일반적층배열 평판에 대한 유한요소 후처리기법

Finite Element Postprocess Method for Composite Plate with General Layups

최연진*, 조맹효 (인하대학교)

1. 서론

복합재 적층구조물의 해석시 일차전단변형이론은 전체거동을 예측하기에 적합하다. 그러나 두께방향을 통한 보다 정확한 응력해석을 위해서는 보다 세련된 모델링이 요구된다. 단순화된 고차이론[1-4] 중 Cho 와 Parmerter[4-5] 에 의해 개발된 효율적인 고차이론(EHOPT)은 응력과 변형에 대한 정확한 예측이 가능하나 이를 유한요소로 구현하였을 때[6] 처짐에 대한 C1 형상함수의 도입이 필요하며 강성행렬이 매우 복잡하다. 이를 우회하기 위한 방법으로 EHOPT의 변위장을 후처리기로 이용하고 일차전단변형이론(FOPT)의 해만을 필요로 하는 후처리기법이 제안되었다. 이러한 후처리기법은 대칭 직교평판[7]과 쉘[8]에 대해 개발되었는데 계산과정은 크게 두가지로 구성된다. 첫째, 두 이론의 전단에너지의 등가를 이용하여 FOPT와 EHOPT의 전단변형률 사이의 관계식을 구한다. 둘째, 후처리기로 쓰이는 EHOPT의 변위장을 이용하여 FOPT로부터 변형과 응력을 구한다. 본 연구의 목적은 앞서 제안된 직교대칭 적층판에서의 후처리기법을 확장하여 일반적인 적층배열의 경우에 후처리기법을 유한요소기법안에서 적용하는데 있다.

2. 후처리기로 사용된 변위장

2.1 1차전단변형이론(FOPT)

1차전단변형이론의 변위장은 아래와 같다.

$$u_\alpha = u^o_\alpha + \psi_\alpha z \;,\; u_3 = w(x_1, x_2) \tag{1}$$

여기서 u^o_α 와 w는 각각 면내변위와 기준면에서의 처짐을 나타내며 ψ_α는 기준면에서의 회전각을 나타낸다. 또한 변형률-변위관계식으로부터 횡방향 전단변형률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\gamma_{3\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} = \varphi_\alpha \tag{2}$$

2.2 효율적 고차이론(Efficient Higher Order Plate Theory)

아랫면을 기준면으로 하는 효율적 고차이론의 변위장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u^o_\alpha + \psi_\alpha z + \xi_\alpha z^2 + \phi_\alpha z^3 \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} S^k_\alpha \;\{(z - z_k)\mathrm{H}(z - z_k)\} \\ u_3 &= u(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 N 은 적층판의 개수이며, $\mathrm{H}(z - z_k)$는 단위계단함수(Heaviside unit step function)이다. 위, 아래면에서 횡전단응력의 경계조건과($\sigma_{3\alpha}|_{z=0,h} =$ 0) 층간 횡전단응력의 연속조건을 ($\sigma_{3\alpha}|_{z=z_k^+} = \sigma_{3\alpha}|_{z=z_k^-}$) 부과하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= -w_{,\alpha} \;,\; \xi_\alpha = -\frac{3h}{2}\phi_\alpha - \frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{N-1} S^k_\alpha \\ S^k_\alpha &= a^k_{\alpha\gamma}\phi_\gamma \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $a^k_{\alpha\gamma}$ 는 적층판의 재질특성과 층의 두께의 함수로 결정되는 계수이다. 따라서 고차이론의 면내변위장은 식(4)를 식(3)에 대입하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u^o_\alpha - z w_{,\alpha} + (z^3 - \frac{3h}{2}z^2)\phi_\alpha \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} a^k_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma[-\frac{z^2}{2h} + \{(z - z_k)\mathrm{H}(z - z_k)\}] \end{aligned} \tag{5}$$

또한, EHOPT의 횡전단 변형률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_{3\alpha} &= \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \\ &= 3(z^2 - hz)o_\alpha + \sum_{k=1}^{N-1} a^k_{\alpha\gamma}\phi_\gamma\{-\frac{z}{h} + \mathrm{H}(z - z_k)\} \end{aligned} \tag{6}$$

3. 회전각 변위 비교법

FOPT와 EHOPT의 횡방향 전단변형률은 각각 φ_α 와 ϕ_α 로 나타낼 수 있다. 두 이론의 횡전단 변형에너지의 등가를 가정하면 EHOPT의 회전각 변위 ϕ_α는 FOPT의 회전각 변위 φ_α로 표현할 수 있다. 그러나 두 이론의 전단에너지의 등가를 적용할 때 전단에너지의 연성관계(그림 1-2)로 인하여 두 이론의 회전각 변위의 대응이 명확히 이루어지지 않는다. 이를 해결하기 위해 EHOPT의 연계항인 $\bar{Q}_{45}$를 제거하는 좌표변환을 수행하였다. 주축의 방향은 전단강성율과 층의 두께로 표시할 수 있다. EHOPT의 횡전단에너지는 다음과 같다.

$$U_{shear}^{EHOPT} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\begin{Bmatrix}\gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{Q}_{55}^k & \bar{Q}_{45}^k\\ \bar{Q}_{45}^k & \bar{Q}_{44}^k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix}dz \tag{7}$$

연계항이 제거된 EHOPT의 전단변형에너지는 회전각 변위의 좌표변환식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}U_c^{EHOPT} &= \int_0^h \{\bar{Q}_{55}^*\phi_{1'}^2 + \bar{Q}_{45}^*\phi_{1'}\phi_{2'} + \bar{Q}_{44}^*\phi_{2'}^2\}\,dz\\ &= A_{55}^*\phi_{1'}^2 + A_{45}^*\phi_{1'}\phi_{2'} + A_{44}^*\phi_{2'}^2\end{aligned} \tag{8}$$

여기서

$$\begin{Bmatrix}\phi_{1'}\\ \phi_{2'}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}$$

$$(A_{44}^*, A_{45}^*, A_{55}^*) = \int_0^h (\bar{Q}_{44}^*, \bar{Q}_{45}^*, \bar{Q}_{55}^*)dz$$

또한, 주축의 방향(β)은 $A_{45}^* = 0$인 조건에 의해 구해진다.

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2A}{B}\right) \tag{9}$$

FOPT의 보다 정확한 해석을 위해서 전단수정계수가 도입되는데 k_1과 k_2만을 사용한다면[9-11] 두 이론의 주축의 방향이 일치하지 않으므로 전단에너지 대응이 명확히 이루어지지 않는다. 이에 본 연구에서는 두 이론의 주축의 방향이 같아지도록 하기위해 k_3를 비대각항에 넣어 전단에너지 대응이 명확히 이루어지도록 하였다.

$$U_c^{FOPT} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\begin{Bmatrix}\gamma_{13}^f\\ \gamma_{23}^f\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}k_1\bar{Q}_{55}^k & k_3\bar{Q}_{45}^k\\ k_3\bar{Q}_{45}^k & k_2\bar{Q}_{44}^k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{13}^f\\ \gamma_{23}^f\end{Bmatrix}dz \tag{10}$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{13'}^f\\ \gamma_{23'}^f\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{13}^f\\ \gamma_{23}^f\end{Bmatrix} \tag{11}$$

전단수정계수k_3는 k_1, k_2 그리고 EHOPT의 주축의 방향(β)으로 나타낼 수 있다.

$$k_3 = \frac{k_1\bar{A}_{55} - k_2\bar{A}_{44}}{2\bar{A}_{45}}\tan 2\beta \tag{12}$$

전단수정계수 k_1과 k_2는 일차이론의 평형방정식으로부터 얻은 전단에너지와 구성방정식으로부터 얻어진 전단에너지의 등가를 이용하여 구할 수 있는데 이 가정으로부터 EHOPT의 회전각 변위를 FOPT의 회전각 변위로 명확히 표현할 수 있다.

$$U_c^{FOPT} = U_c^{EHOPT} \tag{13}$$

φ_α^{EHOPT}는 선형계수 $C_{\alpha\beta}$와 일차이론의 회전각 변위 φ_α^{FOPT}의 항으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_\alpha^{EHOPT} = C_{\alpha\beta}\,\varphi_\alpha^{FOPT} \tag{14}$$

4. 면내 인장 관계식

EHOPT의 기준면은 FOPT의 기준면과 다르기 때문에 EHOPT의 면내 변위 u_α^o 를 보정해 주어야 한다. EHOPT의 면내인장 u_α^o는 FOPT의 면내변위를 두께방향으로 적분한 것에서 EHOPT의 warping부분을 제거해서 얻을 수 있다(그림 3). 일반적 층배열의 경우, EHOPT의 면내 변위장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}u_1 &= u_{11}^o - w_{,1}z + \left(z^3 - \frac{3h}{2}z^2\right)\phi_1\\ &+ \sum_{k=1}^{N-1}a_{11}^k\left\{-\frac{z^2}{2h} + (z-z_k)H(z-z_k)\right\}\phi_1\\ &+ u_{12}^o + \sum_{k=1}^{N-1}a_{12}^k\left\{-\frac{z^2}{2h} + (z-z_k)H(z-z_k)\right\}\phi_2\end{aligned} \tag{15}$$

또는 간단하게 다음과 같이 두 부분으로 나누어 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}u_1 &= \underline{u_{11}^o - w_{,1}z + F_{11}(z)\phi_1} + \underline{u_{12}^o + F_{12}(z)\phi_2}\\ &= u_{11}^{EHOPT} + u_{12}^{EHOPT}\end{aligned} \tag{16}$$

또한 이에 대응하는 FOPT의 면내변위도 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_1 = \psi_1 z + u_1^o = u_{11}^{FOPT} + u_{12}^{FOPT} \tag{17}$$

두 이론의 면내변위의 대응관계는 다음과 같다.

$$\int_0^h u_{\alpha\beta}^{EHOPT} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_{\alpha\beta}^{FOPT} dz \tag{18}$$

식(18)로부터 $u_{11}^{o\ EHOPT}$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_{11}^{o\ EHOPT} = \frac{1}{h}\{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi_1^{FOPT} z\, dz + \int_0^h (w_{,1}^{EHOPT} z - F_{11}(z)\phi_1^{EHOPT})\, dz\} \tag{19}$$

위와 같은 과정으로부터 계산된 u_{11}^o 와 u_{12}^o를 이용하여 면내 변위를 구성할 수 있으나 이렇게 구성된 면내 변위는 평판의 윗면과 아래면에서 횡전단 응력이 없다는 조건을 만족하지 못한다. 따라서 면내 평형방정식을 이용하여(그림 4) u_{12}^o 와 u_{21}^o을 보정해 주어야 한다. 면내 평형방정식은 다음과 같다.

$$N_{1,1} + N_{12,2} = 0\ ,\quad N_{12,1} + N_{2,2} = 0 \tag{20}$$

면내 평형방정식에 의하여 u_{12}^o 와 u_{21}^o는 $C_1^o u_{12}^o$ 와 $C_2^o u_{21}^o$로 개선된다. 여기서 C_1^o 와 C_2^o는 식(20)을 만족시키는 조건으로 구해지는 선형계수이다.

5. 유한요소의 정식화

FOPT의 유한요소 정식화를 위해 각각의 변수들을 절점변위와 형상함수로 나타내었다.

$$(u_\alpha^o, \psi_\alpha, w) = \sum_{i=1}^{n} (N_i u_{\alpha i}^o\ , N_i \psi_{\alpha i}\ , N_i w_i) \tag{21}$$

여기서 n은 요소에서의 절점의 개수이며 N_i는 i 번째 노드의 형상함수이다. 본 연구에서는 9절점 등매개요소를 사용하여 FOPT의 해를 구하였다. 본 후처리기법에서의 횡전단응력은 평형방정식을 이용하여 정확하게 계산된다. 그러나 평형방정식을 이용할 경우에 처짐(w)에 관한 고차미분값의 계산이 필요하게 된다. 이것이 후처리기법을 유한요소법에 적용하는 것을 어렵게 만든다. 본 연구에서는 요소의 중앙에서 계산된 2차미분값들의 차이를 이용하여 3차미분값을 계산하였다.

6. 수치예와 결과

본 연구에서는 탄성해(—)와[12] 후처리기법을 통해 나온 해(- - -)를 비교하고, 본 방법의 성능을 평가하기 위해 다음과 같은 2가지 경우의 문제를 고려한다.

Case 1 : [-30/30/-30/30] 정사각평판
Case 2 : [-45/45/-45/45] 정사각평판

두께비는 모두 4이며 재질상수는 다음과 같다.

$E_1 = 25 \times 10^6$ psi, $E_2 = E_3 = 10^6$ psi
$G_{12} = G_{13} = 0.5 \times 10^6$ psi
$G_{23} = 0.2 \times 10^6$ psi, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$

평판의 하중 및 경계조건은 그림 5에 나타내었다. 다른 여러이론과 비교하기 위하여 구해진 결과는 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$\begin{aligned}(\bar\sigma_{xx}, \bar\sigma_{yy}, \bar\sigma_{xy}) &= \frac{h^2}{q_o a^2}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) \\ (\bar\sigma_{yz}, \bar\sigma_{xz}) &= \frac{h}{q_o a}(\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) \\ (\bar u, \bar v) &= \frac{E_2 h^2}{q_o a^3}(u, v) \\ \bar w &= \frac{100 \times E_2 h^3}{q_o a^4} w\end{aligned} \tag{22}$$

12 × 12 균일메쉬가 사용되었으며 전단수정계수를 구하기 위하여 반복적인 계산방법이 사용되었다. Case 1과 2의 응력 해석 결과를 그림 6-10에서 탄성해와 비교하였다. 일차전단변형이론에 기초한 등매개 9절점 유한요소의 결과로부터 고차이론의 정확도를 거의 회복하는 변위장과 응력장을 구성할 수 있었고 해석 결과는 3차원 탄성해와 비교하여 상당히 정확함을 알 수 있다.

7. 결론

본 연구에서는 효율적 고차이론을 후처리기로 이용한 후처리기법의 해석해와 수치해를 통해서 면내변위, 면내응력, 그리고 횡방향 전단응력을 개선할 수 있음을 보였다. 또한 유한요소 정식화가 쉬운 등매개요소에 후처리기법을 적용하였고 평형방정식의 적분시 필요한 고차미분값을 2차미분값의 차이를 이용하여 계산하였다. 본 후처리기법을 유한요소에 적용하였을 때 탄성해와 비교할 만한 좋은 결과를 얻음을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 51, No. 4, 1984, pp. 745-752.

[2] Di Sciuva, M., "Bending Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic plates: An Evaluation of a New Displacement Model", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 3, 1986, pp. 425-442.

[3] Bharska, K., and Varadan, T.K., "Refinement of Higher-Order Laminated Plate Theories", *AIAA Journal* , Vol. 27, No. 12, 1989, pp. 1831-1821.

[4] Cho, M., and Parmerter, R.R., "An Efficient Higher-Order Plate Theory for Laminated Composites", *Composite Structures*, Vol. 20, 1992, pp. 113-123.

[5] Cho, M. and Parmerter, R.R., "An Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations", *AIAA Journal*, Vol. 30, 1993, pp. 1299-1307.

[6] Cho, M. and Parmerter, R.R., "Finite Element for Composite Plate Bending Based on Efficient Higher Order Theory". *AIAA Journal*, Vol. 32, 1994, pp. 2241-2248.

[7] Cho,M.andKim, J.H., "Postprocess Method Using Displacement Field of Higher Order Laminated Composite Plate Theory", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 2, 1996, pp. 362-368.

[8] Cho, M. and Kim, M.H., "A Postprocess Method Using a Displacement Field of Higher-order Shell Theory", *Composite Structures*, Vol. 34, 1996, pp. 185-196.

[9] Whitney, J.M., "Stress Analysis of Thick Laminated Composites and Sandwich Plates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 6, 1972, pp. 426-440.

[10] Whitney, J.M., "Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load", Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, 1973, pp. 302-304.

[11] Noor, A.K., and Burton, W.S., "Stress and Free Vibration Analysis of Multi layered Composite Plates", *Composite Structure*, Vol. 11, 1989, pp. 183-204.

[12] Savoia, M. and Reddy, J.N., "A Variational Approach to Three-Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, 199

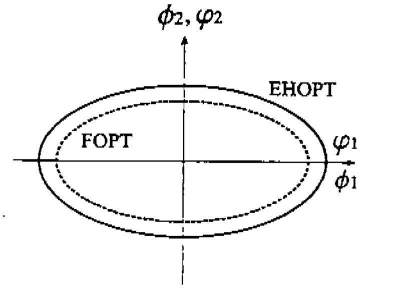

그림 1 연계성이 없는 경우의 횡전단변형 에너지

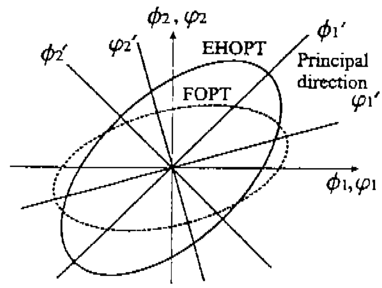

그림 2 연계성이 있는 경우의 횡전단변형 에너지

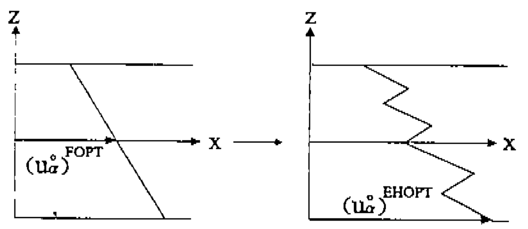

그림 3 면내 변위의 matching

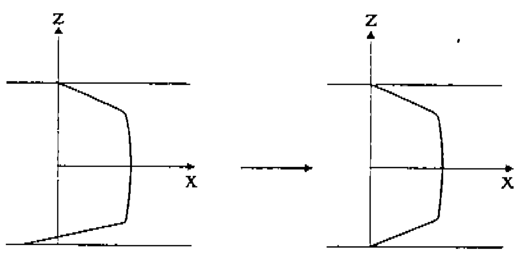

그림 4 횡전단 응력의 경계조건($N_{\alpha\beta,\beta} = 0$)

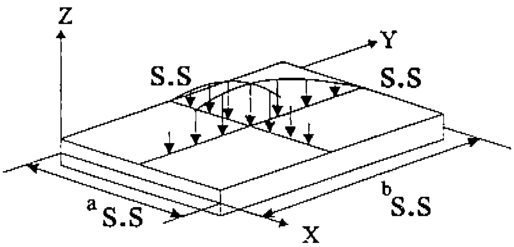

그림 5 평판의 하중 및 경계조건

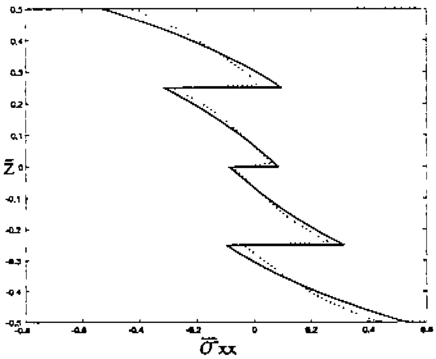

그림 6 Case1에 대한 두께방향의 면내 응력

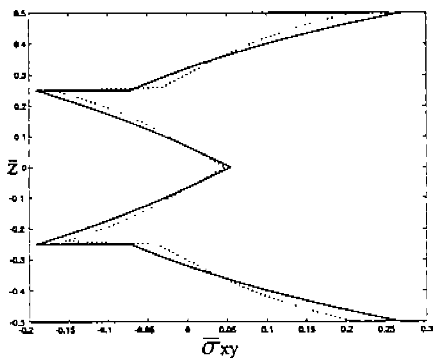

그림 7 Case1에 대한 두께방향의 면내 응력

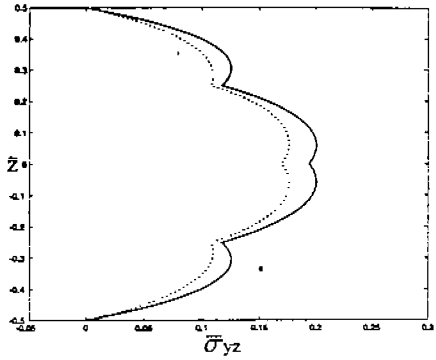

그림 8 Case1에 대한 두께방향의 횡전단 응력

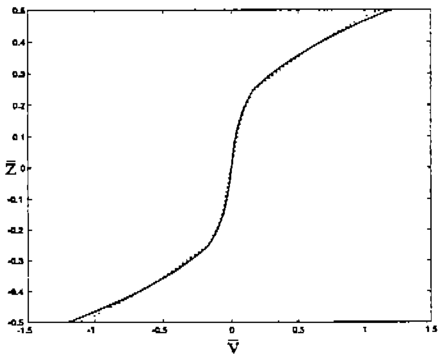

그림 9 Case2에 대한 두께방향의 면내 변위

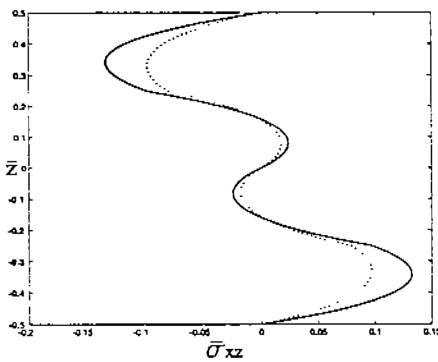

그림 10 Case2에 대한 두께방향의 횡전단 응력