon_{,j} = [\mu_l \epsilon_{,j}]_{,j} - \frac{2}{3} \rho C_{\epsilon_1} u_{j,j}$$

3. 초기난류점도로부터 구한 유효점도(μ_e)와 1.에서의 초기해로부터 속도장을 구한다.

4. 3.의 속도장으로부터 완전한 난류방정식을 풀어 다시 난류변수들을 결정한다.

5. 속도장과 난류점도가 일정한 수렴조건을 만족할 때까지 속도장과 난류변수들을 반복적으로 계산한다.

3. 수치적 결과

3.1 1 차원 사각덕트

정상상태 완전발달된 사각덕트내의 유동($Re = 1500$)을 3400개의 요소를 사용하여 해석하였다. 속도장은 엄밀해와 일치하며(그림1), 완전발달된 유동내의 압력구배는 유동방향을 따라 선형적으로 감소하며, 유동의 수직방향으로 일정함을 해석은 잘 나타내고 있다(그림2). 이로부터 선형사각형요소와 가상의 압력구배를 억제하기 위해 사용한 벌칙접근법이 타당함을 알았다.

3.2 back-ward facing 단유동

- 층류 ; M.K.Denham과 M.A.Patrick [5]에 의한 Re 수 73의 실험에 대해 3400개의 요소를 사용하여 해석하였다. 유동방향 x 에 따른 속도 U_x 의 분포는 실험치와 일치함을 알 수 있다(그림3). 이로부터 층류에 있어서도 난류를 위해 고려했던 점성내충모델(단, 벽 Re 수인 y^+ 는 난류(30.0)와는 달리 3.275로 가정하였다.)을 사용할 수 있음을 알았다.
- 난류 ; M.K.Denham, P.Briard와 M.A.Patrick [6] 등에 의한 Re 수 3025인 실험을 4420개의 요소를 사용하여 해석하였다. 난류해석을 하지 않은 경우에는 유동방향을 따라서 실험과 큰 차이를 보인 반면, 난류해석은 실험의 재접촉위치($\frac{x}{h} \approx 6$ 에 대해 5로 다소 오차를 보였다. 이는 다른 문헌[7]에서도 마찬가지이다.)를 제외한 속도분포에서는 실험과 거의 일치함을 볼 수 있었다(그림4). 그림(5)에서 유동방향으로의 난류강도($T_i = \frac{\sqrt{u_i'^2 + v_i'^2}}{U_o}, k = \frac{3}{2}(U_o T_i)^2$)는 벽근처를 제외한 대부분의 영역에서 실험과 차이가 작음을 볼 수 있었다. 재접촉점 및 벽근방에서의 난류강도의 차이를 줄이기 위해 요소의 크기 및 증분방법들을 변화시켜 보았으나, 그 차이를 줄일 수 없었다. 이는 근본적으로 높은 Re 수의 $\kappa - \epsilon$ 모델에 기인한 것으로 간주된다.

4. 결론 및 고찰

유한요소법을 이용한 본 연구의 방법들(벌칙접근법, 벽근방점성내충모델, 뉴턴반복법의 초기치를 위한 밀도증분법 및 불완전한 난류방정식의 사용 등)은 층류 및 난류유동에 대해 비교적 정확하게 적용될 수 있음을 알았다.

이 연구는 연속주조공정의 해석을 위한 기초 연구로서 수행되었고, 앞으로도 이를 위해 더 많은 연구가 수행될 것이다.

참고 문헌

- [1] R.M.Smith(1984)
Inter. J. for num. meth. in fluids, vol 4, pp303-319
- [2] Ilinca.F. & D. Pelletier (1998)
AIAA 36(1), 44-50
- [3] FIDAP Theoretical manual
- [4] B.E. Launder & D.B. Spalding (1972)
Mathematical Models of Turbulence(6th ed.), London:Academic Press
- [5] M.K.Denham & M.A.Patrick (1974)
Trans.Instit.Chem.Engrs 52(4),pp361-367
- [6] M.K.Denham,P.Briard & M.A.Patrick (1975) J.Phys.E.:Scient.Instr.8,pp681-683
- [7] C.E.Thomas,K.Morgan & C.Taylor (1981) Computers and Fluids, vol 9,pp265-278

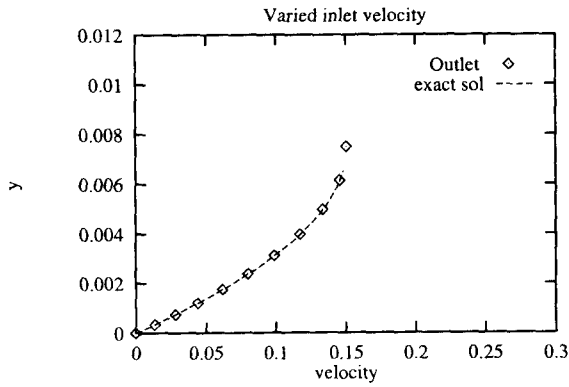


그림 1: 엄밀해와 해석의 x 방향 속도비교

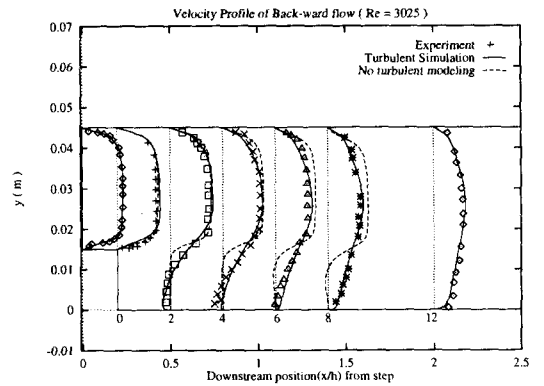


그림 4: 난류; 실험과 해석의 x 방향 속도비교

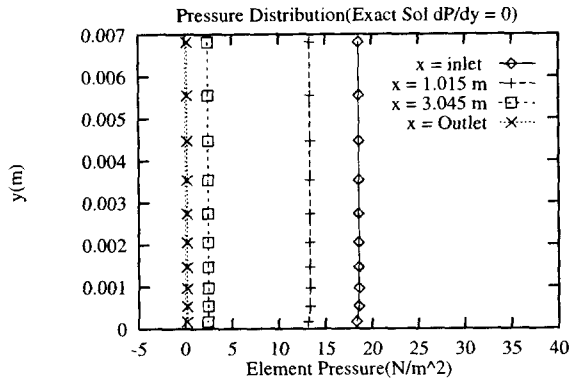


그림 2: 사각덕트내의 x 방향 압력구배

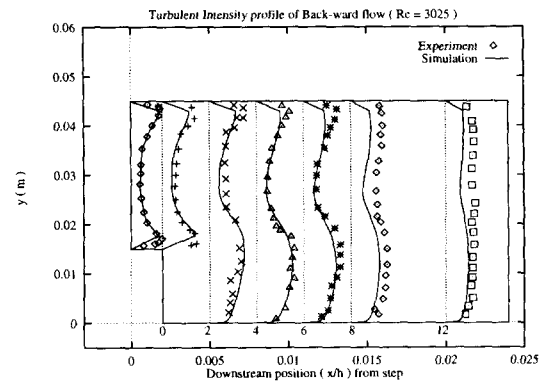


그림 5: 난류; 실험과 해석의 난류강도비교

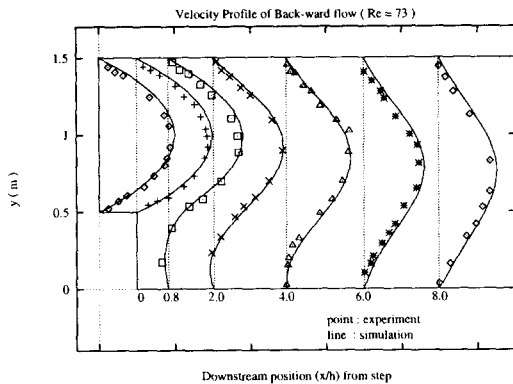


그림 3: 층류; 실험과 해석의 x 방향 속도비교