

# 헬리컬 기어의 금형변형 및 탄성회복에 대한 유한요소해석

박용복\*, 양동열\*\*

## Finite Element Method on Die Deformation and Elastic Spring-Back Analysis for Product of Helical Gear

By Park Yong-Bok and Yang Dong-Yol

### Abstract

The elastic stress analysis of the die for helical gear forging has been calculated by using the nodal force at the final stage obtained from the rigid-plastic finite element analysis. In order to obtain more precise gear products, the elastic analysis of the die after release of punch and the elastic spring-back analysis of product after ejection have been performed, and the final dimension of the computational product has been in good agreement with that of the experimental product.

**Key Words** : Precision Cold Forging, Helical gear, Finite Element Method, Recurrent Boundary Conditions, Elastic Stress Analysis, Spring Back, Ejection

### 1. 서 론

Park 과 Yang<sup>(1)</sup>은 헬리컬 기어의 냉간 단조 해석에 소위 반복 경계 조건을 도입함으로써 한 개의 치형 해석만으로 전체를 해석하는 것과 동일한 결과를 얻으면서도 계산시간에 있어서 획기적인 단축을 가져온 바 있다.

헬리컬 기어의 금형에 대한 해석은 일부에서 시도한 바 있으나 금형 치형 한 개만을 해석할

때의 부정확한 경계조건으로 인하여 실제 상황을 제대로 반영하지 못하고 있다. 본 논문에서는 제품의 변형 해석을 위하여 저자<sup>(1)</sup>에 의해 도입된 반복 경계 조건을 이용하여 금형과 제품 치수 회복에 대해 정확하면서도 효율적인 계산을 수행하고자 한다.

### 2. 형상반복면에 대한 반복 경계조건의 부가

일반적으로 많은 문제들이 대칭면을 가지고 있

\* 공주대학교 공과대학 기계공학부

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

고 그 대칭면에 적절한 경계조건을 부가함으로써 계산시간이 상당히 감소된다. 그러나 해석하고자 하는 형상의 대칭면에서 해석장의 변수가 일정한 값으로 부가되지 않고 단지 반복면들에 대한 관계만 주어질 경우 그에 따른 경계조건을 부가하여 줄 필요가 있다.

트로코이달 헬리컬 기어의 압출에 대한 해석의 경우<sup>(2)</sup> Fig.1의 기어 단면을 보면 전체 영역의 1/8만이 계산시간을 최소화하기 위해 고려된다. Z-축의 임의의 위치에서 X-Y단면은 내부 영역 Ω와 3개의 경계면 Γ<sub>1</sub>, Γ<sub>2</sub>, Γ<sub>3</sub>로 이루어져 있다.

Γ<sub>1</sub>과 Γ<sub>2</sub>의 반복면 위에서 서로 마주보는 동일한 위치에 있는 절점의 속도 경계조건은 반복각 θ<sub>r</sub>만큼 변환된 좌표계에 대해 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_{\Gamma_1} = \mathbf{V}_{\Gamma_2} \quad (1)$$

탄성 해석에 대한 잘 알려진 유한요소법은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{V} = \mathbf{R} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} [K_{\alpha\alpha}] & [K_{\alpha\Gamma_1}] & [K_{\alpha\Gamma_2}] & [K_{\alpha\Gamma_3}] \\ [K_{\Gamma_1\alpha}] & [K_{\Gamma_1\Gamma_1}] & [K_{\Gamma_1\Gamma_2}] & [K_{\Gamma_1\Gamma_3}] \\ [K_{\Gamma_2\alpha}] & [K_{\Gamma_2\Gamma_1}] & [K_{\Gamma_2\Gamma_2}] & [K_{\Gamma_2\Gamma_3}] \\ [K_{\Gamma_3\alpha}] & [K_{\Gamma_3\Gamma_1}] & [K_{\Gamma_3\Gamma_2}] & [K_{\Gamma_3\Gamma_3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta V_{\alpha}] \\ [\Delta V_{\Gamma_1}] \\ [\Delta V_{\Gamma_2}] \\ [\Delta V_{\Gamma_3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{\alpha}] \\ [R_{\Gamma_1}] \\ [R_{\Gamma_2}] \\ [R_{\Gamma_3}] \end{bmatrix}$$

반복면 Γ<sub>1</sub>과 Γ<sub>2</sub>에서 식(1)에 의해 식(2)에서의 속도 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{V} = \begin{bmatrix} [\Delta V_{\alpha}] \\ [\Delta V_{\Gamma_1}] \\ [\Delta V_{\Gamma_2}] \\ [\Delta V_{\Gamma_3}] \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{rec} \Delta \mathbf{V}_r \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_{rec} = \begin{bmatrix} [I] & 0 & 0 \\ 0 & [I] & 0 \\ 0 & [I] & 0 \\ 0 & 0 & [I] \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} [\Delta V_{\alpha}] \\ [\Delta V_{\Gamma_1}] \\ [\Delta V_{\Gamma_3}] \end{bmatrix}$$

and [I] = identity matrix

### 3. 단조 후 금형의 탄성 해석 및 제품의 탄성회복에 대한 해석

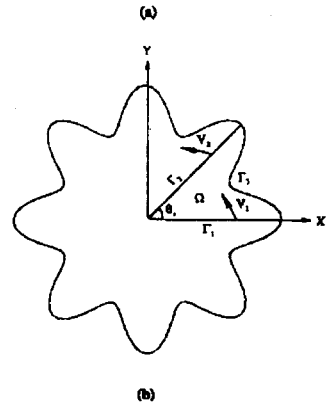
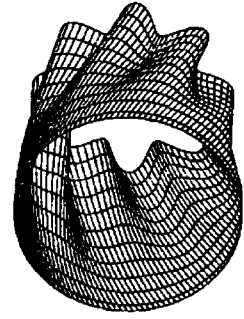


Fig.1 Velocity boundary conditions in the recurrent surface (a) die shape of a twisted trochoidal gear section; (b) recurrent boundary conditions on a section

금형설계와 관련해서 본 논문에서는 두 가지 설계요소를 고려한다. 첫째로 단조시 고하중을 받는 금형강도를 유지하기 위해 금형은 다중 보강될 필요가 있다. 둘째로 제품 정밀도는 단조 후 편차가 제거된 다음 금형의 탄성 변형과 제품 배출 후 제품치수의 탄성회복에 의해 영향을 받는다.

본 논문에서는 제품 변형 해석 결과<sup>(1)</sup>로부터 다음의 탄성해석을 수행한다.

- 단조 최종단계에서 금형 해석
  - 편차 제거 후 금형 해석
  - 제품 배출 후 제품의 탄성회복에 대한 해석
- 헬리컬 기어의 금형변형 해석을 위해서는 반복 경계 조건이 적용되어야만 한다. 강성행렬은 방정식(2)와 (3)에 의해 수정되어야 하고, 절점에

대한 외부힘 벡터는 단지 반복경계면의 한쪽면에 만 주어져야 한다. 만일 양쪽면에 주어진다면 금형은 의도된 힘의 두배를 받게 된다.

### 3.1 단조 최종단계에서 금형 응력 해석

단조 금형은 단조중의 고하중에 견디기 위하여 충분한 강도를 유지하여야 한다. 따라서 가장 큰 응력을 받는 단조 최종단계에서 금형의 응력을 계산하여 최적의 금형조건을 만족시키는 것이 필요하다.

일반적으로 금형의 유효응력(특히 원주방향의 인장응력)이 금형 재료의 항복응력을 초과하지 않도록 금형을 설계한다. 금형외경과 내경의 비가 크면 클수록 금형내에 작용하는 응력은 감소하게 되나 그 효과는 급속히 작아지며 약 4배 이상이 되면 효과가 거의 없다는 것은 널리 알려져 있다. 따라서 금형내에 작용하는 응력을 감소시키기 위하여 필요하다면 삽입링에 압축력의 예압을 작용시키는 보강링을 도입할 필요가 있다.

본 논문에서는 SKD11이 삽입링의 재료로 선택되며 SKD11의 물성치는 종단성계수  $E=210(\text{GPa})$ , 항복응력은  $1600(\text{MPa})$ 이며 포아송비는 0.3이다.

보강링이 없는 바깥 반경  $R=120(\text{mm})$ 의 금형의 경우에 Fig.2는 금형의 항복응력에 대해 유효응력의 비로 정의된 단위 유효응력(유효응력/항복응력) 분포를 보여준다. 현재의 금형해석은 금형이 탄성적으로 변형한다는 가정에 입각해 있다. 그러나 기어의 이끝부에서 유효응력이 항복

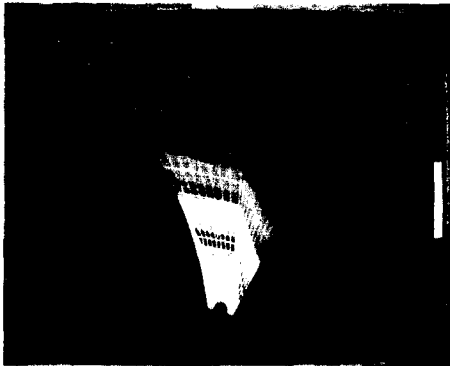


Fig.2 Distribution of the normalized effective stress of the die(without shrink ring)

응력을 초과할 것으로 예측하고 있다. 따라서 금형의 항복영역을 최대한 감소시켜 금형의 파손 및 영구변형을 방지하기 위해 한 개 또는 두 개의 보강링이 추천된다.

만일 두 개의 보강링이 사용된다면 바깥 보강링은 안쪽 보강링과 삽입링에 압축응력을 작용시키고 결과적으로 삽입링과 안쪽 보강링은 더 큰 압축 성분의 예압을 받게 되어 단조시에 항복이 지연되는 효과를 가져오게 된다. 두 개의 보강링을 사용하는 경우에 안쪽 보강링은 SKD61 강을, 바깥 보강링은 항복응력이  $110(\text{MPa})$ 인 SCM4 강이 선택되며 금형 크기는 Fig.3과 같다.

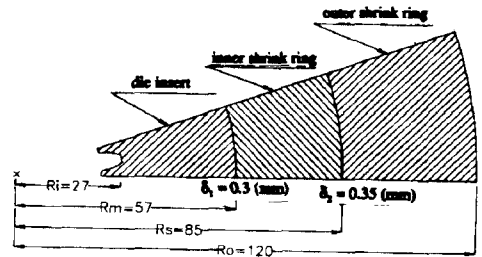


Fig.3 Helical gear forging die with shrink rings

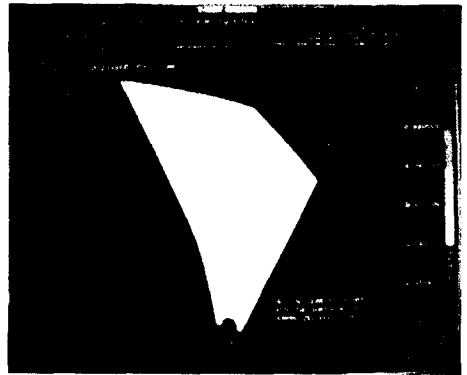
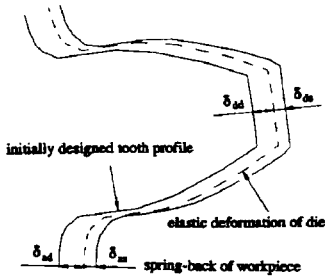


Fig.4 Distribution of the normalized effective stress of the die insert and the shrink ring(with two shrink ring)

끼워맞춤시의 금형에 작용하는 응력은 라메시(Lame's equation)에 의해 계산된다. Fig.4는 끼워맞춤시에 삽입링과 보강링에 발생한 잔류응력을 고려하여 이중보강을 하였을 때 다음식에 의



workpiece	computation (mm)		measurement (mm)
	die deformation	spring-back of workpiece	
addendum part	$(\delta_{ad})$	$(\delta_m)$	0.15
	0.139	0.039	
	sum = $\delta_{ad} + \delta_m = 0.178$		
dedendum part	$(\delta_{db})$	$(\delta_m)$	0.14
	0.117	0.046	
	sum = $\delta_{db} + \delta_m = 0.163$		

Fig.5 Computed dimensions at the middle section for the die and the workpiece, and the measurement of the workpiece

해 계산된 최종단조시의 단위 유효응력을 보여주는데 기어 이끝부의 극히 일부분을 제외하고는 거의 항복이 발생하지 않는다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^F + \sigma_{ij}^W$$

### 5.2 정밀도 평가를 위한 제품의 탄성해석

밀폐단조에서 제품의 치수는 금형의 탄성변형과 제품 배출 후의 제품치수 회복으로 금형치수보다 일반적으로 커지게 된다. 보통 단조를 완료하고 펀치가 제거된 후 금형과 제품 사이의 수직 압력은 그 때의 제품의 유효응력과 같다고 가정된다. 그러나 단조중에는 제품의 유효응력이 금형과 제품사이의 접촉압력보다 훨씬 작다. 그 결과 펀치가 제거된 후 금형은 단조중의 최대 탄성변형량보다 줄어들게 된다. 또한 제품은 금형으로부터 배출된 후 탄성회복에 의해 팽창한다. 따라서 펀치의 제거 후에 금형의 탄성해석과 제품 배출 후에 제품에 대한 탄성회복 해석이 최종적인 제품 정밀도를 평가하고 그 결과를 금형의 최

적 설계에 반영하기 위해 필요하다.

제품의 탄성회복 해석을 위한 경계조건은 펀치가 제거된 후의 금형해석을 위해 사용될 금형에 작용하는 접촉력인 제품의 유효응력의 크기로 방향이 역전되어 주어진다.

Fig.5는 금형과 제품의 축방향 중앙부에서의 기어 치수에 대해 계산과 실험 결과를 비교하여 보여주고 있다. 제품의 최종치수는 펀치의 제거 후의 금형에 대한 변형해석과 제품 배출 후의 제품에 대한 탄성회복 해석 결과의 합으로 주어진다. 계산과 실험 결과사이의 차이는 0.03(mm)이 내이다.

## 6. 결론

헬리컬 기어 단조 금형에 대한 탄성해석은 제품의 변형해석으로부터 얻어진 최종단계에서의 절점력을 사용하여 계산되었다. 보강링이 없는 경우와 보강링이 있는 경우가 비교되었으며 금형의 항복을 방지하기 위해 적절한 수의 보강링이 추천되었다.

좀 더 정확한 기어 제품을 얻기 위하여 펀치 제거 후의 금형 탄성 해석과 제품 배출 후의 제품에 대한 탄성회복 해석이 수행되었으며 계산에 의한 최종 제품 치수는 실험에서의 제품 치수와 잘 일치하였다.

## 참고문헌

- (1) Y.B.Park and D.Y.Yang, Finite Element Analysis for Precision Cold Forging of Helical Using Recurrent Boundary Conditions, 1998, Proc.Instrn.Mech. Engrs., Part B : J. of Engng. Manufacture, Vol.212, pp.231-240.
- (2) Y.B.Park and D.Y.Yang, Investigation into Non-Steady-State Three-Dimensional Helical Extrusion of Twisted Sections by the Rigid-Plastic Finite Element Method, 1997, Engineering Computations, Vol.14, No.6, pp.649-668.