

유체에 잠긴 기둥의 자유진동

Free Vibrations of Columns Immersed in Fluid

오 상 진*(담양대) · 이 병 구(원광대) · 모 정 만(남원농공고)
Oh, Sang Jin · Lee, Byoung Koo · Mo, Jeong Man

Abstract

The purpose of this paper is to investigate the natural frequencies and mode shapes of columns immersed in fluid. The beam model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory which neglects the effects of rotatory inertia and shear deformation. The eccentricity and rotatory inertia of the tip mass are taken into account. The governing differential equations for the free vibrations of immersed columns are solved numerically using the corresponding boundary conditions. The lowest four natural frequencies and corresponding mode shapes are calculated over a range of non-dimensional system parameters: the ratio of fluid depth to span length, the mass ratio, the dimensionless mass moment of inertia, and the eccentricity.

I. 서론

해양 또는 저수지 등에 축조된 구조물에는 파압, 풍압 등 다양한 형태의 동하중이 작용한다. 동하중을 받는 이러한 구조물의 동적응답 해석시 또는 설계과정에서는 대상구조에 대한 정확한 고유진동수 및 진동형의 계산이 필요하다.

해양 또는 저수지 등에 축조된 탑이나 말뚝은 유체에 잠긴 기둥으로 모형화할 수 있으며 [1-3], 이러한 구조물은 수심의 변화에 따라 유체에 잠긴 정도가 변화한다. 따라서 구조물의 제원 이외에 유체깊이의 변화에 따른 자유진동 특성의 변화가 발생한다.

이에 본 연구에서는 기둥 상단에 집중질량을 갖는 유체에 잠긴 캔틸레버형 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 다양한 제원 변화에 따른 고유진동수 및 진동형의 변화를 분석하고자 한다.

II. 수학적 모형

Fig. 1은 유체에 일부가 잠긴 지간길이 l 인 캔틸레버형 기둥을 나타낸 것이다. 이 그림에서 l_1 은 유체의 깊이이며, M 과 d 는 각각 기둥 상단의 집중질량 및 기둥 상단으로부터 질량중심까지의 거리, J 는 질량관성모멘트이다. 그리고 ρ_c 와 ρ_f 는 각각 기둥 재료의 밀도 및 유체의 밀도이며, $w(x, t)$ 는 기둥축상 임의점 x 에서의 진동변위이다.

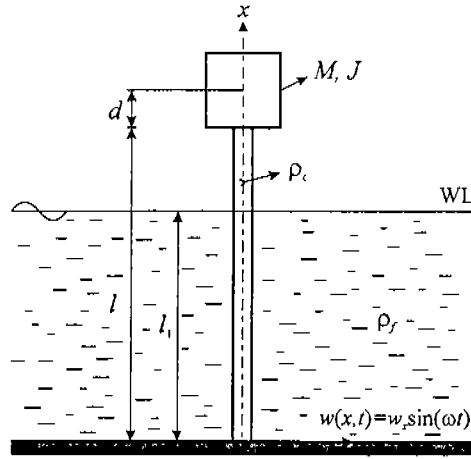


Fig. 1. Structural model considered in this paper

기둥 하단으로부터 유체 표면까지는 잠겨 있으므로 기둥질량에 유체질량을 추가하여 잘 알려진 기둥의 자유진동에 대한 지배방정식을 수정하므로써 식 (1)과 같이 유체에 잠긴 부분에 대한 지배방정식을 표현할 수 있으며[1], 나머지 구간의 지배방정식은 식 (2)와 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + (\rho_c + \rho_f) A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho_c A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l \quad (2)$$

여기서 EI 는 휨강성, A 는 기둥단면의 단면적이다.

기둥이 조화진동을 한다고 가정하면 횡방향 진동변위에 대한 조화진동식은 식 (3)과 같이 쓸 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega t) \quad (3)$$

여기서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω 는 고유각진동수(rad/s)이다.

본 연구에서 고려하는 구조계에 대한 효율적인 분석을 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta = w_x/l, \quad \xi = x/l \quad (4,5)$$

$$r_i = l_1/l, \quad k = \rho_f/\rho_c \quad (6,7)$$

$$C_i = \omega_i l^2 [\rho_c A / (EI)]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8)$$

식 (3)을 식 (1), (2)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = (1+k)C_i^2\eta, \quad 0 \leq \xi \leq r_i \quad (9)$$

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = C_i^2\eta, \quad r_i \leq \xi \leq 1 \quad (10)$$

기둥 하단 ($x=0$)은 고정지점이므로 다음 식에 보인 바와 같이 진동변위 및 단면회전각이 발생하지 않는다.

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (11,12)$$

그리고 기둥 상부에는 질량관성모멘트 J , 기둥 상단으로부터 질량중심까지의 거리가 d 인 질량 M 이 존재하므로 기둥 상단 ($x=l$)에서의 휨모멘트 및 전단력은 각각 다음 식과 같다.

$$EI \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = -(J + Md^2) \frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x \partial t^2} - Md \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$EI \frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial t^2} + Md \frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x \partial t^2} \quad (14)$$

새로운 무차원 변수들을 다음과 같이 도입한다.

$$m = M/(\rho_c A l), \quad j = J/(\rho_c A l^3), \quad e = d/l \quad (15-17)$$

식 (3)을 식 (11)~(14)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하면 기둥 하단 ($\xi=0$)에서 무차원 경계조건식은 식 (18), (19)와 같으며, 기둥 상단 ($\xi=1$)에서는 식 (20), (21)과 같다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (18,19)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = C_i^2(j + me^2) \frac{d\eta}{d\xi} + meC_i^2\eta, \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = -meC_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} - mC_i^2\eta \quad (20,21)$$

III. 해석방법 및 결과고찰

본 연구에서는 식 (9), (10)의 지배 미분방정식을 수치적분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석방법으로 해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 대상구조의 무차원 고유진동수 C_i 는 행렬값탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하여 구하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 $k=0.1274$ ($\rho_c=7850 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f=1000 \text{ kg/m}^3$), $e=0$ 에 대한

문헌들의 결과와 Table 1에 비교하였다. 여기서 문헌 [1]의 결과는 유한요소법에 의한 결과이며, 문헌 [3]의 결과는 임밀해이다. 이 표에서 본 연구결과와 문헌 [3]의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다. 한편 문헌 [1]의 결과는 본 연구결과 및 문헌 [3]의 결과와 다소 차이가 있으나 제변수 변화에 따른 고유진동수 변화의 경향은 일치함을 알 수 있다.

Table 1. Comparisons of frequency parameters reported in refs [1,3] to the present results for $k=0.1274$ and $e=0.00$

r_i	m	j	Data source	Frequency parameter, C_i		
				$i=1$	$i=2$	$i=3$
0.0	1.0	0.0	Present	1.557	16.25	50.90
			Ref. [1]	1.467	15.30	47.93
			Ref. [3]	1.557	16.25	50.90
		1.0	Present	0.8679	3.391	24.02
			Ref. [1]	0.8174	3.193	22.62
			Ref. [3]	0.8679	3.391	24.02
0.5	2.0	0.0	Present	1.158	15.51	48.82
			Ref. [1]	1.090	14.61	45.98
			Ref. [3]	1.158	15.52	48.82
		1.0	Present	0.7844	2.851	22.60
			Ref. [1]	0.5846	2.405	21.24
			Ref. [3]	0.7844	2.852	22.61
1.0	1.0	0.0	Present	1.539	15.39	48.04
			Ref. [1]	1.449	14.49	45.24
			Ref. [3]	1.539	15.39	48.04
		1.0	Present	0.8654	3.341	22.78
			Ref. [1]	0.8150	3.147	21.45
			Ref. [3]	0.8654	3.341	22.78

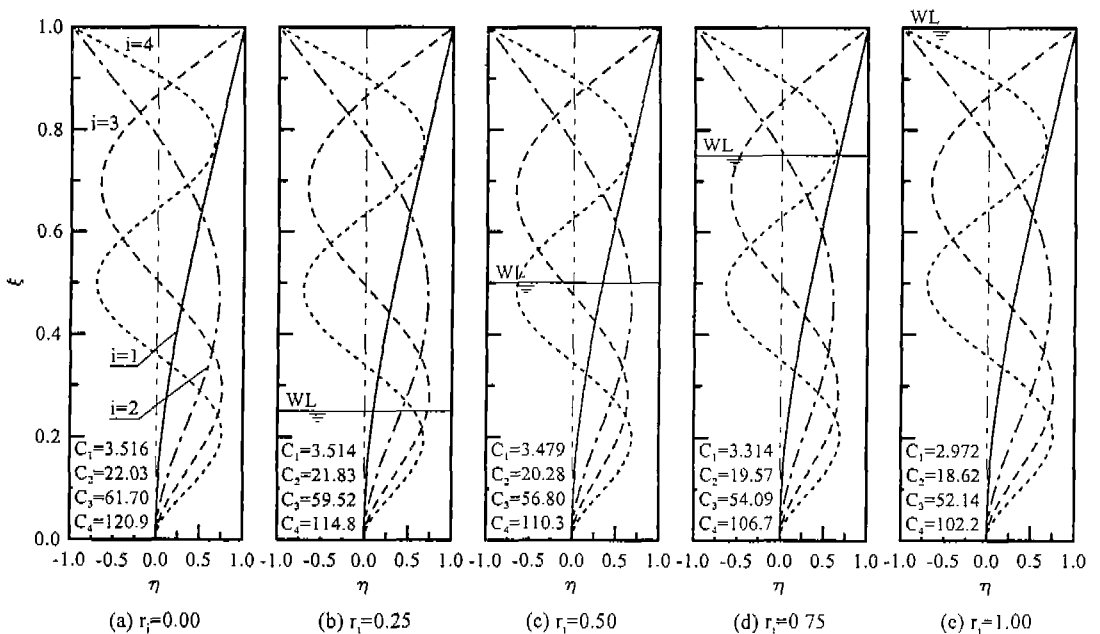


Fig. 2. Mode shapes of column with $m=0$, $j=0$, and $e=0$

Table 2. Frequency parameter for columns with $k=0.4$

			Frequency parameter, C_i							
r_i	m	j	$e=0.00$				$e=0.03$			
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0.00	0.0	0.0	3.516	22.03	61.70	120.9	3.516	22.03	61.70	120.9
0.00	0.0	0.1	2.487	7.013	30.57	74.77	2.487	7.013	30.57	74.77
0.00	0.0	1.0	0.9752	5.728	30.26	74.65	0.9752	5.728	30.26	74.65
0.00	0.1	0.0	2.968	19.36	55.52	110.7	2.931	18.71	53.09	105.2
0.00	0.1	0.1	2.274	6.793	28.53	69.98	2.254	6.824	28.58	70.04
0.00	0.1	1.0	0.9633	5.174	28.08	69.79	0.9619	5.179	28.08	69.79
0.00	1.0	0.0	1.557	16.25	50.90	105.2	1.503	15.35	48.02	99.29
0.00	1.0	0.1	1.430	6.275	24.75	63.74	1.385	6.396	24.95	63.89
0.00	1.0	1.0	0.8679	3.391	24.02	63.46	0.8574	3.428	24.04	63.48
0.25	0.0	0.0	3.514	21.83	59.52	114.8	3.514	21.83	59.52	114.8
0.25	0.0	0.1	2.487	7.006	30.11	71.70	2.487	7.006	30.11	71.70
0.25	0.0	1.0	0.9752	5.722	29.80	71.58	0.9752	5.722	29.80	71.58
0.25	0.1	0.0	2.967	19.21	53.80	105.3	2.930	18.58	51.57	100.3
0.25	0.1	0.1	2.273	6.788	28.15	67.31	2.254	6.819	28.20	67.36
0.25	0.1	1.0	0.9633	5.170	27.71	67.12	0.9618	5.176	27.71	67.12
0.25	1.0	0.0	1.557	16.16	49.43	100.1	1.503	15.27	46.76	94.66
0.25	1.0	0.1	1.430	6.273	24.49	61.48	1.385	6.393	24.68	61.62
0.25	1.0	1.0	0.8679	3.390	23.76	61.20	0.8574	3.427	23.78	61.22
0.50	0.0	0.0	3.479	20.28	56.80	110.3	3.479	20.28	56.80	110.3
0.50	0.0	0.1	2.478	6.896	27.70	69.20	2.478	6.896	27.70	69.20
0.50	0.0	1.0	0.9749	5.622	27.39	69.07	0.9749	5.622	27.39	69.07
0.50	0.1	0.0	2.946	17.97	51.01	101.5	2.911	17.44	48.82	96.95
0.50	0.1	0.1	2.266	6.700	25.94	64.84	2.247	6.729	25.99	64.89
0.50	0.1	1.0	0.9629	5.100	25.49	64.64	0.9615	5.105	25.50	64.64
0.50	1.0	0.0	1.554	15.19	46.53	96.58	1.500	14.42	43.91	91.58
0.50	1.0	0.1	1.428	6.229	22.60	58.90	1.383	6.343	22.78	59.05
0.50	1.0	1.0	0.8676	3.374	21.87	58.60	0.8571	3.411	21.88	58.62
0.75	0.0	0.0	3.314	19.57	54.09	106.7	3.314	19.57	54.09	106.7
0.75	0.0	0.1	2.428	6.610	27.20	65.36	2.428	6.610	27.20	65.36
0.75	0.0	1.0	0.9728	5.299	26.87	65.23	0.9728	5.299	26.87	65.23
0.75	0.1	0.0	2.846	17.13	48.88	98.27	2.814	16.60	47.01	93.85
0.75	0.1	0.1	2.227	6.473	25.34	61.08	2.209	6.498	25.39	61.13
0.75	0.1	1.0	0.9608	4.863	24.85	60.87	0.9594	4.868	24.86	60.87
0.75	1.0	0.0	1.540	14.12	44.79	93.33	1.487	13.39	42.55	88.38
0.75	1.0	0.1	1.417	6.121	21.62	55.31	1.374	6.220	21.83	55.45
0.75	1.0	1.0	0.8658	3.320	20.78	55.01	0.8554	3.355	20.81	55.03
1.00	0.0	0.0	2.972	18.62	52.14	102.2	2.972	18.62	52.14	102.2
1.00	0.0	0.1	2.292	6.396	25.95	63.24	2.292	6.396	25.95	63.24
1.00	0.0	1.0	0.9654	4.887	25.59	63.10	0.9654	4.887	25.59	63.10
1.00	0.1	0.0	2.619	16.80	47.77	94.76	2.594	16.33	45.94	90.45
1.00	0.1	0.1	2.119	6.309	24.66	60.05	2.103	6.329	24.70	60.09
1.00	0.1	1.0	0.9537	4.548	24.16	59.83	0.9523	4.553	24.17	59.84
1.00	1.0	0.0	1.501	13.97	43.30	89.21	1.452	13.21	40.87	84.20
1.00	1.0	0.1	1.387	6.061	21.56	54.47	1.346	6.146	21.76	54.63
1.00	1.0	1.0	0.8600	3.244	20.72	54.14	0.8497	3.277	20.74	54.16

Table 2는 $k=0.4$ ($\rho_c=2500 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f=1000 \text{ kg/m}^3$)인 경우 r_i , m , j 및 e 의 변화에 따른 무차원 고유진동수를 수록한 것이다. Table 2의 $e=0.03$ 에 대한 결과 중 $m=0$ 인 경우에는 e 값과는 무관하므로 $e=0.00$ 에 대한 무차원 고유진동수와 같다. 이 표들에서 r_i , m 및 j 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 감소함을 알 수 있다.

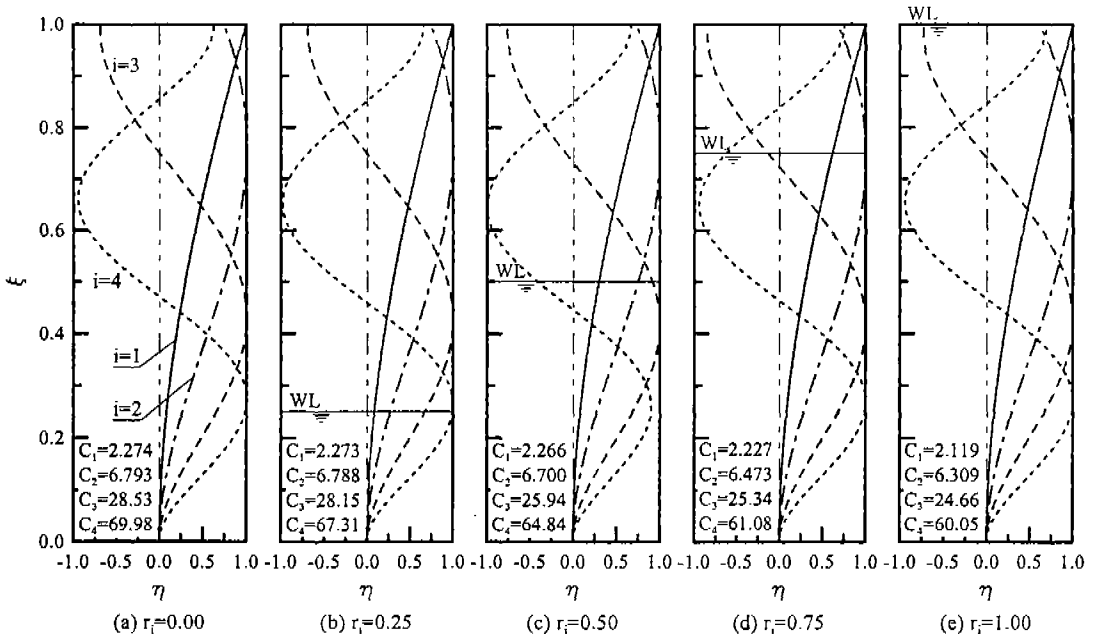


Fig. 3. Mode shapes of column with $m=0.1$, $j=0.1$, and $e=0$

Table 2에서 $m>0$, $j=0$ 인 경우에는 $e=0.00$ 에 대한 무차원 고유진동수가 $e=0.03$ 에 대한 결과보다 항상 크지만, $m>0$, $j>0$ 인 경우 제1모드의 경우만 $e=0.00$ 에 대한 결과가 크고 제2~4모드는 $e=0.03$ 에 대한 고유진동수가 큼을 알 수 있다.

Fig. 2와 3은 $k=0.4$, $e=0.00$ 인 경우 유체높이 지간길이비 r_i 를 0~1까지 0.25씩 변화시키면서 ($m=0$, $j=0$) 및 ($m=0.1$, $j=0.1$)인 기둥의 진동형 및 대응되는 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다.

IV. 결론

본 연구에서는 상단에 집중질량을 갖는 유체에 잠긴 기둥의 제변수 변화에 따른 고유진동수 및 진동형을 산출하고, 타문헌의 결과와 비교하여 본 연구결과의 타당성을 보였다. 해석으로서 유체높이 지간길이비, 질량비, 무차원 질량관성모멘트 및 집중질량의 편심률에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

참고 문헌

1. Chang, J.Y. and Liu, L.H., 1989, "Some Studies on the Natural Frequencies of Immersed Restrained Column," Journal of Sound and Vibration, Vol. 130, pp.516-524.
2. Han, G.D. and Sahglivi, J.R., 1994, "Dynamic Model Response of Wave-Excited Offshore Structures," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 120, pp.893-908.
3. Uscilowska, A. and Kolodziej, J.A., 1998, "Free Vibration of Immersed Column Carrying a Tip Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 216, pp.147-157.