

복합재 적층 평판의 요소단위 응력 복원 기법

Element Stress Recovery Technique for Laminated Composite Plates

연순창*, 조맹효 (인하대학교)

I. 서론

변위-기초의 유한요소해석이 구조 해석에 널리 쓰이는 방법임에도 불구하고, 응력은 가우스 점이나 초수렴점이라 불리우는 어떤 특정한 점에서만 정확성을 가진다. 더구나, 요소들간의 응력의 불연속은 효과적인 응력 복원을 어렵게 한다. Zienkiewicz와 Zhu가 Patch recovery technique(ZZ method)[1]을 발표한 이후 최근에, 많은 연구자들이 보다 나은 정확도를 가지는 응력 복원 기법의 개발에 관심을 가지고 있다. ZZ method를 시작으로 연구자들은 복원 응력의 정확성을 높이기 위해 요소군내에서 가정하는 응력의 차수를 높이는데 주목하고 있다. 그러나 이러한 노력은 요소군 응력 복원의 마지막 과정인 역행렬을 구하기 어렵게하는 결과를 초래하였다. 이와 같은 결과를 극복하기 위하여 ZZ method에 평형 구속 조건을 추가하고 가정하는 응력의 차수를 증가시키는 여러가지 방법들이 제안되었다.[2]~[6]

가상 일의 원리로부터 얻어진 두개의 평형 구속 조건으로부터 최소화를 위한 오차 함수에 두개의 평형 구속 조건을 적용한 요소 단위의 응력 복원 기법이 Park와 Shin[7]에 의해서 제안되었다. 이 기법은 구조물의 경계에서 응력 복원을 향상시키는 결과를 제공하였다.

본 연구에서는 탄성요소에 적용되었던 요소단위 응력 복원기법을 확장 적용하여 평판의 resultant를 향상시킨 다음 후처리 기법을 적용하여 두꺼운 적층평판의 응력을 향상시키는 방법을 제시한다. 복합재 적층평판의 경계에서의 면내방향의 응력들과 층간응력의 복원에 있어서, 면내방향 응력 복원의 향상을 위해서, 각 요소마다 독립적인 응력장을 가정하였다. Park와 Shin[7]에 의해서 개발된 2차원과 3차원 탄성 요소에서의 회복기법을 9절점 평판 요소에 확장하였다. 일차전단변형이론에 기초한 독립적으로 구성된 면내방향의 resultant만의 향상으로는 두꺼운 복합재 적층평판의 두께방향의 응력해석이 만족할 만한 향상을 기대하기는 어렵다. 그러므로 두께방향의 변형과 응력의 향상을 위해서, Cho와 Kim[8]에 의해 제시된 후처리기법을 적용하였다. 이 방법은 일차전단변형이론과 효율적고차이론의 횡전단변형에너지 등가 가정을 이용한다.[8]

II. 요소 단위 응력 복원의 정식화

결과력의 가정

각각의 평판 요소의 결과력은 다음과 같이 가정 할 수 있다.

$$\{M\}_e = [P] \{a\} \quad (1)$$

여기서 $\{M\}_e$ 는 요소 단위의 가정된 결과력 벡터이고, $[P]$ 는 다항식으로 이루어진 행렬이다. 그리고 $\{a\}$ 는 구하고자 하는 계수 벡터이다. 다섯개의 결과력을 가지는 평판 문제의 해석에서 행렬 $[P]$ 는 식(2)와 같이 표현된다.

$$[P] = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{P}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{P}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{P}_5 \end{bmatrix} \quad (2)$$

결과력 벡터는 아래와 같이 표현된다.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \\ \psi_y + w_{,y} \\ \psi_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

각각의 \bar{P}_i 는 식(4)와 같이 가정되며, 그 차수는 유한요소 해석에서 사용된 변위장의 차수와 같거나 작은 차수로 가정한다.

$$\bar{P}_i = (1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \dots), i = 1 \sim 5 \quad (4)$$

초수렴점에서의 오차 계산

요소내의 i 번째 초수렴점에서의 가정된 결과력으로 부터 계산된 $\{M\}_e$ 과 유한요소해석을 통한 얻어진 결과력 $\{M\}_f$ 의 차이는 다음과 같이 표현된다.

$$\{e\} = \{M\}_e(\xi_s, \eta_s) - \{M\}_f(\xi_s, \eta_s) \\ = [P]_e \{a\} - \{M\}_f(\xi_s, \eta_s) \quad (5)$$

위 식에서 (ξ_s, η_s) 는 극부좌표계에서의 i 번째 초수렴점의 좌표를 나타낸다.

초수렴점에서의 에너지 오차 기준은

$$\|e\|^2 = \{e\}^T [\hat{S}] \{e\} \quad (6)$$

위 식의 $[\hat{S}]$ 는 $\{\kappa\} = [\hat{S}] \{M\}$ 를 만족하는 compliance 행렬이다.

경계 선적분을 이용한 평형 오차의 계산

평형 상태에있는 평판은 다음 식에서 표현된 자중을 무시한 가상 일의 원리를 만족한다.

$$\delta\pi = \int_A \delta\{\kappa\}^T \{M\} dA - \int_s \delta\{u\}_s^T \{M\}_s ds = 0 \quad (7)$$

이때 $\delta\{\kappa\}$ 는 가상 곡률 벡터, $\delta\{u\}_s$ 는 가상 변위 벡터, $\{M\}$ 는 결과력 벡터를 나타내며 하첨자 s 는 경계에서의 각 값들을 의미한다. 그리고 적분에서 s 는 요소 경계를 따른 선적분을 나타낸다. 식(7)에서 경계를 따른 면내력 벡터 $\{M\}_s$ 는 가정한 결과력 $\{M\}_c$ 로 표현할 수 있다. 아래와 같이 식(8)로부터 경계를 따른 면내력 벡터 $\{M\}_s$ 는 가정한 결과력 벡터 $\{M\}_c$ 로 나타낼 수 있다.

$$\{M\}_s = \begin{Bmatrix} M_{nn} \\ M_{nt} \\ Q_n \end{Bmatrix} = [L]_M \{M\}_c \quad (8)$$

위 식에서 n, t 는 경계를 따른 normal과 tangential 좌표계이다. 그리고 경계에서의 변위장 $\{u\}_s$ 은 아래와 같이 절점력 $\{u\}$ 로 표현된다.

$$\{u\}_s = \begin{Bmatrix} \psi_n \\ \psi_t \\ w \end{Bmatrix} = [L]_u \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ w \end{Bmatrix} \quad (9)$$

구하고자하는 결과력은 미지수 이므로, 실제 결과력은 각 요소 내에서 가정한 결과력으로 대체할 수 있으며, 식(8)과 (9)로 면적 적분을 나타낼 수 있다. 이 결과로써 식(7)은 다음과 같이 표현된다.

$$(\delta\pi_{res})_1 = \int_{A_e} \delta\{\kappa\}^T \{M\}_c dA - \int_s \delta\{u\}_s^T [L] \{M\}_c ds = 0 \quad (10)$$

여기서 A_e 는 요소의 면적을 나타내며, 경계 형상 변환 행렬은 $[L] = [L]_u^T [L]_M$ 이다.

가상 변위 벡터 $\delta\{u\}$ 는 절점 자유도 벡터 $\delta\{U_e\}$ 로 보 간할 수 있으며, 가상 곡률 벡터 $\delta\{\kappa\}$ 는 요소 가상 자유도 절점 벡터 $\delta\{U_e\}$ 의 미분에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta\{u\} = [N] \delta\{U_e\}, \quad \delta\{\kappa\} = [B] \delta\{U_e\} \quad (11)$$

여기서 $[N]$ 은 형상 함수 행렬이다. 그리고 $[B]$ 는 곡률과 변위 사이의 연산 행렬이다. 식(1)과 (11)을 식(10)의 우변의 첫번째 항에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_{A_e} \delta\{\kappa\}^T \{M\}_c dA = \delta\{U_e\}^T \int_{A_e} [B]^T [P] \{a\} dA \quad (12)$$

식(10)의 우변 두번째 항은

$$\int_s \delta\{u\}_s^T [L] \{M\}_c ds = \delta\{U_e\}^T \int_s [N]^T [L] [P] \{a\} ds \quad (13)$$

식(12)과 식(13)를 이용하여, 첫번째 평형 오차 $(\delta\pi_{res})_1$ 를 다시 쓰면

$$(\delta\pi_{res})_1 = \delta\{U_e\}^T (C_e - D_e) \{a\} = 0 \quad (14)$$

여기서 $C_e^T = \int_{A_e} [B]^T [P] dA, D_e = \int_s [N]^T [L] [P] ds$ (15)

절점력을 이용한 평형 오차 계산

요소의 평형 상태 오차는 식(12)의 좌변을 아래와 같이 강성 행렬과 절점 변위를 이용하여 표현된다.

$$\int_{A_e} \delta\{\kappa\}^T [\hat{D}] \{\kappa\} dA = \int_{A_e} \delta\{\kappa\}^T \{M\}_c dA \quad (16)$$

식(11)과 (15)을 식(10)에 대입하면 새로운 평형 오차 $(\delta\pi_{res})_2$ 를 얻는다.

$$\begin{aligned} (\delta\pi_{res})_2 &= \int_{A_e} \delta\{\kappa\}^T [\hat{D}] \{\kappa\} dA - \int_{A_e} \delta\{\kappa\}^T \{M\}_c dA \\ &= \delta\{U_e\}^T K_e \{U_e\} - C_e \{a\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $K_e = \int_{A_e} [B]^T [\hat{D}] [B] dA$ 는 요소 강성 행렬로, 절점력 벡터 $\{F_e\}$ 는

$$\{F_e\} = K_e \{U_e\} \quad (18)$$

따라서 두번째 평형 구속 조건은

$$(\delta\pi_{res})_2 = \delta\{U_e\}^T (\{F_e\} - C_e \{a\}) = 0 \quad (19)$$

최소 자승법을 이용한 결과력의 복원

계수 벡터 $\{a\}$ 는 i 번째 초수렴점에서의 변형을 에너지 오차 $\|e_i\|$ 들과 두개의 잔류 오차 벡터 $(R_{eq})_1, (R_{eq})_2$ 의 최소 자승법을 이용한 오차의 최소화를 통하여 얻어진 다. 오차 함수 $F(\{a\})$ 는

$$\begin{aligned} F(\{a\}) &= \alpha \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \\ &= \beta (R_{eq}^T)_1 (R_{eq})_1 + \gamma (R_{eq}^T)_2 (R_{eq})_2 \\ &= \alpha \{e\}^T [\hat{S}] \{e\} \\ &+ \beta [(C_e - D_e) \{a\}]^T [(C_e - D_e) \{a\}] \\ &+ \gamma [C_e \{a\} - \{F_e\}]^T [C_e \{a\} - \{F_e\}] \end{aligned} \quad (20)$$

n 은 요소내의 초수렴점의 개수이고, α, β, γ 는 벌칙 계수이다. 오차 함수 $F(\{a\})$ 의 첫번째 항은 ZZ method[1]에서의 사용된 최소 자승 함수이고, 세번째 항은 LP method[6]에서 사용된 항이다. 두번째 항이 추가 됨으로써 요소에서 독립적인 결과력이 가정될 수 있다.

식(1)의 계수벡터 $\{a\}$ 는 식(18)을 계수벡터에 대하여 최소화함으로써 구할 수 있다. 그러므로 식(19)를 만족함으로써 실제의 결과력과 근접한 가정된 결과력을 만족하는 계수 벡터 $\{a\}$ 가 얻어진다.

$$\frac{\partial F(\{a\})}{\partial \{a\}} = 0 \quad (21)$$

위 조건은 다음과 같이 식(20)에 식(19)을 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$[RM] \{a\} = \{RV\} \quad (22)$$

여기서

$$\begin{aligned} [RM] &= \alpha \sum_{i=1}^n [P]^T [\hat{S}] [P] \\ &+ \beta (C_e - D_e)^T (C_e - D_e) + \gamma C_e^T C_e \\ \{RV\} &= \alpha \sum_{i=1}^n [P]^T [\hat{S}] \{M\}_f + \gamma C_e^T \{F_e\} \end{aligned}$$

식(21)는 역행렬을 취하기 쉬운 선형대수식이며 결과력 또는 응력의 복원이 요구되는 모든 요소에서 신뢰성 있는 해를 제공한다.

III. 후처리기법을 이용한 층간응력의 복원

항상된 면내 응력으로부터 곡률과 층립면의 변형율을 2차의 다항식의 형태로 구함으로써 두께방향에 따른 응력의 분포를 ξ 와 η 좌표계에서 나타낼 수 있으며 구한 곡률과 변형율에 후처리기법을 적용하여 두께방향의 응력의 정확도를 향상할 수 있다. 고차이론과 저차이론의 주변수들은 두 이론의 횡전단변형에너지가 같다고 가정함으로써 대응된다. 고차이론의 주변수들은 저차이론의 주변수들로 표현이 가능하여 저차이론의 해를 구함으로써 고차이론의 변위장이 저차이론의 변수들로서 쉽게 구해질 수 있다. 그러나 고차이론의 변위장에서는 w 의 1차미분이, 면내응력에서는 2차미분이, 전단응력에서는 평형방정식의 적분에서 3차 미분이 필요하다. 이는 3절점 삼각형요소 또는 4절점 요소와 같은 저차의 유한요소 해석에 후처리기법의 적용을 어렵게 한다. 고차요소를 이용한 후처리기법은 Ref.[11]에서 제공되었다. 그러나 Ref [11]에서는 인접한 요소와의 유한차분법이 이용되었다. 본 논문에서는 결과력을 요소내에서 계산하고 전단력으로부터 전단 변형각 $\gamma_\alpha = \psi_\alpha + w_{,\alpha}$ 의 2차미분을 요소내에서 구할 수 있다.

후처리기법의 개요는 다음과 같다.

고차이론과 저차이론의 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^o(x, y) + z\psi_\alpha(x, y) \\ u_3 &= w(x, y) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^o(x, y) + z\psi_\alpha(x, y) \\ &\quad - \frac{4z^3}{3h^2} \left[w_{,\alpha} + \psi_\alpha + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_{\alpha\gamma}^k (\psi_\gamma + w_{,\gamma}) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_{\alpha\gamma}^k (\psi_\gamma + w_{,\gamma}) [(z - z_k)H(z - z_k) \\ &\quad \quad - (-z - z_k)H(-z - z_k)] \\ u_3 &= w(x, y) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 N 은 적층 수이고, $H(z - z_k)$ 는 Heaviside 단위 계단 함수이며, $a_{\alpha\gamma}^k$ 는 적층판의 두께방향 물성치와 두께로부터 계산된다.[10]

회전변위의 대응

고차이론의 변수는 고차이론과 저차이론의 횡전단변형에너지가 같다는 가정에 의하여 저차의 변수들로 표현되어진다.

$$U_{shear}^{EHOPT} = U_{shear}^{FOPT} \quad (25)$$

여기서 U_{shear} 는 복합재 적층판의 두께방향 횡전단변형에너지를 나타낸다.

이 관계식은 다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha + w_{,\alpha})^{(EHOPT)} &= C_\alpha (\psi_\alpha + w_{,\alpha})^{(FOPT)} \\ &\quad \text{(No sum on } \alpha) \end{aligned} \quad (26)$$

이때 C_α 는 대응 계수이다. 고차이론의 수직방향 변위 w 는 저차이론의 w 와 같다고 가정되었다. 식 (23)와 (24)의 계산은 Ref.[8]에 나타나있다.

대칭적층평판에 고차이론의 면내변위장은 저차이론의 주변수들로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_\alpha^{EHOPT} &= z \left\{ (C_\alpha - 1) (\psi_\alpha^{FOPT} + w_{,\alpha}^{FOPT}) + \psi_\alpha^{FOPT} \right\} \\ &\quad - \frac{4z^3}{3h^2} [C_\alpha (w_{,\alpha}^{FOPT} + \psi_\alpha^{FOPT}) \\ &\quad \quad + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_{\alpha\gamma}^k C_\gamma (\psi_\gamma^{FOPT} + w_{,\gamma}^{FOPT})] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_{\alpha\gamma}^k C_\gamma (\psi_\gamma^{FOPT} + w_{,\gamma}^{FOPT}) \\ &\quad \times [(z - z_k)H(z - z_k) - (-z - z_k)H(-z - z_k)] \\ &\quad \text{(No sum on } \alpha) \end{aligned} \quad (27)$$

복원된 결과력으로부터 층립면에서의 곡률과 전단변형율은

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{54} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi_{x,x} = \kappa_x &= \beta_{11} + \beta_{12}\xi + \beta_{13}\eta + \beta_{14}\xi\eta + \beta_{15}\xi^2 + \beta_{16}\eta^2 \\ \psi_{y,y} = \kappa_y &= \beta_{21} + \beta_{22}\xi + \beta_{23}\eta + \beta_{24}\xi\eta + \beta_{25}\xi^2 + \beta_{26}\eta^2 \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} = \kappa_{xy} &= \beta_{31} + \beta_{32}\xi + \beta_{33}\eta + \beta_{34}\xi\eta + \beta_{35}\xi^2 + \beta_{36}\eta^2 \\ \psi_x + w_{,x} = \gamma_x &= \beta_{41} + \beta_{42}\xi + \beta_{43}\eta + \beta_{44}\xi\eta \\ \psi_y + w_{,y} = \gamma_y &= \beta_{51} + \beta_{52}\xi + \beta_{53}\eta + \beta_{54}\xi\eta \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 β_i 는 구해진 계수들이다.

곡률 κ_x , κ_y , κ_{xy} 와 전단변형률 γ_x , γ_y 의 1차미분은 식(28)에서 직접 계산되어진다. 식(25)의 변위장으로부터 두께방향으로의 면내 응력을 계산할 수 있다. 층간응력은 3차원 응력 평형 방정식을 이용하여 계산된다. 이과정에서 γ_x 와 γ_y 의 2차미분이 필요하게 된다. 요소내에서 γ_x 와 γ_y 의 1차미분이 상수이므로 2차미분을 구하기 위해서 인접한 요소에서의 γ_α 의 값을 이용하여 요소 경계의 값의 평균을 함으로써 γ_α 를 2차식으로 구하게 된다. 따라서 구해진 2차식의 γ_α 로부터 2차미분을 구할 수 있다.(그림1)

본 응력복원기법의 순서도는 그림2에 나타내었다.

IV. 수치 예

평형 구속 조건을 이용한 요소 단위의 응력 복원 기법의 정확도의 검증은 위하여 sinusoidal 하중에서의 굽힘 평판의 해석을 수행하였다.(그림3)

등방성 재료의 물성치와 형상은 다음과 같다.

$$E = 25 \times 10^6 \text{ psi}, \quad \nu = 0.25, \\ a/h = b/h = 100$$

9절점에서 전단 잠김 방지를 위하여 변형을-가정 평균 요소[9]로 유한요소해석을 수행하였으며 변형을-가정 요소의 처짐 수렴도는 그림4에 나타내었다. 그림에서 요소의 수는 대칭 조건을 이용하여 1/4평판의 한 변을 따른 요소의 수를 나타내며 성능 비교를 위하여 1차 전단 변형 이론의 이론해를 나타내었다. 주어진 메쉬 형상(그림5)에서 응력 복원 기법에 의한 모멘트와 전단력을 유한요소해석과 이론해를 그림6~7에 나타내었다. 여기서 유한요소 해석에 의한 모멘트와 전단력은 요소의 가우스점에서 구한 값을 extrapolation하여 얻어진 값을 가르키며 결과력의 가정에 있어서 모멘트는 완전 2차식, 전단력은 1차식으로 가정하였다. 그림6~7에서와 같이 요소 단위의 응력 복원 기법이 일반적인 extrapolation에 의한 응력 복원보다 나은 결과를 제공하며, 거친 메쉬하에서 전단력의 경우 extrapolation에 의한 방법은 그 정확성이 매우 떨어진 것에 비교하여 본 방법은 거친 메쉬에서도 매우 정확한 전단력을 복원해 냄을 알 수 있다.

두꺼운 복합재 적층평판에서 본 응력복원기법의 성능을 검증하기 위하여 sinusoidal 하중하의 단순지지 사각 대칭직교 적층평판문제에 대한 해석이 수행되었고, Pagano[12]의 3차원 탄성해와 비교하였다. 동일한 층 두께를 가지는 [0/90/.../90/0]에 대한 계산이 수행되었다.

0도층의 물성치와 형상은 다음과 같다.

$$E_1 = 25 \times 10^6 \text{ psi}, \quad E_2 = 10^6 \text{ psi}, \\ G_{12} = G_{13} = 0.5 \times 10^6 \text{ psi}, \quad G_{23} = 0.2 \times 10^6 \text{ psi}, \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \quad a/h = b/h = 4$$

다른 이론과의 비교를 위하여, 다음과 같이 무차원화하였다.

$$(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}) = \frac{h^2}{q_0 a^2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) \\ (\bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_{xz}) = \frac{h}{q_0 a} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) \quad (31) \\ (\bar{u}, \bar{v}) = \frac{E_2 h^2}{q_0 a^3} (u, v), \quad \bar{w} = \frac{100 E_2 h^3}{q_0 a^4} w$$

전체 계산은 4 x 4메쉬 형상에서 수행되었다. 그림8~13은 두께방향의 복원 응력을 나타낸다. 면내 변위장과 면내 응력이 탄성해와 비교하여 정확하게 복원됨을 알 수 있다. 그림12과 13에 복원된 횡전단응력을 나타내었다.

IV. 결론

평형 구속 조건을 이용한 평판에서의 요소 응력 복원 기법을 제시하였다. 이는 크게 두가지 과정으로 분리된다. 첫번째 과정은 독립된 결과력의 가정으로부터 모멘트와 전단력을 복원한다. 초수렴점에서의 응력의 오차와 두개의 평형구속조건이 정의되고 모멘트와 전단력이 벌칙함수를 부과한 최소자승법에의해서 구해진다. 이 과정에서 면내 응력의 향상이 이루어진다. 두번째 과정은 후처리기법을 적용하여 두꺼운 적층판의 두께방향 응력의 정확성을 향상시킨다. 수치예에서 본 방법의 효율성과 정확성이 검증되었다. 특히 경계에서의 전단력은 평형구속조건을 부과한 본방법에서 일반적인 유한요소 응력복원기법과 비교하여 매우 정확히 복원함을 알 수 있다. 이 응력 복원기법은 두꺼운 적층평판의 경계에서의 응력의 정확성을 향상시키는 후처리기법이다. 이 방법은 두꺼운 적층 쉘요소로 확장할 수 있다.

후 기

본 연구는 99년도 과학기술기초중점연구지원 과제로서 수행되었습니다.

참고 문헌

- [1] O.C. Zienkiewicz and J.N. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate. Part 1, 2: The Recovery Technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1987, pp. 1331-1364.
- [2] N.E. Wiberg, and F. Abdulwahab, "Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1993, pp. 2703-2724.
- [3] N.E. Wiberg, F. Abdulwahab and S. Ziukas, "Enhanced Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1994, pp. 3417-3440.
- [4] T. Blacker and T. Belytschko, "Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancement," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1994, pp. 517-536
- [5] Tessler, A. Riggs, H.R., and Mac, S.C., "A Variational Method for Finite Element Stress Recovery Technique and Error Estimation," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 111, 1994, pp. 369-382.
- [6] T. Lee, H.C. Park and S.W. Lee, "A Superconvergent Stress Recovery Technique with Equilibrium Constraint," *accepted for International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997.
- [7] H.C. Park and S.H. Shin, "An Element Stress Recovery Technique with Equilibrium Constraint for Superconvergent Boundary Stress Extraction," *S.D.M. Conference*, part 1, 1998, pp.116-123.
- [8] M. Cho and J.H. Kim, "Postprocess Method Using a Displacement Field of Higher-Order Laminated Composite Plate Theory," *AIAA Journal*, 34, 1996, pp.362-368.
- [9] C.H. Yeom and S.W. Lee, "An Assumed Strain Finite Element Model for Large Deflection Composite Shells," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 1989, pp.1749-1768.

- [10] M. Cho, and R.R. Farmerter, "An Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Composite Structures*, 20, 1992, pp.113-123.
- [11] M. Cho, and J.S. Kim, "Improved Mindlin Plate Stress Analysis for Laminated Composites in Finite Element," *AIAA Journal*, 35, 1997, pp.587-590.
- [12] N. J.Pagano, "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates," *Journal of Composite Materials*, 4, 1970, pp.20-34.

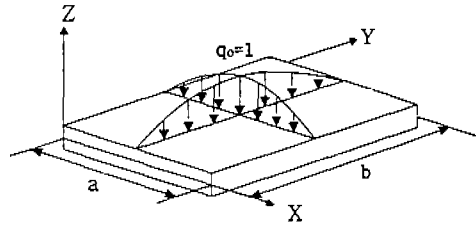


그림 3: 평판의 형상과 하중조건

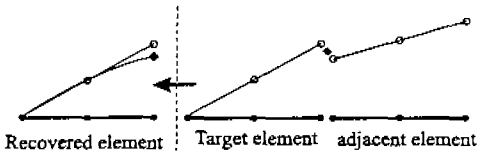


그림 1: 횡전단응력 γ_x , γ_y 의 2차미분을 위한 전단력의 보간

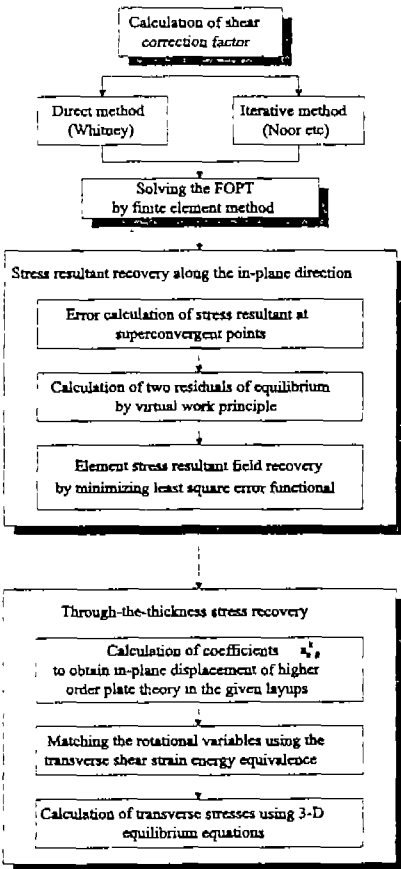


그림 2: 요소단위 응력복원기법의 순서도

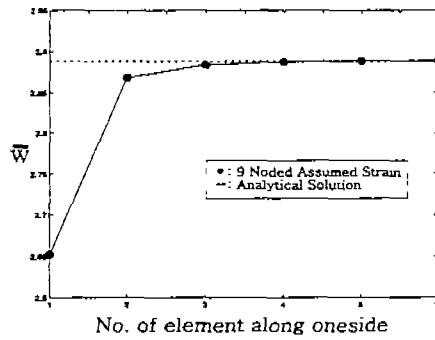


그림 4: 등방성 평판의 처짐 수렴도

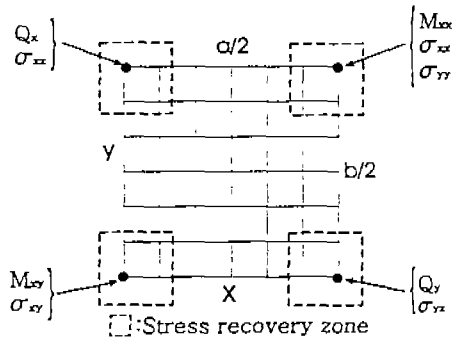


그림 5: 메쉬형상, 응력복원영역과 경계에서의 복원점

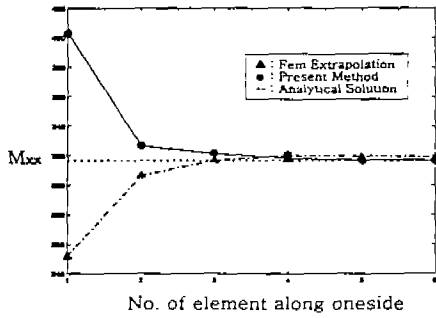


그림 6: 등방성 평판의 모멘트 M_{xx} 의 수렴도

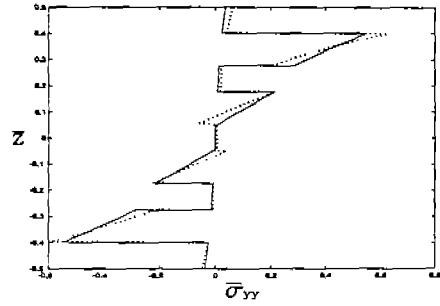


그림 10: $[0/90/0/90/0]$, 두께방향 면내 응력 $\bar{\sigma}_{yy}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

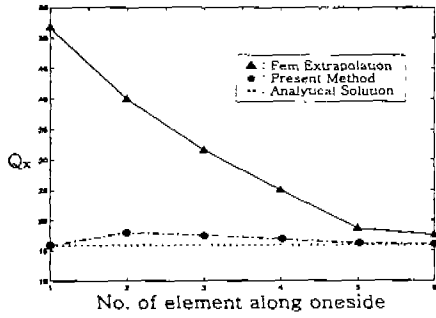


그림 7: 등방성 평판의 전단력 Q_x 의 수렴도

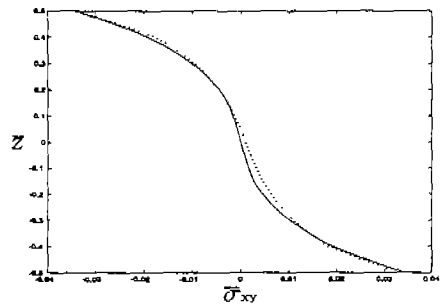


그림 11: $[0/90/0/90/0]$, 두께방향 면내 응력 $\bar{\sigma}_{xy}(0, 0)$

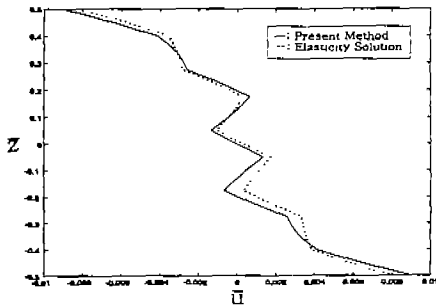


그림 8: $[0/90/0/90/0]$, 두께방향 면내 변위 $\bar{u}(0, \frac{b}{2})$

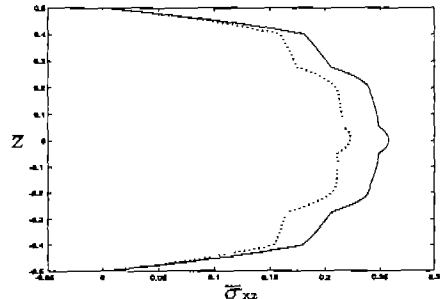


그림 12: $[0/90/0/90/0]$, 두께방향 횡전단응력 $\bar{\sigma}_{xz}(0, \frac{b}{2})$

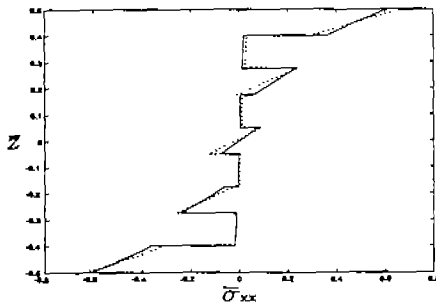


그림 9: $[0/90/0/90/0]$, 두께방향 면내 응력 $\bar{\sigma}_{xx}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

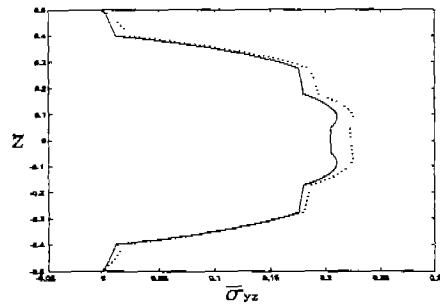


그림 13: $[0/90/0/90/0]$, 두께방향 횡전단응력 $\bar{\sigma}_{yz}(\frac{a}{2}, 0)$