

2차 레귤레이션 서보 시스템을 위한 IPD 제어의 Lyapunov 안정도 해석

이 정 훈

항공기부품기술연구센터, 경상대학교 전기전자공학부 제어계측공학전공
660-701 진주시 가좌동 900, Tel.:0591-751-5368, Fax.:0591-757-3974,
email:jhleew@nongae.gsnu.ac.kr

Lyapunov Stability Analysis of IPD Control for 2nd Order Regulation Servo Systems

Jung-Hoon Lee

ReCAPT, Dept. of Contr. & Instrum., Gyeongsang Nat. University

Abstract

In this paper, by means of Lyapunov second method, the stability of IPD control servo systems is analyzed in the time domain for the first time. Based on the results of the stability analysis, the design rule to select the gain of IPD control is suggested such that the maximum error of output to the nominal system is guaranteed for all uncertainty and load variations. An example of a position control of a brushless dc motor is given to prove the unusefulness of the gain design rule.

1. 서론

PI/PID 제어는 그의 모든 산업 현장에서 연구 개발된 기존의 알고리즘들 중에서 자동화 등의 제어 문제에 가장 많이 사용하는 유용한, 현장 엔지니어로부터 신뢰성을 얻은 제어 알고리즘이다. 그 이유는 Integral wind-up 문제가 존재하지만 무엇보다 간단하며 응답이 빠르고, 제어기의 이득 Tuning이 어렵지만 한번 이루어지면 강인하게 아주 잘 동작하여 실제적인 검증은 얻었기 때문이다. PI/PID 제어의 이득 조정(Tuning)이 어려운 이유는 이론적으로 시간영역 혹은 주파수 영역에서 이득을 설계하여 실제 시스템에 적용하면, 모델링 오차와 특히 주파수 영역의 페루프 전달함수의 Zero를 고려하지 않았으므로 예상과는 다른 출력이 나타나기 때문이다. 그리고 $t=0$ 시간에 P 동작에 의하여 초기 입력이 결정되어, 큰 기준명령이 주어지면 초기입력이 커져 P 동작의 이득을 증가시키기 어려운 단점이 있다[1,2].

IPD제어는 그림 1과 같이 PID 제어의 P제어 입력에서 오차 대신 출력을 사용한 것으로, 제어 응답의 속도는 PID보다 느려지지만, 초기의 제어 입력이 영이 되고 적분 동작에 의하여 출발하므로 P와I 이득

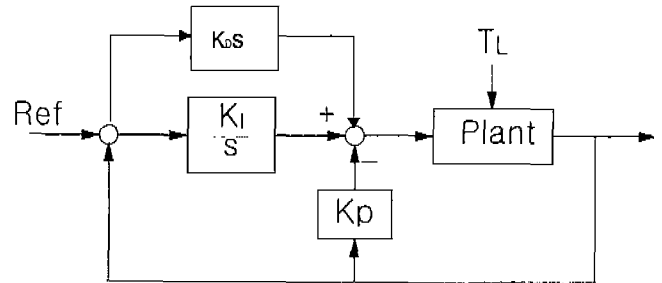


그림 1 IPD 제어 시스템의 구조

을 증가시킬 수 있다. 외란과 매개변수 변동에 대한 강인성은 PID제어와 같은 성능을 가지며, IPD 제어 시스템의 전달 함수에 Zero가 생기지 않아 전달함수의 극을 설계한 대로 응답이 나타나기 때문에 제어기의 설계가 훨씬 용이해지는 장점이 있다. 그러므로 응답이 빠를 필요가 없는 혹은 응답이 느려야만 되는 강인 제어 서보 문제에 적용이 되고 있다[3-5]. 1986년 Nandam 과 Sen은 직류 전동기 제어 문제에 대하여 IPD와 PI제어 실험을 통하여 두 알고리즘의 여러 가지 특징에 관하여 비교 연구를 발표하였다[3-4]. IPD 제어뿐만 아니라 제어기의 설계는 일반적으로 제어기의 구조 결정과 이득선정으로 나누어 볼 수 있으므로 제어기의 구조가 결정되었다면 이득의 결정은 상당히 중요한 문제이다. 이득 결정에서 고려해야 할 점은 여러 가지 응용 분야에 따라서 요구 조건이 다를 수 있지만 무엇보다도 기본적으로 안정성을 만족해야 하고 그리고 분야 별로 요구되는 성능 요건을 충족시킬 수 있는 이득을 결정해야 한다.

본 연구에서는 [6]의 PI 제어의 안정성해석연구에 이어서 IPD 제어로 구동되는 레귤레이션 서보 시스템에 대하여 Lyapunov 의미에서 외란과 불확정성에 대한 안정도를 해석하고 이 해석을 바탕으로 외란과 매개변수 변동에 대하여 IPD제어의 이득 결정 규칙

을 제안하고자한다. 그리고 연구 결과의 타당성을 검증하기 위하여 브러쉬없는 직류 전동기 위치 제어의 예를 들어 제안된 결과에 의하여 IP의 이득을 설계 후 시뮬레이션하여, 그 결과를 검토한다.

II. Lyapunov 안정도 해석

2.1 IPD 제어 시스템

가. 대상 플랜트

각 종 전동기와 같은 다이내믹 플랜트의 위치 제어 문제에서 대상 플랜트는 다음과 같이 2차 시스템으로 모델링이 가능하다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -a_1(t) \cdot X_1 - a_2(t) \cdot X_2 + b(t) \cdot U - F(t) \end{aligned} \quad (1)$$

X_1 는 제어량인 위치 상태변수, X_2 는 속도 상태변수, U 는 제어 입력이며, $F(t)$ 는 외란이고 $a(t)$ 와 $b(t)$ 는 불확실 시스템 매개변수(Uncertain system parameters)로 다음과 같이 공칭값과 불확실값으로 표현이 된다.

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_1^0 + \Delta a_1(t) & a_2(t) &= a_2^0 + \Delta a_2(t) \\ b(t) &= b^0 + \Delta b(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 a_1^0 , a_2^0 와 b^0 는 각각 $a(t)$ 와 $b(t)$ 의 모델링 과정에서 얻어진 각 매개변수의 공칭값이고 모델링 오차, $\Delta a_1(t)$, $\Delta a_2(t)$ 와 $\Delta b(t)$ 와 외란, $F(t)$ 의 변화 최대값은 유계되었으며(Bounded), 모델링 과정으로부터 알 수 있다고(Known) 가정하고 그 값을 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \Delta a_{1M} &\equiv \max[|\Delta a_1(t)|] & \Delta a_{2M} &\equiv \max[|\Delta a_2(t)|] \\ \Delta b_M &\equiv \max[|\Delta b(t)|] & F_M &\equiv \max[|F(t)|] \end{aligned} \quad (3)$$

그리고 일반성의 희생없이 $b(t)$ 는 양이라고 가정하고 그의 변화 최소값과 최대값을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} 0 < b_m < b(t) < b_M \\ b_M &\equiv \max[b(t)] & b_m &\equiv \min[b(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

나. IPD 제어

상기 플랜트를 기준 명령값 X_R 로 레귤레이션하기 위한 PID 제어의 문제를 개선한 IPD 제어기는 다음과 같다.

$$U = -K_P \cdot X_1(t) + K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \dot{e}(t) \quad (5)$$

여기서 오차 e 와 e_0 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$e \equiv X_R - X_1, \quad \dot{e} \equiv -\dot{X}_1 = -X_2 \quad (6)$$

IPD 제어 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -(a_1^0 + b^0 K_P) \cdot X_1 - (a_2^0 + b^0 K_D) \cdot X_2 \\ &\quad - b^0 K_I \int_0^t X_1(\tau) d\tau + b^0 K_I X_R t - D(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $D(t)$ 는 Lumped Uncertainty 이다.

$$D(t) = \Delta a_1 X_1 + \Delta a_2 X_2 + F(t) + \Delta b U \quad (9)$$

기준 명령값 X_R 과 Lumped Uncertainty $D(t)$ 로부터 출력의 전달함수는 다음과 같다.

$$X_1(s) = b^0 K_I / \Lambda(s) X_R(s) - 1 / \Lambda(s) D(s) \quad (10)$$

$$\Lambda(s) = s^3 + (a_2^0 + b^0 K_D) s^2 + (a_1^0 + b^0 K_P) s + b^0 K_I \quad (11)$$

만약 전달함수 (10)을 사용 영점이 없는 이상적인 3차 시스템으로 IPD의 이득, K_P , K_I 와 K_D 가 극배치 등의 방법으로 안정하게 설계되어 동작한다면, 제어 입력의 식 (5) 중 오차적분의 정상상태 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_S &= \int_0^{t_s} (X_R - X_1) dt \\ &= [(a_1(t_s) + b(t_s)) X_R + F(t_s)] / [b(t_s) K_I] \end{aligned} \quad (12)$$

이 값은 다음 Lyapunov 안정도 해석에 사용될 것이며, t_s 는 외란과 불확실성이 변화한 후의 충분한 정상상태 시간을 의미한다. 상기 정상상태의 오차 적분값은 IP 제어 시스템의 안정도 해석을 위한 Lyapunov Candidate Function을 선정할 때 사용된다.

본 연구에서는 IPD제어로 레귤레이션되는 서보 시스템의 안정성에 대하여 Lyapunov Second Method를 적용하여 시간영역에서 처음으로 재해석하여, IPD 제어의 이득의 함수로 모델링 오차에 의한 과도 상태의 안정 영역에 관한 관계식을 구한다. 이로부터 모델링 오차와 외란의 최대값을 사용하여 공칭 시스템의 설계출력으로부터 모델링 오차와 외란에 의하여 발생되는 최대 오차를 구하여, 모델링 오차와 외란에 대하여 최대오차를 보장할 수 있는 이득의 설계 규칙을 제안하고자 한다.

2.2 Lyapunov안정도 해석과 강인이득설계

가. Lyapunov안정도 해석

Lyapunov 의미에서 IPD제어 시스템의 안정성을 해석하기 위하여 Lyapunov 후보 함수를 오차와 오차적분 정상상태 값과의 오차적분의 차이를 사용하여 양의 값으로 다음과 같이 선정하자.

$$V = 1/2 [e_0^2 + e^2 + \dot{e}^2] \quad (13)$$

여기서 오차 e 와 e_0 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$e_0 \equiv I_S - \int_0^t (X_R - X) dt. \quad (14)$$

식 (13) 후보함수를 시간에 대하여 미분하여 플랜트 수식 (1), IPD 제어 수식 (5) 그리고 정상상태의 오차적분값(12)를 대입하여 정리하면 식 (15)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_0 \cdot \dot{e}_0 + e \cdot \dot{e} + \dot{e} \cdot \ddot{e} \\ &= -e_0 \cdot e + e \cdot \dot{e} - \dot{e} \cdot [(a_1^0 + b^0 K_P) e \\ &\quad + (a_2^0 + b^0 K_D) \dot{e} - b^0 K_I e_0 - D'(t)] \\ &= -e_0 \cdot e - (a_1^0 + b^0 K_P - 1) e \dot{e} \\ &\quad - (a_2^0 + b^0 K_D) \dot{e}^2 + b^0 K_I e_0 \dot{e} + D'(t) \\ &= -X^T Q X + D'(t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $D'(t)$ 는 다음과 같고

$$\begin{aligned} D'(t) &= [(a_1^0 + b^0 K_P) - (a_1(t_s) + b(t_s) K_P) b^0 / b(t_s)] X_R \dot{e} \\ &\quad + (\Delta a_1 - \Delta b K_P) X_1 \dot{e} + (\Delta a_2 - \Delta b K_D) X_2 \dot{e} \\ &\quad + [F(t) - F(t_s) b^0 / b(t_s)] \dot{e} + \Delta b K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

그리고 Q 는 양확정 행렬로

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -b^0 K_I/2 \\ -1 & 0 & 2(a_1^0 + b^0 K_P - 1) \\ b^0 K_I & -(a_1^0 + b^0 K_P - 1) & (a_2^0 + b^0 K_D) \end{bmatrix} \quad (17)$$

상기 (15)의 최종 2차식으로부터 IPD 제어 페루프 시스템에 관한 다음의 안정성 결론을 얻을 수 있다.

$$\dot{V} < 0 \quad \text{for } e > e_B \quad (18)$$

여기서 e_B 는 안정 영역의 경계값으로 다음 식 (12)와 같다.

$$e_B = (\|D'\|/\|Q\|)^{1/2} \quad (19)$$

$$\|Q\| = [\text{Tr}(Q^T Q)]^{1/2}$$

그림 2은 외란과 불확실성의 모델링 오차에 대한 Lyapunov 안정영역을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 불확실성과 외란이 존재할 경우, IPD 제어 시스템의 Lyapunov 의미에서 안정성은 유계 안정성(Bounded Stability)을 나타낸다. 그림 2와 식 (12)로부터 모델링 오차인 불확실성 값과 외란이 안정성 영역에 어떤 함수로 영향을 주는지 잘 알 수 있으며, 매개변수 변동 혹은 외란이 발생하였을 때의 공칭 출력으로부터 최대 오차를 의미한다. 실제 e_B 를 정확하게 구할 수는 없지만 불확실성과 외란의 최대값인 수식 (3)과 (4)로부터 e_B 를 IPD제어의 이득 K_I , K_P 와 K_D 의 함수로 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\hat{e}_B = (\|D'\|/\|Q\|)^{1/2} \quad (20)$$

$$D'(t) = [\Delta a_{1M} + \Delta b_M K_P] \frac{b_M}{b_m} \|X_R\| \dot{e} + (\Delta a_{1M} + \Delta b_M K_P) \|X_1\| \dot{e} + (\Delta a_{2M} + \Delta b_M K_D) \|X_2\| \dot{e} + F_M \dot{e} + \Delta b_M K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \dot{e} \quad (21)$$

나. 강인 이득설계

상기 (20) 수식을 이용하여, 외란과 불확실성의 존재하에 출력오차 한계 e_a 를 보장하는 IPD제어의 이득을 설계할 수 있다. 상기 안정성 해석을 바탕으로 주어진 오차 허용 범위 e_a 을 보장하는 세 가지 경우에 대하여 안정성과 강인성의 설계를 결론적으로 언급하면 다음과 같다,

① 외란과 불확실성이 없는 경우 안정성 설계

$$(\Delta a_1(t) = \Delta a_2(t) = \Delta b(t) = 0, F(t) = F(t_{SS}) = 0)$$

안정영역의 경계값 (19) 식과 그의 추정값 (20) 식은 다음과 같이 영이되고

$$e_B = \hat{e}_B = 0 \quad (22)$$

최소 안정성을 만족하기 위하여 행렬 Q 가 양행렬이기 위한 IPD의 이득 K_P 와 K_I 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_D &> (-a_2^0/b^0) \\ (a_1^0 + b^0 K_P - 1) &> -(b^0 K_I)^2 - 1 \\ (b^0 K_P)(a_1^0 + b^0 K_P - 1) &> -(a_2^0 + b^0 K_D) \end{aligned} \quad (23)$$

② 외란만 존재하는 경우 강인성 설계

안정영역의 경계값 (19) 식과 그의 추정값 (20) 식은 다음과 같으며

$$D'(t) = [F(t) - F(t_s)b^0/b(t_s)] \dot{e} \quad (24)$$

$$\hat{e}_B = F_M/\|Q\| \quad (25)$$

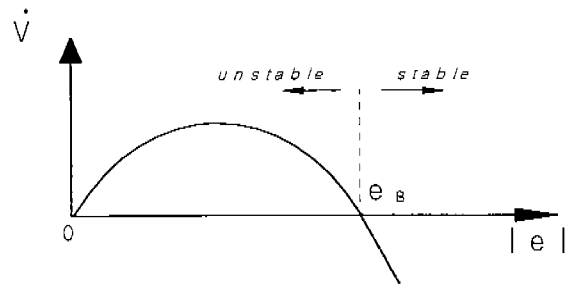


그림 2 Lyapunov 안정영역

$$\therefore \begin{cases} K_P > [F_M e_a - a_1^0 + 1]/b^0 \\ e_a > os(\zeta) + \hat{e}_B \end{cases} \quad (26)$$

를 만족하는 K_P , K_I , K_D 를 선정한다. 수식 (26)에서 $os(\zeta)$ 는 공칭시스템의 제동비 조건에 따른 오버슈우트이다.

③ 외란과 불확실성의 모델링 오차가 동시에 존재할 때, (19)의 관계로부터 다음 (27)식을 만족하는 범위에서 K_P , K_I 와 K_D 를 구한다.

$$\begin{aligned} K_P &> \frac{-(a_1^0 - 1)e_a + \Delta a_{1M}(|X_R| + |X_1|) + \Delta a_{2M}}{b^0 - \Delta b_M e_a} \\ &+ \frac{F_M + \Delta b_M K_I \int_0^t e d\tau + \Delta b_M K_D \dot{e}}{b^0 - \Delta b_M e_a} \quad (27) \\ e_a &> os(\zeta) + \hat{e}_B \end{aligned}$$

상기 (23), (26), (27) 수식에 의하여 각 경우에 해당하는 조건에서 공칭 시스템의 출력으로부터 허용한도 오차 범위를 만족하는 출력을 얻을 수 있는 IP 제어의 이득 설계가 가능하다. 따라서 제어 문제에 따라서 만족시켜야할 조건이 다르고 시간영역의 허용오차만 주어지지 않으므로, 시간영역의 허용오차에 대하여서는 본 연구의 결과를 활용하고 Settling Time, Overshoot 그리고 주파수 영역의 요구조건 Phase와 Gain Margin등에 대하여서는 기존의 연구결과를 활용하여 주어진 요구조건을 전부 만족하는 이득 집합에서 선정하기를 제안한다.

III. 시뮬레이션 연구

본 시뮬레이션 연구에서 사용한 직접구동 브러쉬

Item	Value	Unit
Rated Power	120	[Watt]
Rated Torque	11.0	[Nm]
Rated Speed	123	[rpm]
Rated Voltage	70.0	[Volt]
Rotor Inertia	0.00156	[Kgm ²]
Current Constant	3.038	[Nm/A]
Number of Pole	16	

표 1 직접구동 전동기의 특성



그림 3 IPD 제어 결과

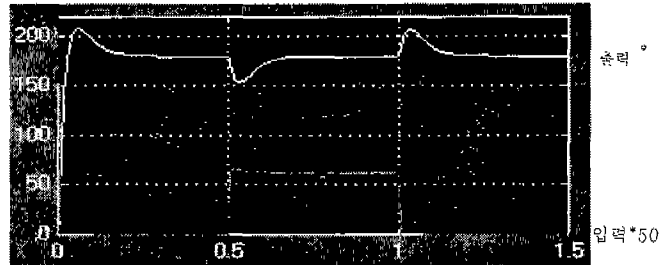


그림 4 PID 제어 결과

있는 직류전동기의 시방이 표1에 나타나 있다. 표 1의 값을 사용하여 모델을 구하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -54.25 \cdot X_2 + 12446 \cdot U - F \end{aligned} \quad (28)$$

PD 제어 레귤레이션 서보 시스템을 설계하자. 시뮬레이션 예를 부하변동만 존재하는 경우를 고려한다. 권저 위치 기준 명령을 X_R 을 $180 [^\circ]$ 로 주어지고, 최대부하 변동하에서 $20[\%]$ 위치오차가 허용된다면, 식(26)에 의하여

$$K_p > 1.98, \quad \text{for } |e_B| < 36^\circ \quad (29)$$

$K_p=2$ 을 선정한다. 그리고 오우버슈터가 없는 임계 진동의 설계를 위하여 전달함수 (10) 수식에서 극배치를 우세 중근과 그의 10배 큰 근으로 배치한다. 즉 $s_1 = s_2 = s_3/10$ 이다.

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (s + s_1)(s + s_2)(s + s_3) \\ &= s^3 + 12s_1s^2 + 21s_1^2s + 10s_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} s_1 = s_2 = 34.7, \quad s_3 = 347 \\ K_D = 0.0289 \quad K_I = 32.8965 \end{aligned}$$

$$\therefore K_D = 0.03 \quad K_I = 33$$

외란에 대한 강인성을 보기 위하여 시간 0.5초 순간에 최대 부하를 인가하고 시간이 1.5초인 순간에 부하는 제거하였다. 그림 3은 IPD 제어 위치제어 시스템의 상기 부하 조건하의 시뮬레이션 결과이고, 그림 4는 비교를 위하여 IPD에서 설계된 이득을 그대로 사용한 PID 제어 위치제어 시스템의 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이다. 같은 이득에서 IPD제어의 응답 특성은 예상대로 PID제어 보다 느리지만 오우버슈터가 없는 임계진동 과도상태 출력을 나타내고 정상상태가 되면 외란에 대한 응답특성은 PID 제어와 같다. PID 제어의 초기 입력이 평상시 보다 과도하게 키지는 반면 IPD 제어는 입력이 적정한 값이다. 그리고 최대 부하 변화 시에도 공칭 출력에서 20% 허용한 설계대로 IPD의 결과가 만족함을 알 수 있다. 따라서 부하 변동에도 시간영역의 허용오차를 만족하는 IPD제어의 이득의 설계가 가능함을 확인할 수 있다.

VI. 결론

본 연구에서는 불확실성과 외란이 존재하는 플랜트

를 레귤레이션 서보 제어하기 위한 IPD 제어시스템에 대하여, Lyapunov 의미에서 안정성을 해석하여, 불확실성과 외란 하에서는 유계 안정성(Bounded Stability) 특성을 밝히고, 이 안정성 해석에 따른 유계값(Bounded Value)을 사용하여 불확실성과 외란이 존재하더라도 허용 오차 범위를 만족할 수 있는 IPD의 이득 선정에 대한 유용성 방법을 제안하였다. 세부적으로 안정성 설계와 강인성의 설계로 나누어 제시하였다, 안정성 설계는 최소한의 거의 모든 제어 시스템의 기본 요구 조건이며 강인성의 설계에서는 외란만 존재하는 경우와 외란과 불확정성이 동시에 존재하는 경우 2가지별로 나누어, 주어진 오차 변동 한계를 만족하는 설계 방법을 제시하였다. 직류전동기 브러쉬없는 직류 전동기 위치 제어의 컴퓨터 비교 시뮬레이션을 통하여 연구된 결과의 유용성을 입증하였다.

참고 문헌

- [1] K. J. Astrom and C. C. Hang, P. Persson, and W. K. Ho, "Toward intelligent PID control," *Automatica*, Vol. 28, no.1 pp.1-9, 1992.
- [2] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers," *Trans. ASME*, Vol.64, pp.759-768, 1942.
- [3] P. K. Nandam and P. C. Sen, "A comparative study of proportional-integral(P-I) and integral-proportional(I-P) controllers for DC motor drives," *Int. J. Control*, Vol. 44, no.1 pp.283-297, pp.1986.
- [4] P. K. Nandam and P. C. Sen, "Analog and digital speed control of DC drives using proportional-integral and integral-proportional control techniques," *IEEE Tran. on Ind. Electronics*, Vol.IE-34, no.2, pp.227-233, 1987.
- [5] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer Controlled System: Theory and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 1984.
- [6] 이정훈, 신희범, "PI형 서보 시스템의 Lyapunov 안정도 해석," 1997년 제어계측 자동화 로보틱스 연구회 합동 학술 발표회 논문집, pp.41-44,1997.
- [7] 이정훈, "2차 레귤레이션 서보 시스템을 위한 PID 제어의 Lyapunov 안정도 재해석," 1998년 한국자동제어학술회의 논문집, pp.13-16,1998.