

혼돈이론을 이용한 기상 데이터 예측

Prediction of Climatic Data Using Chaos Theory

조성인*
정회원

배영민*
정회원

1. 서론

농업을 포함한 자연계에서 나타나는 동력학계의 상태변수 대부분은 비선형성을 가지고 있으며, 심지어는 동력학계의 초기조건에 민감하게 반응하여 장기적으로 예측불가능한 경우가 많다. 따라서, 기존의 동력학계 해석 방법은 비교적 선형적인 부분에 대해 '선형근사화' 하고 나머지 부분에 대해서는 미지의 분야로 남겨 두어야 했다. 그러나, 최근에는 동력학계에 내재되어 있는 결정론적 메커니즘(deterministic mechanism)을 인정하게 됨에 따라, 동력학계의 비선형적 특성에 조금씩 접근할 수 있게 되었다. 이렇게 비선형 동력학에 대해서 내재적 결정론적 메커니즘을 인정하여 해석하는 분야를 혼돈이론(chaos theory)이라 한다. 이러한 혼돈이론의 도입으로 인해 기존에는 임의적 현상으로 인정되었던 분야도 결정론적 메커니즘을 가진 혼돈 현상으로 인정받는 경우도 나타나고 있다(Cavalier 등, 1994).

그러나, 혼돈이론은 물리학과 수학에서 도출된 이론 및 알고리즘으로, 혼돈이론을 응용하고자 하는 학자들의 입장에서는 난해한 부분들이 많이 있다. 따라서, 혼돈이론을 자연현상의 여러 방면에 적용하기 위한 체계를 세울 필요가 있으며, 혼돈이론의 응용을 위한 도구가 필요하게 되었다. 이에 혼돈이론의 입문에 대한 문헌들이 나왔으며(Doscher, 1994), 이를 자연현상 또는 사회현상에 응용한 연구가 진행되었다(Roush 등 : 1994, Chavas 등 : 1991). 그러나, 이들 문헌 역시 알려진 동력학의 해석에 초점을 맞추고 있고, 실험데이터에 대한 실제 분석 체계에 대해서 미약하게 설명되어 있다. 따라서, 이를 보완하여 시계열 실험데이터에 대한 혼돈이론의 응용체계가 세워져야 할 것이다.

따라서, 본 연구에서는 시계열 실험데이터에 혼돈이론을 응용하기 위해서 적용체계를 제안하였으며, 각 적용단계에 요구되는 지식 및 알고리즘을 컴퓨터프로그램으로 구현하였다. 그리고, 혼돈이론의 적용체계를 작물 병해의 예찰모형 개발에 이용되는 각종 기상데이터의 진화 양상 분석에 적용하였고, 분석 결과를 토대로 하여 진화의 예측을 시도하였다.

2. 실험 재료 및 방법

시계열 데이터의 혼돈 양상 분석

혼돈 양상은 동력학계에 내재되어 있는 결정론적 메커니즘에 의해서 결정되기 때문에, 동력학계의 여러 가지 요소들의 영향에 의해서 그 진화 방향이 결정되지만, 그 진화 형태의

* 서울대학교 농업생명과학대학 생물자원공학부 농업기계전공

겉보기는 임의적 양상으로 보여질 수 있다. 따라서, 진화 양상의 혼돈 양상 판별을 위해서는 동력학계의 양상을 기술할 수 있는 양을 구하여 판별하여야 하며, 이러한 시계열 데이터의 혼돈 양상 판별 과정을 혼돈 양상 분석이라 할 수 있다.

다음은 본 연구에서 정리한 혼돈 양상 분석의 수행 순서이다.

- ① 위상 공간의 재구성 : 혼돈 양상 분석을 위해서 우선 대상 시계열 자료를 위상공간 안에서 재구성해야 한다. 위상공간의 재구성은 Takens Embedding 정리에 의해서 (식 1)으로 설명될 수 있다. 위상공간의 재구성은 위상공간의 차원(embedding dimension)이 요구되며, 이는 시계열 자료의 진화 양상을 분석하여 결정되어야 한다(Takens, 1981).

$$\begin{aligned} \text{Time series : } Y &= y_{s \times 0}, y_{s \times 1}, y_{s \times 2}, y_{s \times 3}, y_{s \times 4} \cdots y_{s \times t} \cdots \\ s &: \text{sampling time} \\ t &: \text{time} \\ \Rightarrow & \\ \text{vector reconstructed vector in phase space} &= & \text{(식 1)} \\ & (y_{s \times t}, y_{s \times (t+\tau \times 1)}, y_{s \times (t+\tau \times 2)}, y_{s \times (t+\tau \times 2)}, \cdots, y_{s \times (t+\tau \times D)}) \\ \tau &: \text{time delay} \\ D &: \text{embedding dimension} \end{aligned}$$

- ② 끌개(attractor) 분석 : 위상공간의 차원을 계산하면, 시계열 자료의 진화를 위상공간 안에 나타낼 수 있으며, 그 진화 궤적을 끌개(attractor)라 한다. 일반적으로 끌개의 형태에 따라 시계열 자료의 특성을 분석할 수 있으며, 수렴 양상의 시계열 자료에 대해서는 끌개의 형태가 점으로 나타나며, 주기적, 준주기적 양상의 시계열 자료에 대해서는 원형으로 수렴하는 끌개가 나타난다. 그리고, 혼돈 양상 데이터에 대해서는 끌개의 궤적이 서로 교차하지 않으며 무한대로 진행되는 형태(strange attractor)를 띈다 (Roush 등, 1994).

- ③ 리아프노프 분석 : 끌개의 형태 분석은 가시적으로 이해 할 수 있는 장점이 있지만, 위상공간의 차원이 4차원 이상일 경우에는 가시적으로 분석할 수 없으며, 실험에 의한 실제 시계열 자료에 대한 끌개는 그 양상이 쉽게 드러나지 않는다. 따라서, 시계열 자료의 혼돈 양상을 정량적으로 나타낼 수 있는 리아프노프 지수를 계산한다. 리아프노프 지수는 각 차원에 대해서 계산하며, 시계열 차원의 혼돈 양상을 판정할 수 있다.

위상 공간의 차원(embedding dimension)의 계산

동력학계의 끌개를 완전히 포함할 수 있도록 위상공간의 차원(embedding dimension)을 결정해야 하며, 위상공간의 차원은 상관차원(Correlation dimension)을 계산하여 구한다(식 2).

$$\begin{aligned} D &> 2m + 1 \\ D &: \text{embedding dimension} \\ d &: \text{correlation dimension} \end{aligned} \quad \text{(식 2)}$$

상관차원은 Grassberger(1983) 등이 처음으로 그 개념을 제안하였으며, 수학적으로는 끌개를 포함할 수 있는 최소차원을 의미한다(식 3).

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln(r)}$$

$$\text{where } C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(r - |x_i - x_j|) \quad (\text{식 3})$$

is correlation integral and,
H is Heaviside function.

이 후, 동력학계의 시계열 자료에 대한 상관차원 계산 알고리즘이 대거 출현했으며 (Albano 등, 1988), 이들은 모두 Grassberger(1983) 등이 제안한 알고리즘(G-P 알고리즘)을 근간으로 하며, (식 4)에서 표현된 D_2 의 스펙트럼을 구하여야 한다. 따라서, 본 연구에선 상관차원의 분석을 위해서 G-P 알고리즘을 선택하였으며, D_2 스펙트럼을 계산하는 컴퓨터 프로그램을 작성하였다.

$$D_2(M;r) = \frac{d \log_e C_M(r)}{d \log_e(r)} \quad (\text{식 4})$$

$C_M(r)$: correlation integral
 M : dimension of phase space

리아프노프 분석(Lyapunov analysis)

리아프노프 지수는 위상공간 안에서 나타나는 끌개 궤적의 팽창 또는 수축 정도를 정량화한 수치이며, 동력학계의 리아프노프 지수를 계산하여 혼돈 양상을 판별하는 것을 리아프노프 분석(Lyapunov analysis)라 한다(Nayfeh 등, 1995).

리아프노프 지수의 수학적 정의는 (식 5)와 같으며, 이의 의미는 동력학계의 초기값에 대한 t 시간 진화된 동력학계의 비(ratio)의 대수값이다. 따라서, 동력학계의 리아프노프 지수가 양의 값이라는 것은 끌개가 계속적으로 팽창한다는 것을 의미한다.

In system given as $y(t) = \Phi(t) y(0)$

$$\bar{\lambda}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|} \quad (\text{식 5})$$

where $\bar{\lambda}_i$ is Lyapunov exponent.

따라서, 리아프노프 지수를 이용한 혼돈 양상의 판별법은 다음과 같다.

If λ of dynamic system > 0 , the system is chaotic.
If λ of dynamic system < 0 , the system is non-chaotic

이와 같이, 주어진 시스템의 리아프노프 지수의 계산은 혼돈 양상 분석을 위한 가장 간결한 수단으로, 이의 계산 방법에 관한 많은 연구가 진행되었다. 초기 연구는 알려진 동역학계의 방정식로부터 나온 값에 대한 분석에 집중되었으며, 최근에는 알려지지 않는 동역학계의

실험데이터에 대한 리아프노프 지수의 계산 및 데이터의 잡음 제거 등에 관한 연구가 많이 진행되고 있다(Sano 등 : 1985, Brigg : 1990).

본 연구에서는 Eckamann(1986) 등이 소개한 알고리즘에 기초하여 리아프노프 지수 계산 프로그램을 작성하였으며, 다음은 리아프노프 지수 계산을 알고리즘의 개요이다.

- ① 시스템에 대한 유한 차원의 위상 공간을 재구성한다.
- ② Least-squares fitting을 통해 재구성된 역학계에 대한 Tangent map을 계산한다.
- ③ Tangent map을 통해서 리아프노프 지수를 이끌어낸다.

혼돈 양상 데이터의 예측

일반적인 시계열 자료에 대한 예측법은 ARMA 모형 등이 있으나, 이들 방법은 혼돈 양상 데이터에 대해서는 적절한 예측 결과를 제공하지 못한다. 그 이유는 리아프노프 지수가 양의 값인 혼돈 데이터는 초기값에 대한 데이터의 진화가 각종 내재적 원인에 의해서 기하급수적으로 확장하여 중장기적으로는 예측이 불능인 상태로 진화하게 되기 때문이다(Nayfesh 등, 1995). 따라서, 혼돈 양상 데이터에 대해서는 중장기적 예측이 불가능한 것으로 알려져 있으며, 현재의 혼돈 데이터 예측에 관한 연구는 결정론적 메커니즘에 근간한 단기 예측 알고리즘의 개발에 집중되어 있다(Farmer 등 : 1987, Casdagli : 1988, Jimenez 등 : 1992). 현재까지 개발된 예측 알고리즘은 거의 유사한 방법으로 전개되고 있으며, 신경회로망의 비선형적 적합 특성을 이용하여 시계열 데이터의 예측 알고리즘을 개발한 예도 있다(Mees 등, 1992).

본 연구에서는 Jimenez 등(1992)이 제안한 local optimal linear-reconstruction method를 기본 모형으로 하여 혼돈 데이터 예측 프로그램을 개발하였다. 알고리즘의 기본 개념은 ‘결정론적 메커니즘(deterministic mechanism)에 의해서 진화하고 있는 동역학계내에서는, 현재(t)의 값에 대한 미래($t + \tau \times n$)의 값은 현재 값의 인접 벡터들의 진화에 의해서 결정된다.’는 가정하에서, 현재 시간(t)에서의 시스템 벡터는 인접 벡터(neighborhood vectors)들에 의해서 형성된 Gram-schmidt 기저들에 표현될 수 있으며, 짧은 시간 동안의 진화 후($t+n$)에는 진화된 인접 벡터들에 의해서 형성된 Gram-Schmidt 기저에 의해서 미래($t+n$)의 값이 표현될 수 있다는 것이다(그림 1).

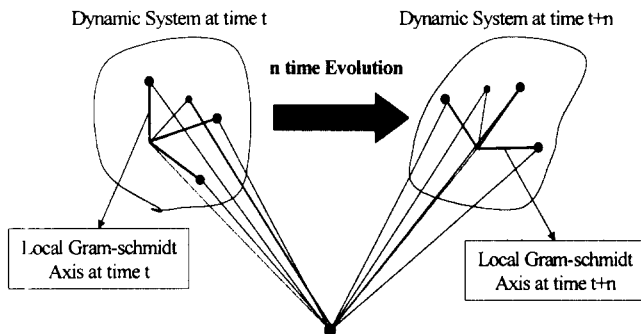


Fig.1 Schematic diagram showing the local optimal linear reconstruction method.

농업 기상 데이터의 수집

경기도 화성군 농촌진흥원 소속의 벼 재배 실험 포장에 설치되어 있는 무인기상관측기를 통해서 각종 기상 데이터를 수집하였다. 수집된 데이터는 1995년 겨울부터(18일째부터) 1997년 가을까지의 일별 데이터이며 총 996일동안의 기록이다. 이 중, 벼의 병해충 예찰모형의 입력 변수로 이용되는 기온, 수온, 상대습도, 일사량, 풍속, 등의 5가지 변수를 선정하였으며, 이에 대한 혼돈 양상 분석을 수행하였다. 그림 2는 각 기상 데이터중에서 상대습도의 진화 양상이다.

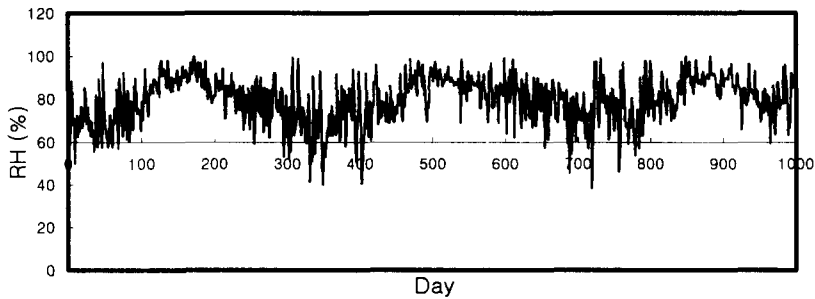


Fig.2 The evolution of daily relative humidity obtained by AWS.

각 데이터는 전반적으로 1년의 주기로 변화하고 있으며, 세부적으로는 잡음에 오염된 것처럼 보이는 임의적 데이터 변화 양상으로 나타나고 있다. 따라서, 이들 임의적 양상을 혼돈 양상 분석을 이용하여 분석하였다.

3. 결과 및 고찰

위상공간의 재구성

기상데이터에 대한 리아프노프 분석을 수행하기 위해서는, 먼저 위상공간안에 기상데이터를 재구성해야 한다. 이를 위해서 상관차원을 계산하고, 위상공간의 차원을 결정하였다.

상관차원의 계산은 위상공간의 차원별로 나타난 $\log(r)$ 에 대한 D_2 의 스펙트럼의 분석을

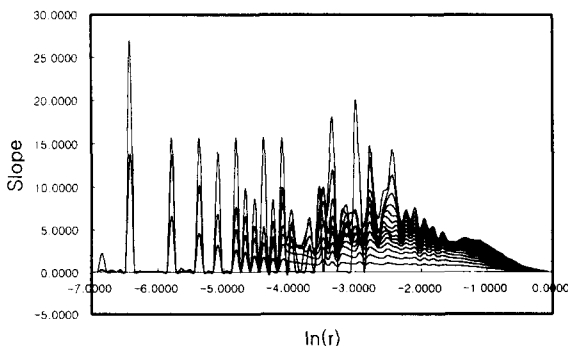


Fig. 3 The plot of slope versus $\log(r)$ according to embedding dimension for daily relative humidity.

통해서 이루어진다(그림 3). 이를 위해서 본 연구에서 개발된 상관차원 분석프로그램을 이용하여 각 기상데이터별로 $\log(r)$ 에 대한 D_2 의 스펙트럼을 계산하였다.

기온, 수온, 상대습도, 일사량에 대해서는 위상공간의 차원을 15까지 확장시켜 가면서 스펙트럼을 구하였으며, 풍속의 경우에는 위상공간의 차원을 22까지 확장시켜 가면서 스펙트럼을 계산하였다. 상관차원은 D_2 의 스펙트럼에서 위상공간의 차원이 증가함에 따라 수렴하는 D_2 값이 된다. 그런데, 위의 각 기상데이터별 D_2 스펙트럼에서는 $\log(r)$ 의 작은 값(< -2)에서는 수렴이 나타나지 않고 오히려 요동을 일으키고 있다. 이러한 양상은 미지의 동력학계의 실험데이터에 포함될 수 있는 계측오차 및 계산오차 그리고 임의적 잡음 등에 의해서 발생하는 것으로 알려져 있다(Albano 등, 1988). 따라서, 본 연구에서는 $\log(r)$ 의 큰 값($-2 <$)에 대해서 국부적으로 수렴하는 평균 기울기값을 찾아내려고 하였다. 그림 4, 5는 각 기상데이터에 대해서 위상공간의 차원 증가에 따른 국부적 평균 기울기값의 수렴 양상을 보여 준다.

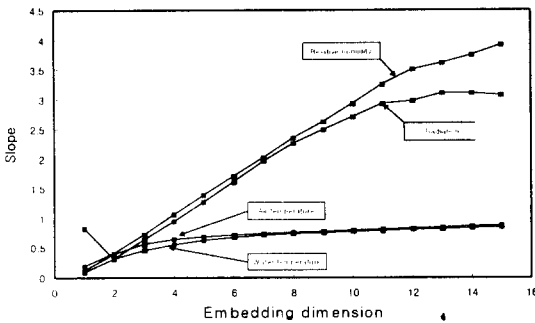


Fig. 4 The plot of D_2 (slope) vs embedding dimension for air temperature, water temperature, relative humidity, and radiation.

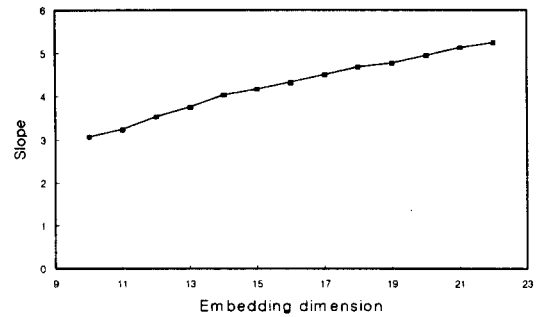


Fig.5 The plot of D_2 (slope) vs embedding dimension for wind speed.

기온 및 수온에 대해서는 수렴하는 양상도 비슷하며 수렴도도 우수한 것을 나타나고 있다. 그러나 상대습도, 일사량, 풍속의 경우 그 수렴하는 정도가 완전하지 못한 경향이 있다. 이는 위상 공간의 차원이 증가함에 따른 분석 데이터 수의 부족으로 나타나는 현상으로 추후 더 많은 데이터를 이용한 분석이 필요하다(Albano 등, 1988).

한편, 위의 D_2 의 수렴 양상을 이용하여 상관차원과 위상공간의 차원을 결정하였다(표 1).

Table 1 The correlation dimension and embedding dimension for each climatic data

	Air temperature	Water temperature	Relative humidity	Radiation	Wind speed
Correlation dimension	0.85	0.85	3.5	3.1	5.2
Embedding dimension	3	3	8	8	12

리아프노프 분석

위의 상관차원 분석에서 도출한 위상공간의 차원에 대해서 리아프노프 지수를 계산하였다. 본 연구에서 개발한 리아프노프 계산 프로그램을 이용하여 각 기상데이터에 대한 리아프노프 지수를 구하였으며, 그림 6, 7, 8은 각 기상데이터에 대한 위상공간의 차원별 리아프노프 지수값을 보여주는 리아프노프 스펙트럼(Lyapunov spectrum)이다.

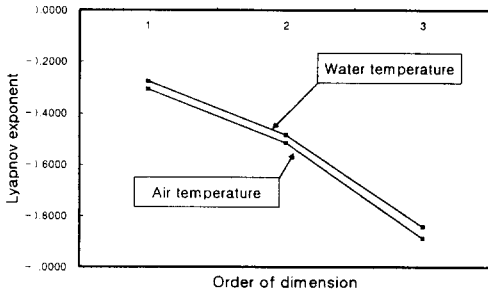


Fig.6 The Lyapunov exponent spectra for daily air temperature and water temperature (embedding dimension = 3).

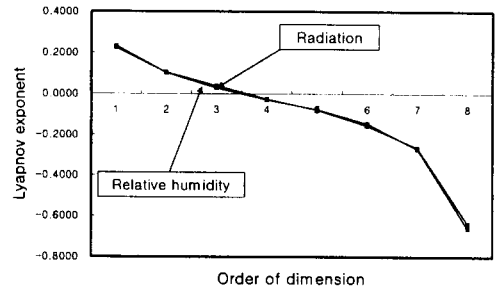


Fig.7 The Lyapunov exponent spectra for daily relative humidity and radiation (embedding dimension = 8).

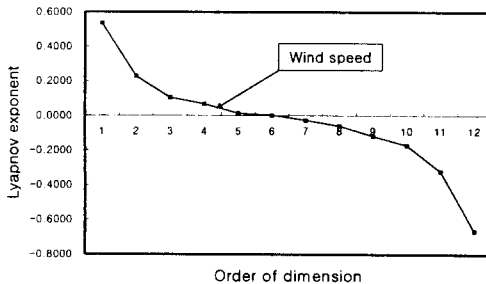


Fig.8 The Lyapunov exponent spectra for daily wind speed (embedding dimension = 12).

일별 기온 및 수온의 경우 각 차원에 대해서 리아프노프 지수의 값이 모두 음의 값을 가진다. 이는 기온 및 수온의 시계열 자료의 끌개가 수축한다는 것을 의미하며, 따라서, 혼돈 양상이 나타나고 있지 않다고 판정하였다. 따라서, 기온 및 수온에 나타나는 임의적 오차는 계측기의 오차 또는 순수한 오차로 판단된다.

일별 일사량과 상대습도의 경우, 1, 2, 3 차원에서 양의 값을 나타내고 있다. 위에서 언급하였다시피 각 차원의 리아프노프 지수 중 하나만이라도 양의 값을 가지면, 혼돈 양상을 가진다고 판단할 수 있기 때문에, 일사량과 상대습도는 혼돈 양상을 가진다고 말할 수 있다. 그리고, 일별 풍속의 경우에도, 1, 2, 3, 4, 5 차원에서 리아프노프지수의 값이 양의 값을 가지므로, 풍속 역시 혼돈 양상을 띤다고 판단할 수 있다.

위의 결과를 종합하였을 때, 기온, 수온의 진화에서는 혼돈 양상이 나타나지 않았으나, 상

대습도, 일사량, 풍속의 진화에서는 혼돈 양상이 나타난 것으로 판단된다.

혼돈 데이터의 예측

위의 리아프노프 분석을 통해 혼돈 양상이 나타난다고 판단되는 상대습도, 일사량, 풍속의 진화에 대해서, local optimal linear-reconstruction 알고리즘을 이용하여 혼돈 양상의 진화를 예측해 보았다.

그림 9, 10, 11 은 각 기상데이터별로 현재 시간에서 1일 후의 데이터를 예측한 결과이다.

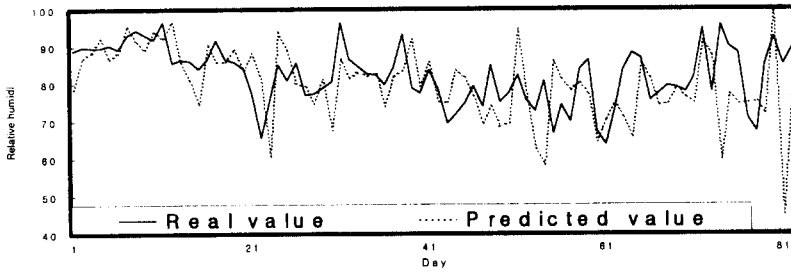


Fig.9 The 1 day ahead step prediction for the evolution of relative humidity.

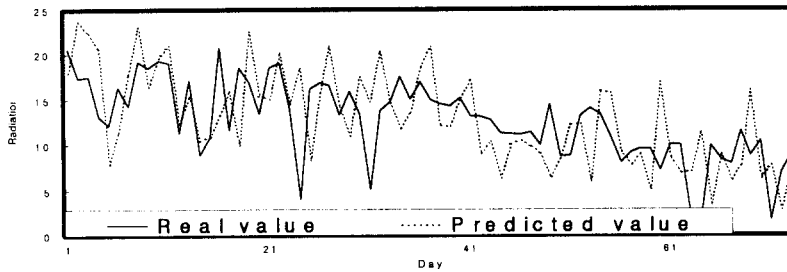


Fig.10 The 1 day ahead step prediction for the evolution of radiation.

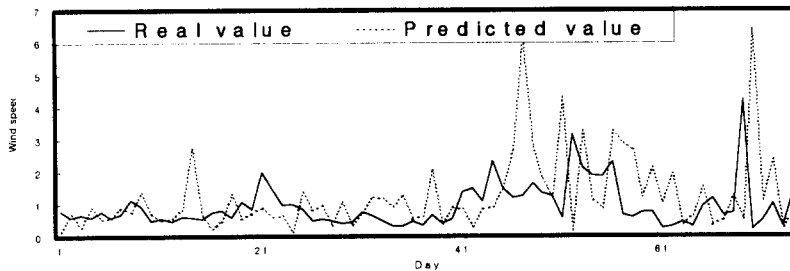


Fig.11 The 1 day ahead step prediction for the evolution of wind speed.

예측 결과의 성능을 평가하기 위해서 (식 6)에 의한 RMS 값을 계산하였으며, 상대 습도,

일사량, 풍속의 RMS값은 각각 10.16(%), 4.32, 1.46 이었다.

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum(x_i - y_i) \times (x_i - y_i)}{N}}$$

x_i : real value

(식 6)

y_i : predicted value

그리고, 현재 시점에서의 예측 시점을 1일, 3일, 5일, 7일로 증가시켜가면서 진화 양상의 예측을 시도하였으며, 표 2는 그 결과를 보여 준다.

Table 2 The change in RMS of prediction according to increase of prediction step

	Relative Humidity	Radiation	Wind Speed
1 day step	10.16	4.32	1.46
2 day step	10.43	8.97	1.56
3 day step	13.89	10.89	3.98
4 day step	15.42	8.48	2.47

표에서 알 수 있다시피, 예측 기간(prediction interval)이 길어짐에 따라, RMS의 값이 점점 커지는 것을 알 수 있다. 이는 혼돈 양상 데이터의 일반적인 특징으로서, 리아프노프 지수의 값이 양임에 따라 시계열 데이터의 끝개가 계속적으로 팽창한다는 것을 의미한다(Jimenez 등, 1992).

하지만, 전반적으로 RMS의 값을 근거로 하여 예측 성능을 판정하였을 때, 그리 우수하지는 않다. 이러한 이유는 두가지로 요약할 수 있다. 첫 번째로 앞에서 언급하였다시피, 실험 데이터의 계측오차, 계산오차 및 임의적 양상의 오염이다. 일반적으로 실험데이터는 필연적으로 계측오차 또는 계산오차를 포함하게 되고, 이들이 상관차원의 수렴에 영향을 줄 수 있다. 따라서, 앞에서 상관차원을 계산할 때, r 의 작은 값에서 D_2 가 수렴하지 않고 요동의 원인을 제공하며, 예측 알고리즘에서 인접 벡터를 선택하는 데 영향을 주게 되어 예측 성능을 저하시킨다. 두 번째 이유로는 절대적 데이터 수의 부족이다. 일반적으로 인정되고 있는 혼돈 양상 분석에 이용되는 데이터의 수는 10^d 개(d : embedding dimension)이나, 본 연구에서는 실험의 한계로서 996개의 데이터로 분석을 하였다(Doscher, 1994). 이는 본 연구에서 선정한 위상공간의 차원에 상당히 못미치는 양으로서, 상관차원의 계산에서 r 의 큰값 영역에서의 D_2 수렴을 어렵게 할 뿐만 아니라, 시계열 데이터의 혼돈 진화 양상을 충분히 내재하지 못하여 혼돈 데이터의 예측에 영향을 줄 수 있다. 따라서, 혼돈 양상 분석 및 예측 성능의 향상을 위해서는 기존의 데이터 이외에 추가적으로 데이터를 수집 및 데이터베이스화 하여야 할 것이다.

4. 요약

혼돈이론을 농업에 활용하기 위한 방법론적 체계를 제안하고, 각 단계별로 요구되는 도구를 컴퓨터 프로그램으로 구현하였다. 그리고, 수립된 혼돈이론을 이용하여 기상 데이터의 진화 양상 예측을 시도하였다. 이를 위해서, 경기도 화성군 농촌진흥원내 실험포장에 설치된 무인기상관측기를 통해, 일별 기온, 수온, 상대습도, 일사량, 풍속 등의 기상데이터를 수집하였다. 위상 공간의 재구성, 리아프노프 분석 등을 통해 일별 상대습도, 일사량, 풍속 등에서 혼돈 양상이 나타나는 것으로 판단되었다. 따라서, 이들 3종류의 기상데이터에 대해서 local optimal linear reconstruction 알고리즘을 이용하여 진화 양상 예측을 시도하였고, RMS값을 계산하였다. 각 데이터의 RMS값은 각각 10.16%, 4.32, 1.46 이었다.

5. 참고문헌

1. 김규량. 1995. 군락 미기상 실험 자료를 이용한 벼 도열병 예찰 체계의 개발, 서울대학교원 농생물학과, 석사학위논문.
2. 박승만. 1995. 카오스 응용 전략, 성안당. 서울.
3. 박배식. 1995. 카오스란 무엇인가. 범양사 (Original: Kellert, Stephen H. 1993. In the wake of chaos : Unpredictable Order in Dynamic system).
4. 조성인. 1995. 혼돈이론과 농업에의 응용, 한국생물생산시설환경학지 4(2).
5. Albano, A.M., J. Muench, C. Schwartz, A.I. Mees, P.E. Rapp. 1988. Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm : in Coping with chaos, J. Willey, 1994.
6. Briggs, K. 1990. An improved method for estimating Liapunov exponents of chaotic time series, Physical letters A 151(12):27-32.
7. Casdagli, M. 1988. Nonlinear prediction of chaotic time series : in Coping with chaos, J. Willey, 1994.
8. Cavalieri, L. F., and H. Koçak. 1994. Chaos in biological control systems, J. theoretical biology 169:179-187.
9. Chavas, J.P., and M.T. Holt. 1991. On nonlinear dynamics: The case of pork cycle, American Journal of Agricultural Economy August:820-828.
10. Doscher, C. 1994. The application of nonlinear dynamics to complex systems, An ASAE Meeting Presentation Paper No. 943538.
11. Eckmann J.P., S. Oliggson Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto. 1986. Liapunov exponents from time series : in Coping with chaos, J. Willey, 1994.

12. Edward Ott, Tim Sauer, and James Yorke. 1994. *Coping with Chaos*. J. Willey, 1994.
13. Farmer, J.D., and J.J. Sidorowich. 1987. Predicting chaotic time series : in *Coping with chaos*, J. Willey, 1994.
14. Grassberger, P., and I. Procaccia. 1983. Characterization of strange attractors, *Physical review letters* 50(5):346-349.
15. Jimenez, J., J.A. Moreno, and G.J. Ruggeri. 1992. Forecasting on chaotic time series: A local optimal linear-reconstruction method, *Physical review A* 45(6):3553-3558.
16. Mees, A, K. Aihara, M. Adachi, K. Judd, T.Ikeguchi, and G.Matsumoto. 1992. Deterministic prediction and chaos in squid axon response, *Physics letters A* 169:41-45.
17. Nayfeh, A.H., B. Balachandran. 1995. *Applied Nonlinear dynamics*. John Wiley & Sons, NewYork.
18. Norbert Bolz. 1992. *Chaos and Simulation*. W.Fink Verlag.
19. Roush, W.B., G.F. Barbato, and T.L. Cravener. 1994. A nonlinear dynamical (chaos) approach to the analysis of broiler growth, *Poultry Science* 73:1183-1195.
20. Sano, M. and Y. Sawada. 1985. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series, *Physical review letters* 55(10):1082-1085.
21. Takens, Floris. 1981. Detecting strange attractors in turbulence : in *Lecture Notes in Mathematics*, D.A. Rand and I.S. Young eds., Springer-Verlag, NewYork, 366-381.