

볼-막대 시스템의 안정화를 위한 선형제어에 관한 연구

신기수, 박래방, 권순재

부경대학교 기계공학과 대학원

Stabilization control of inverted Ball-Beam system by the linear cotroller

Gi-Soo Shin, Rae-Bang Park, Soon-Jae Kwon

Dept. of Mechanical Engineering, Graduate school Pu Kyong, National University

Abstract

A study on simulation using Matlab shows the dynamic condition of a beam on feed-back with encorder. A controller for rapid response interpreted the stability on simulation with pole-placement technique. The effect of response was considered feed-back gain. The result of feed-back is described that various feed-back coefficient shows stable controll systems. It would be expected each result according to controllers.

서론

볼-막대 시스템은 도립진자 시스템과 같은 원리에 입각하여 막대 위의 불안정한 공의 위치를 막대의 평형을 유지함으로써 제어하는 시스템이다. 본 연구에서는 막대중심을 회전축으로 하여 막대 위의 볼을 구르도록 위치한 후 막대에 가하는 힘을 조절하여 막대 위의 볼의 위치를 일정하게 조절하도록 구성하였다. 1965년 Kapitza가 로켓의 발사대를 안정화시킬 목적으로 도립진자 시스템을 설계·제작하여 연구를 시작한 이래 Cannon이 Bang-Bang 제어를 사용하여 도립위치에 있는 Bending beam을 안정화시킬 수 있는 제어 시스템을 설계한 바 있고, Koeigsber와 Frederick은 Bending beam을 안정화시킬 수 있는 방법으로 출력 제한 기법을 이용한 제어기를 제시하였다.

이 시스템은 고전 및 현대의 다양한 제어 방식의 효과를 검증하는 실험 장치로 사용되고 산업용 로봇의 위치제어 시스템 그리고 우주 항공 분야의 비행체 자세 제어 시스템 등의 설계를 위한 필수적인 장치로

이용되고 있다. 본 연구에서는 공의 위치를 일정하게 유지하기 위해 평판의균형을 조절하도록 구성되었다.

1. 볼 - 막대 시스템의 운동방정식

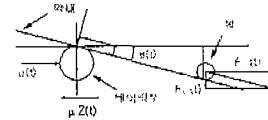


그림. 1 베어링부의 자유 물체도

Fig. 1 Free body diagram of bearing part

그림. 1 에서의 베어링부 운동방정식은

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = u(t) - F_H(t) - \mu \frac{dz(t)}{dt} \quad (1)$$

$$u(t) = M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + F_H(t) + \mu \frac{dz(t)}{dt} \quad (2)$$

\$M\$ : 베어링부의 질량[Kg], \$z(t)\$ : 시간 \$t\$ 동안의 베어링부의 위치, \$F\_H(t)\$: 막대가 넘어 갈 때 베어링부가 받는 힘[N], \$\mu\$ : 베어링부의 마찰계수, \$u(t)\$ : 모터부에서 내는 동력.

막대부의 운동방정식은 그림 2 에서 수직,수평방향에 대한 운동방정식은 각각 다음과 같다.

$$F_V(t) = m \frac{d^2}{dt^2} r \sin \theta \quad (3)$$

$$F_H(t) = m \frac{d^2}{dt^2} r \cos \theta \quad (4)$$

여기에서 막대의 회전 방정식은

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = u(t) + F_V(t) r \cos \theta(t) - F_H(t) r \sin \theta - \eta \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (5)$$

(1)식에 (4)식을 대입하면

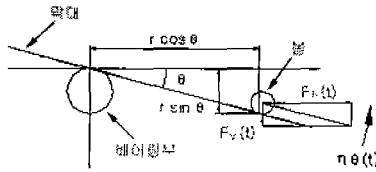


그림. 2 볼과 막대의 자유물체도

Fig. 2 Free diagram of Beam and ball

$m$  : 볼의 무게[Kg],  $\theta$  : 막대의 기울어진 각도,  $r$  : 볼이 축의 중심에서 떨어진 거리[m].

$$u(t) = M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} r \cos \theta + \mu \frac{dz(t)}{dt} \quad (6)$$

이 된다. 이 때 막대가 기울어지기 시작 할 때의 베어링부의 움직인 거리를 무시하면

$$u(t) = M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \mu \frac{dz(t)}{dt} \quad (7)$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \frac{1}{M} [u(t) - \mu \frac{dz(t)}{dt}] \quad (8)$$

이 된다. 막대의 회전 운동방정식은

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = u(t) + [m \frac{d^2}{dt^2} r \sin \theta] r \cos \theta(t) - [m \frac{d^2}{dt^2} r \cos \theta] r \sin \theta - \eta \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (9)$$

이 된다. 식 (9)를 선형화시켜 볼-막대시스템에 선형 제어이론을 적용시킨다.

볼-막대 시스템에서는  $z(t)$ 와  $\theta(t)$ 는 수평을 유지하여야 하기 때문에 0에 수렴한다고 가정할 수 있다. 따라서  $\sin \theta(t)$ ,  $\cos \theta(t)$ 는

$$\sin \theta(t) \approx \theta(t), \quad \cos \theta(t) \approx 1 \quad (10)$$

따라서, 식 (10)을 식 (9)에 대입하면

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{J - mr^2} [u(t) - mr^2 \theta(t) - \eta \frac{d\theta(t)}{dt}] \quad (11)$$

식 (8)과 식 (11)을 Laplace변환하면 S에 대하여 전체적으로 2차계가 된다는 것을 알 수 있다.

### 3) 시스템의 상태 방정식

최종 출력인 베어링부의 변위  $z(t)$ 와 막대의 기울어짐  $\theta(t)$ 를 각각  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ 라 두고 베어링부의 속도  $\dot{z}(t)$ 와 막대의 각속도  $\dot{\theta}(t)$ 를 각각  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$ 라고 하면 상태변수  $x_1, x_2, x_3, x_4$ 를

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t), & x_2(t) &= \theta(t) \\ x_3(t) &= \dot{z}(t), & x_4(t) &= \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

로 정의하여 식 (8)과 식 (11)을 상태방정식으로 나타내면 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{M} u(t) - \frac{\mu}{M} x_3(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{J - mr^2} u(t) - \frac{mr^2}{J - mr^2} x_2(t) \\ &\quad - \frac{\eta}{J - mr^2} x_4(t) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 블록선도로 나타내면 그림 4와 같다.

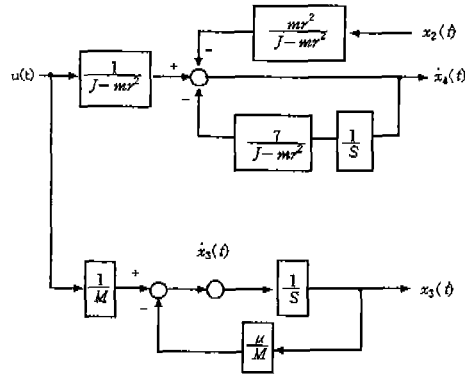


그림. 3 볼-막대 시스템의 블록선도

Fig. 3 block diagram of ball-beam system

## 2. 제어 시스템의 해석

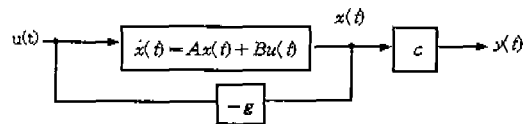


그림. 4 상태궤환 제어계의 구성도

Fig. 4 Block diagram of state feedback control system

그림4는 상태궤환 제어계의 구성도를 나타낸 것이다.

볼-막대 시스템은 베어링부의 위치  $z(t)$ 와 볼의 위치에 따라 기울어지는 막대의 각도  $\theta(t)$ 가 출력이다.

이것을 출력으로 하는 출력 방정식

$$y(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

를 식 (13)과 (14)을 상태공간 모델식으로 나타내면

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (15)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (16)$$

식 (16)에서 A, B, C는

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & ag & ad & -b\eta \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ -ac \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. 볼막대 시스템의 안정도 해석

볼-막대 시스템의 상태 공간 모델식에서 점성마찰을 무시하고( $\eta=0$ ), 새로운 입력값  $u'(t)=cu(t)$ 을 정의하면, 식 (17)의 A, B는 다음과 같이 변형된다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & ag & ad & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -a \end{bmatrix} \quad (18)$$

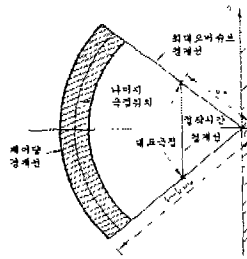


그림 5 극점의 영역 및 바람직한 극점배치의 위치

Fig. 5 Area of pole and place of pole-placement  
볼-막대 시스템의 안정도를 조사하기 위하여 다음과 같은 특성방정식을 이용하여 그 근을 조사한다.

$$|SI - A| = S^n + a_{n-1}S^{n-2} + \dots + a_1S + a_0 = 0 \quad (19)$$

식 (18)을 식 (20)에 대입하면

$$|SI - A| = S^4 + dS^3 - agS^2 - adgs = 0 \quad (20)$$

$$\text{식 (20)의 근, } s=0, s=d, s=\pm\sqrt{ag} \quad (21)$$

여기에서  $s=\pm\sqrt{ag}$ 가  $s$ 평면의 우반면에 존재함으로써 이 시스템이 불안정하다는 것을 알 수 있다.

식 (21)에서 차수가 4이므로 가제어성행렬 M은 4\*4의 행렬이된다. 따라서, 가제어성 행렬 M은

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (22)$$

그리고 행렬식의 값은

$$|M| = -a^4g^2 \quad (23)$$

이 되므로 주어진 시스템의 제어가능 여부를 판단할 수 있다. 가관측성 행렬 S는

$$S = \begin{bmatrix} C \\ -CA \\ -CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

식 (17)의 행렬 C와 식 (18)의 행렬 A를 계산하면

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & ag & ad & 0 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & -ad^2 & ag \end{bmatrix} \quad (25)$$

식 (25)에서 8\*4의행렬S의 계수는 4이다.

### 3. 극배치법을 이용한 선형제어기의 설계

시스템 외부로부터 주어지는 신호는 실제 페루프 극점을 지정하는데 영향을 주지 않으므로,

$$u(t) = -gx(t) \quad (26)$$

여기서  $g=[g_1, g_2, \dots, g_n]$ 는 1\*n 인 제어게인벡터이다. 이 때 페루프 시스템의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = [A - Bg]x(t) \quad (27)$$

여기서  $[A - Bg]$ 의 고유치는 궤환 이득에 의하여 임의로 지정되기 때문에 페루프계의 모든 극을  $s$ 평면의 좌반부에 배치시킬 수 있다.

페루프 시스템  $[A - Bg]$ 의 극값 혹은 고유값은 다음의 특성방정식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\det[\lambda I - A + Bg] = 0 \quad (28)$$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (29)$$

여기서 계수  $a_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 는 식 (28)로부터 얻어진다. 요구되는 극점의 위치로부터 바람직한 특성방정식을 정의하면

$$(\lambda - \lambda_{1d})(\lambda - \lambda_{2d}) \dots (\lambda - \lambda_{nd}) = 0 \quad (30)$$

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \quad (31)$$

이 된다. 바람직한 특성방정식의 계수  $\alpha_i$ 와 실제 특성방정식의 계수  $a_i$ 를 일치시킨  $n$ 개의 식을 이용하여  $n$ 개의 제어게인을 선정할 수 있다.

$$g_i = \frac{1}{K}(\alpha_{i-1} - a_{i-1}); \quad i=1, 2, \dots, n \quad (32)$$

식 (29)로부터 실제 특성방정식을 구하면

$$(C.E.)_a = \lambda^2 + (a_1 + g_2)\lambda + (a_0 + g_1) = 0 \quad (33)$$

바람직한 페루프 극점으로부터 다음과 같은 특성 방정식을 구할 수 있다.

$$(C.E.)_a = (\lambda + \alpha + \beta j)(\lambda + \alpha - \beta j) = 0 \quad (34)$$

$$(C.E.)_a = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad (35)$$

식 (34)식과 (36)식의 계수를 일치시킴으로서 다음과 같은 제어게인을 선정할 수 있다.

$$g_1 = \alpha^2 + \beta^2 - a_0, \quad g_2 = 2\alpha - a_1 \quad (36)$$

볼-막대 시스템에서 0 이 아닌 초기조건에 대한  $m'\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = 0$ 의 해는

$$\theta(t) = a_1e^{\lambda_1 t} + a_2e^{\lambda_2 t} \quad (37)$$

가 된다. 여기서  $\lambda_1, \lambda_2$ 는 다음의 형태를 갖는다.

$$\lambda_1 = -\xi\omega + \omega_d j, \quad \lambda_2 = -\xi\omega - \omega_d j \quad (38)$$

$$\omega = \sqrt{k/m'}, \quad \xi = c/(2m'\omega), \quad \omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}, \quad (39)$$

$\xi$  : 감쇠비(damped ratio),  $\omega$  : 비감쇠 고유진동수,  $\omega_d$  : 감쇠 고유진동수

대입하면 볼막대 시스템의 선형화된 운동방정식은

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{c}{m'}\frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{k}{m'}\theta(t) \quad (40)$$

이 되고, 막대의 무게를 1이라고 할 때,  $m'=1$  이므

로, 식 (40)은

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -c \frac{d\theta(t)}{dt} - k\theta(t) \quad (41)$$

$$c = 2\omega \xi = \frac{\eta}{J - mr^2}, \quad k = \omega^2 = \frac{mr^2}{J - mr^2} \quad (42)$$

식 (42)과 같은 관계가 성립된다. 따라서

$$\theta(t) = Ae^{-\xi \omega t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (43)$$

가 되고 여기에서 A 와 위상각  $\phi$  를 구하면

$$A = \sqrt{\frac{(\nu_0 + \xi \omega \theta_0)^2 + (\theta_0 \omega_d)^2}{\omega_d^2}} \quad (44)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\theta_0 \omega_d}{\nu_0 + \xi \omega \theta_0} \quad (45)$$

이 된다. 식 (37)과 같이 극 배치를 하여 그 값을 식 (33)에 대입하면 바람직한 이득을 얻을 수 있다.

#### 4. MATLAB을 이용한 시뮬레이션

볼-막대 시스템의 시뮬레이션을 하기 위한 파라메타의 설정은 표1과 같이 한다.

표 1 추정한 파라메타 값

Table 1 Parameter assumption

부호	크기	비고
M	1 [Kg]	베어링부의 무게
m	0.1 [Kg]	볼의 무게
m'	1 [Kg]	막대부의 무게
r	0.1 [m]	축중심에서 볼까지의 거리
g	9.8 [m/s <sup>2</sup> ]	중력 가속도
J	1.4 × 10 <sup>-2</sup> [Kg · m <sup>2</sup> ]	관성력
$\mu$	0.96 [Kg]	베어링부의 마찰력
$\theta_0$	0.3 (rad)	막대부의 초기각도
$\nu_0$	0 (m <sup>2</sup> /s)	베어링 구동부의 초기속도

볼-막대 시스템의 힘과변위의 관계로부터 선형화된 수학적 모델을 도입하기 위해 다음과 같이 가정한다.

1. 위 그림에서 막대는 평면 내에서 2차원 운동을 하고 3차원적인 외란은 없다.
2. 바람등의 외력 및 엔코더에서의 마찰은 무시한다.
3. 초기조건으로 각도가 어느 정도 기울어지고 베어링부는 구동되기 전의 상태라고 가정한다.

이상의 가정하에서 다음과 같이 극점 배치를 하여 막대의 각도에 대한 응답특성만을 시뮬레이션을 하였다.

1.  $\lambda = -1 \pm 2j$  로 지정했을 때

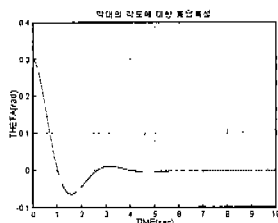


그림 6 막대의 각도에 대한 응답특성 시뮬레이션-1

2.  $\lambda = -2 \pm 2j$  로 지정했을 때

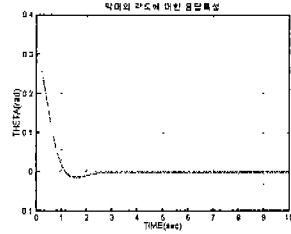


그림 7 막대의 각도에 대한 응답특성 시뮬레이션-2

#### 5. 결론

볼-막대 시스템에서 불안정한 볼의 이동에 따른 불균형의 막대가 평형을 유지하도록 하기 위해서 동특성에 대한 모델링을 하였고 선형화 하였다.

이상의 시뮬레이션에서, 시뮬레이션에 의해 다음의 결과를 도출 할 수가 있었다.

1. 페루프 극점과 계통의 성능 관계를 알면 이들 극점의 위치를 정함으로써 계통의 설계를 효과적으로 할 수가 있다.
2. 상태회환설계가 특성방정식 근들을 직접 제어하기 때문에 고정된 제어기보다 더 유용하다.
3. 극배치법에 의한 제어기의 설계기법이 응답특성에 잘 적용됨을 알 수 있다.
4. 주파수역 성능과 제어시스템의 상대안정도를 검토하여 만족스러운 결과를 얻을 때까지 설계과정이 반복 수행되어야 한다.

#### 참고 문헌

- [1] Benjamin C. Kuo, "digital control system", Second edition, Prentice-hall, 1992
- [2] Daniel J. Inman, "Engineering Vibration", prentice-hall, 1995
- [3] 김종식, "선형제어시스템 공학", 청문각, 1990
- [4] Fukami Takayosi, Fujimaki Tadao, "제어공학", (주) 사이텍 미디어, 1998
- [5] 박종국, 장성환, 안태천, 이상재, 김현기, "자동제어", 형설출판사, 1992
- [6] Richard C. Dorf, "제어시스템의 분석과 MATLAB 의 활용", 청문각, 1997
- [7] 김중환, "선형제어기에 의한 도립 진자 시스템의 안정화 제어", 석사학위논문, P7~P15, 1996
- [8] M. valasek, N. Olgac, "Efficient pole placement technique for linear time-variant SISO systems", IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol.142., No. 5, P451~P452, September 1995
- [9] Lucy Y. Pao, "Multi-input shaping design for vibration reduction", Automatica, 35, P82~P83, 1998