도심 혼잡 가로망에서 확률적 사용자 평형배정에 관한 연구

A Study for Stochastic User Equilibrium Assignment Model in Networks with Congestion

김 성 인(서울대 도시공학과) 박 창 호(서울대 도시공학과 교수)
전 경 수(서울대 도시공학과 교수) 이 성 모(서울대 공학연구소 연구원)

목 차

Ⅰ. 서론

전통적인 통행 배정모형에서는 Wardrop의 통행자 통행경로 선택이론에 근거하여, 구간교통량과 지체함수로 구성된 수학적 모형에서 네트워크 내 대상구간의 지체함수 적분 값의 총합을 최소화시키는 해를 도출하는 방법을 사용해 왔다. 이러한 방법은 통행비용과 통행시간을 독립변수로 하고 구간교통량을 결정변수로 하여 통행배정문제의 해를 구하므로 링크 기반 통행배정(Link-Based Assignment : LBA)이라 한다. LBA모형은 그 해가 구간교통량에 있어 안정적이고 유일함이 증명되었고 이론적으로도 근거가 충분하여 범용적으로 사용되어 왔다.

그러나 LBA모형은 이용자의 전체 통행경로를 파악 할 수 있는 경로교통량을 도출하지 못하므로, 수요예측결과를 이용한 교통운영 및 교통관리 등을 위한 다양한 분석에서 제한적이다.

최근 이러한 문제점을 해결하고자 통행자의 기종점간 경로배정결과의 필요성이 대두되고 있으며 이러한 맥락에서 이 분야의 모형의 연구가 진행되고 있는 실정이다. 이러한 경로기반 통행배정(Path-Based Assignment : PBA)모형은 기종점간 경로교통량을 결정변수로 하여 배정문제의 해를 도출한다.

본 논문에서는 통행자가 모든 정보를 알고 있다고 가정하는 사용자 평형모형의 비현실성을 배제한 확률적 사용자 평형(Stochastic User Equilibrium : S.U.E)의 개념을 도입한 대표적인 LBA모형과 PBA모형을 제시하고 이 두 가지 모형을 예제 네트워크에 적용하여 비교 분석하고 두 모형의 차이점을 알아보고 용량제약을 하는 방법론의 차원에서 두 모형의 상호관계를 규명하여 보기로 한다.

Ⅱ. 적용모형 고찰

<notation>

c_i = 링크 i의 비용
t_i = 링크 i의 지체 없는 통행시간
d_i = 링크 i의 지체
v_i = 링크 I의 교통량
s_i = 링크 i의 서비스율(용량)
q_i = 링크 i의 잔여 대기행렬
m_i = 링크 i의 라그랑지안 승수
h_j = 경로 j의 교통량
c_j = 경로 j의 비용

t_j = 경로 j의 지체 없는 통행시간

m_j = 경로 j를 따라가는 링크들의 라그랑지안 승수들의 합

r_k = O-D쌍 k의 수요

l_k = O-D쌍 k의 라그랑지안 승수

1. Logit-Based Assignment Model

로짓 모형은 모든 선택 대안들의 효용은 유일하며 독립적으로 분포하는 Gumbel 변량들이라는 가정에 기반한다. 로짓 경로 선택 모형은 기·종점 k를 연결하는 하나의 경로 j를 이용하는 효용, $U_j{}^k$을 다음과 같다고 가정한다.

$$U_j{}^k = -\theta t_j{}^k + \varepsilon_j{}^k \qquad \forall\ k,\ j$$

여기서 $t_j{}^k$ 는 측정된 통행시간이고, θ는 양수인 파라메타이고, $\varepsilon_j{}^k$ 는 보정항이다. 또는 $\varepsilon_j{}^k = -\theta \xi_j{}^k$이다. 모든 경로들과 연관된 에러항들은 이상적으로 분포되었다고 가정하기 때문에 $\varepsilon_j{}^k = \varepsilon^k$로 놓을 수 있다. 따라서 효용함수 $P_j{}^k$는

$$P_j{}^k = \frac{e^{-\theta t_j{}^k}}{\sum_l e^{-\theta t_l{}^k}} \quad \forall\ k,\ j$$

기·종점 k사이의 j번째 경로상의 인지 통행시간은

$$T_j{}^k = t_j{}^k + \xi_j{}^k = t_j{}^k - \frac{1}{\theta}\varepsilon^k \qquad \forall\ k,\ j$$

여기서 θ는 인지 통행시간을 보정하는 파라메타이다.

2. Path-Based Assignment Model

여기에서 제시할 Bell의 모형은 네트워크의 링크가 지체가 없는 경우에는 일정한 통행시간과 용량을 가지고 있으며 용량에 도달했을 때에야 그 수요에 해당하는 지체가 발생한다는 가정을 전제로 하고 있다. 링크제약이 있는 경우, 라그랑지안 승수는 네트워크의 평형지체라는 것을 증명하였고 해의 유일성 문제를 검증하였다. 앞절에서 언급한 LBA 모형과는 달리 여기에서는 $v_i \le s_i$ 라는 용량제약을 함수로 표현하였다. 이에 대한 자세한 설명은 다음 장에서 논의될 것이다. 먼저 Bell 모형의 제약조건들을 살펴보면 다음과 같다.

수요적 측면에 있어 k쌍의 각 O-D 들에 대해,

$$\sum_{path/joins\ O-D\ pair\ k} h_j = r_k$$

이 제약들은 링크교통량 v_i 에서의 제약들을 의미하는데, 이는 각 링크 i에 대해

$$\sum_{path/contains\ link\ i} h_j = v_i$$

이기 때문이다.

공급에 있어서는 각 링크 i에 대해 다음의 조건을 필요로 한다.

$$v_i \le s_i$$

Bell은 경로 대안들 사이에서 통행량의 배정이 다음과 같은 로짓 모형에 따라 수행될 때, 확률적 사용자 평형이 이루어진다고 정의하였다.

$$\ln(h_j/h_{j'}) = -\theta(c_j - c_{j'})$$

여기에서 j와 j'는 같은 O-D 쌍을 연결하는 대안 경로들이고 $\theta > 0$는 주어진 파라미터이다. 하나의 OD를 연결하는 두 개의 경로 j와 j'를 상정하자. 비용은 지체 없는 통행시간과 지체의 합으로 구성되고, 위의 식은 $\ln(h_j/h_{j'}) = -\theta((t_j - t_{j'}) + (d_j - d_{j'}))$ 이 된다. 만일 총 수요가 네트워크의 용량보다 작으면 d_j나 $d_{j'}$, 혹은 둘 모두 0이다. 만일 $h_j < s_j$이고 $h_j < s_{j'}$이면, $d_j = d_{j'} = 0$이다. 총 수요가 증가함에 따라, 하나 혹은 다른 제약들에 도달할 때까지 두 경로 사이의 교통량의 분배는 같은 크기로 남을 것이다. $h_{j'} = s_{j'}$을 가정하자. 여기에 총 수요가 더 많이 증가하게 되면 경로j'에서는 그것을 사용하는 부가된 교통량들의 일부로 인해 혼잡이 발생하여 곧 지체가 일어난다. 경로j'에서의 수요가 $s_{j'}$로 회복될 때까지 지체는 증가한다.

다음의 목적함수를 설정하자.

$$\mathbf{P}: \text{Minimise } \sum_i h_j(\ln h_j - 1) + \theta \mathbf{t}^T\mathbf{A}\mathbf{h}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{h},$$
$$\mathbf{s} \ge \mathbf{A}\mathbf{h},$$
$$\mathbf{h} \ge \mathbf{0}$$

목적함수에서 추가되는 항은 통행배정을 분산시키는 효과를 가진다. 위 목적함수의 라그링지안 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{L}' = \sum_j h_j(\ln h_j - 1) + \theta \mathbf{t}^T\mathbf{v} + \mathbf{l}^T(\mathbf{r} - \mathbf{B}\mathbf{h}) + \mathbf{m}^T(\mathbf{s} - \mathbf{v})$$

여기서 $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{h}$.이다. Kuhn-Tucker 조건은

$$(\ln h_j + (\alpha \mathbf{t} - \mathbf{m})^T \mathbf{a_j} - \mathbf{1}^T \mathbf{b_j})\, h_j = 0$$

$$\ln h_j + (\alpha \mathbf{t} - \mathbf{m})^T \mathbf{a_j} - \mathbf{1}^T \mathbf{b_j} = 0$$

$$r_k = \sum_j b_{kj} h_j$$

$$s_i - v_i \geq 0$$

$$m_i \leq 0$$

$$m_i(s_i - v_i) = 0$$

첫 번째 조건식은 $h_j > 0$ 을 보장하므로 두 번째와 같이 표현할 수 있다.
위의 두 번째 조건식은 다시 다음의 식으로 표현된다.

$$\ln h_j = -\theta t_j + m_j + l_k$$

여기에서 k는 경로 j에 의해 연결된 O-D쌍이고, l_k는 라그랑지안 승수이고, t_j는 지체 없는 경로의 통행시간, m_j는 경로 j를 따라 진행되는 라그랑지안 승수들 m_i의 합이다. 위의 식은 쉽게 아래와 같은 경로 선택확률 계산을 위한 로짓 모형의 식으로 표현된다.

$$h_j = r_k \exp(-\theta t_j + m_j) / \sum_{j\ connect\ k} \exp(-\theta t_j + m_j)$$

만일 $m_j = -\theta d_j$이면, 위의 식은 S.U.E의 정의와 모순되지 않는다. m_j의 역할은 경로 j의 용량이 초과되지 않았음을 확인하는 것이다. 정리 1은 어떤 링크에 대해 $m_i = -\theta d_i$가 S.U.E를 위한 필요충분조건임을 증명하는 것이다.(Bell, 1995)

정리 1 : 목적함수 P는 링크 제약식 $\mathbf{s} \geq \mathbf{v} = \mathbf{Ah}$에 관련된 라그랑지안 승수 $\mathbf{m}$이 $-\alpha\mathbf{d}$와 같아지는 경우에만 지체가 있는 네트워크에 대한 S.U.E 배정을 도출한다. 여기에서 $\mathbf{d}$는 SUE 링크 지체들의 vector이다.

여기에서는 평형지체의 유일해와 관련한 문제가 중요하게 부각된다. 목적함수 **P**는 경로교통량 h 에 대해 명확히 볼록함수 임을 알 수 있고, 따라서 경로교통량은 유일하게 정의된다. 또, $\sum_{path/contains\ link\ i} h_j = v_i$ 라는 조건에 의해 링크 교통량은 유일하게 정의된다. 이것은 또한 $m_i = d_i = 0$을 위한 링크들의 집합이 유일하게 정의됨을 의미한다. 그러나, 라그랑지안 승수 즉, 평형지체는 유일하게 결정되지 않을 수 있다. 정리 2는 용량제약의 선형독립이 평형지체들의 유일해를 위한 필요충분조건임을 의미한다.(Bell, 1995)

정리 2 : 묶여있는 모든 제약들이 선형독립인 경우에 한해서, S.U.E 지체는 유일해를 가진다.

III. 용량제약식의 고찰

1. BPR식의 특성

노선 배정모형에 용량함수를 적용하기 위한 요구조건은 다음과 같다.

- 단일해를 구하기 위해서는 용량함수가 non-negative, 단조증가함수이어야 한다.
- 연속함수이어야 하고 미분가능해야 한다.
- 함수 자체를 쉽게 계산할 수 있어야 한다.

위의 요구조건을 충족시킬 수 있고 실제 자주 사용되는 단순화된 함수는 U.S. Bureau of Public Roads(BPR)에서 개발된 아래와 같은 방정식이다. Benson과 Cunagin은 용량제약 배정방법의 각 반복과정 중간에 용량 이상 또는 용량 이하의 모든 링크에 적용할 수 있는 각종 지체함수의 실행효과에 대하여 조사하였다. 그들은 현재 사용하는 지체함수들은 유사하며 특히 BPR함수가 가장 적합하다고 결론지었다.

$$t_a = t_a^0 \ [1 + \alpha \left(\frac{v_a}{s_a'}\right)^\beta]$$

여기서, α, β = parameters of model

s_a' = link a의 실용량

t_a^0 = free-flow travel time

일반적으로 α, β 값은 0.15와 4.0이 쓰인다. 이 식을 사용할 때 얻을 수 있는 장점은 연속함수 미분가능함수로 설정할 경우 각종 모형에서 쉽게 해를 찾을 수 있다는 것이며 용량편람에서 설명하고 있는 비포화시 교통류특성(속도-교통량관계)을 직접적으로 설명할 수 있다는 것이다.

BPR식과 관련하여 교통배정 과정에서 속도-교통량 관계의 적용에 몇 가지 문제점이 나타나는데, 첫째는 가장 심각한 교통류상의 문제는 실제 상당히 짧은 시간동안에 발생하며, 둘째는 배정과정에서 용량은 훨씬 초과하여 배분하더라도 실제 관측치는 최대 용량 수준에 그친다는 것이다. 즉, 교통류 이론과는 달리 BPR 커브는 용량 값을 점근선으로 갖지 않는다는 것이다. 셋째는 링크지체와 노드 지체가 분리되지

않는다는 것이다.
본 논문에서 BPR식의 계수는 일반적으로 널리 쓰이는 0.15와 4를 쓰도록 한다.

2. Constraint ($v \le s$), vertical delay

많은 교통시뮬레이션 모델들은 대기행렬 행태에 주목하여, 링크통행시간에 대한 단순화된 가정들을 사용한다. TRANSYT 모형은 대기행렬들이 “수직지체 가정”(vertical delay assump--tion)에 따라 물리적 공간을 점유하지 않으며, 링크 시작부에서 정지선까지의 통행시간은 (그곳에 대기행렬이 존재하는가의 여부를 떠나) 기하학적 분포를 가지는 것을 가정한다. Ⅱ장에서 제시한 Bell의 모형에서는 지체에 대해 이러한 접근방식을 적용하였다. 실제로 링크에서의 세 가지 지체가 발생한다. 첫째, 교통량-밀도의 관계를 따라 속도가 감소함으로써 나타나는 지체이다. 둘째, 신호 제어 링크의 경우 신호에 의한 주기적인 영향을 받으며 이에 의해 나타나는 지체이다. 셋째, 용량이 초과될 경우 생성되는 잔여 대기행렬에 의해 발생하는 지체이다. 따라서 지체는 교통류의 모든 수준에서 발생하고, 교통량에 따라 증가하는 경향이 있다. 그러나 Ⅱ장에서 제시한 Bell의 연구에서는 단지 지체의 세 번째 요소만 고려된다. 즉 용량에 도달할 때까지 지체는 발생하지 않는다고 가정하였다.
또, $v \le s$ 라는 링크제약함수는 BPR식을 통한 배정과는 달리 용량을 넘어서 배정을 하는 단점을 극복한다.

Ⅳ. 모형의 풀이 알고리즘

1. MSA

Sheffi는 확률적 사용자 평형해의 직접적 도출이 어려우므로 동등 최소화 (equivalent minimization) 프로그램으로 정식화 하였으며, 해의 도출을 위해 가능해 방향으로 현재의 해와는 무관하게 미리 결정된 이동규모를 바탕으로 하는 MSA(Method of Successive Average)를 이용하였다.

<MSA algorithm>

Step 0. (초기화)
초기에 주어진 $t_a^{\,0}$ 를 기반으로 확률적 통행배정 모형을 수행하면 v_n^1가 발생한다. $n = 1$

Step 1.
$t_a^{\,n} = t_a(\,v_a^{\,n}\,), \quad \forall \ a$

Step 2.
$t_a^{\,n}$를 기반으로 확률적 통행배정모형을 수행한다.
이 과정을 통해 보조 링크통행인 $y_a^{\,n}$을 구한다.

$$y_a^{\,n} = \sum_k \sum_j h_k\, P_j^{\,k}(\,c^{\,k\,n}\,)\, \delta_{a,j}^{\,k}$$

Step 3.
새로운 링크 통행 패턴인 $v_a^{(n+1)}$을 구한다.

$$v_a^{\,(n+1)} = v_a^{\,n} + (1/n)(\,y_a^{\,n} - v_a^{\,n}\,)$$

Step 4.
만일 수렴하면 알고리즘을 멈추고, 그렇지 않으면 $n = n + 1$ 하여 **Step 1.**로 돌아간다.

본 논문에서 위 MSA 알고리즘에서 언급한 $y_a^{\,n}$를 구하기 위한 확률값 $P_j^{\,k}(\,c^{\,k\,n}\,)$ 는 잘 알려진 STOCH 알고리즘을 통한 Logit 모형을 따른다. 또, $t_a^{\,n}$ 를 구하기 위한 용량제약식은 BPR식을 사용한다.

2. Column Generation

아래에서 사용하는 방법이 Column Generation이라 불리우는 이유는 경로를 추가할 때마다 link-path incidence matrix인 **A의** 새로운 column들이 추가되기 때문이다.

<Algorithm A_1>

Step 1. (초기화)
d = 0
A 행렬은 아무 column도 갖지 않는다. 즉, 어떠한 path도 정해지지 않았다.

Step 2. (최소비용 경로 탐색)
c = t + d
c 를 이용하여 최소비용 경로를 찾는다.
만약, 더 이상 새로운 경로가 없으면 멈춘다.
새로운 경로를 **A**에 추가한다.

Step 3. (S.U.E 지체 결정)
Run algorithm A_0
d, **h**, 그리고 **v**를 결정한다.
Step 2로 돌아간다.

step 3에서 쓰이는 알고리즘 A_0의 구성은 다음과 같다.

<Algorithm A_0>

Step 1. (초기화)
모든 링크 i에 대해 $M_i = 1$
모든 O-D 쌍 k에 대해 $L_k = 1$
n = 1로 놓는다.

Step 2. (반복계산)
만약, 수렴조건이 만족되면, 정지한다. 그렇지 않으면 아래와 같은 계산을 반복 시행한다.
각각의 j에 대해 다음을 계산한다.

$$h_j = \exp(-\theta t_j) \prod_{i \ln j} \mathbf{M_i L_k}$$

각각의 i에 대해 다음을 계산한다.

$$\beta_i = s_i \,/\, \sum_j a_{ij} \exp(-\theta t_j) \prod_{i \ln j} \mathbf{M_i L_k}$$

$$M_i = \min[1,\ \beta_i M_i]$$

각각의 k에 대해 다음을 계산한다.

$$\beta_k = r_k \,/\, \sum_j a_{ij} \exp(-\theta t_j) \prod_{i \ln j} \mathbf{M_i L_k}$$

$$L_k = \beta_k L_k$$

Step 3. (링크 통행량과 평형지체 산출)
각각의 j에 대해 다음을 계산한다.

$$h_j = \exp(-\theta t_j) \prod_{i \ln j} \mathbf{M_i L_k}$$

각각의 i에 대해 다음을 계산한다.

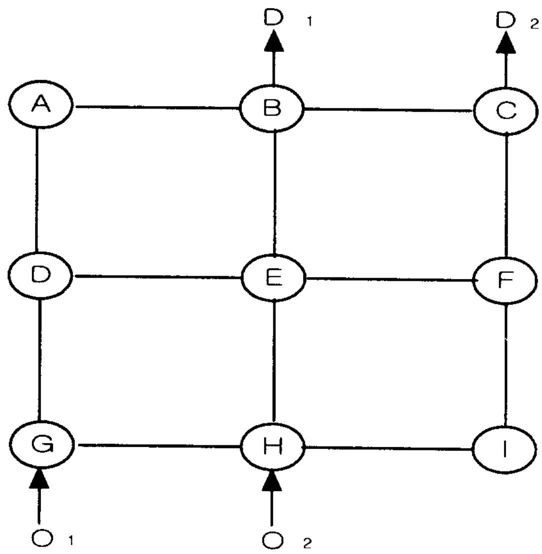
$$\nu_i = \sum_j a_{ij}\ h_j$$

$$d_i = -(\ln M_i)/\theta$$

Ⅴ. 모형의 적용

본 장에서는 앞에서 살펴본 알고리즘들을 <그림 1>과 같은 예제 네트워크에 적용시키고 그 결과를 비교 분석하였다

각 링크의 통행시간은 90초, 용량은 1veh/s로 같으며 OD쌍인 G와B, G와C, H와B, H와C의 통행비는 각각 1.1veh/s, 0.6veh/s, 0.4veh/s, 0.7veh/s인 것으로 가정한다.



<그림 1>

앞 장에서 설명한 연속평균법(MSA)과 Bell의 알고리즘을 이용한 통행배정의 결과는 아래 표에 제시된 바와 같다.

<표 1> θ가 0.05일 때 두 모형의 배정결과

theta	MSA		Bell	
=0.05	교통량(veh/s)	통행시간(초)	교통량(veh/s)	통행시간(초)
GH	0.59	91.7	0.69	90.0
DE	0.41	90.4	0.22	90.0
AB	0.70	93.3	0.78	90.0
HI	0.60	91.8	0.78	90.0
EF	0.36	90.2	0.22	90.0
BC	0.33	90.2	0.29	90.0
GD	1.11	110.2	1.00	131.0
HE	1.09	109.1	1.00	119.1
IF	0.60	91.8	0.78	90.0
DA	0.70	93.3	0.78	90.0
EB	1.13	112.3	1.00	119.1
FC	1.01	101.8	1.00	113.7

VI. 결론

본 논문에서는 LBA와 PBA의 대표적인 모형에 대하여 그 성능을 비교하고 궁극적으로는 적용이 간편한 LBA모형을 통해 PBA모형의 결과를 도출하여 도시부 혼잡 교통망에서의 보다 현실적인 통행배정을 가능하게 하는 것이 목적이다. 이에 따라, LBA의 용량제약식을 변형함으로서 도시부 혼잡가로에서 보다 현실적인 결과를 도출할 수 있는 PBA모형의 배정결과와 대동소이한 결과를 도출할 수 있는 방안을 모형의 적용을 통해서 제시하였다.

실제 도시부 혼잡 가로에서 도로의 용량을 결정하는 것은 교차로의 용량이라 할 수 있다. 즉, 지체는 교차로에서 형성되며 구간 통행시간은 일정한 것으로 보는 것이 일반적이다.(도시 및 교외간선도로편, 도로용량편람)

Bell의 가정은 이러한 실제 교통류의 특성과 일치하지만 기 설명한 바와 같이 그 풀이과정이 복잡하다. 반면, LBA에 기반을 둔 MSA알고리즘은 풀이과정이 간편하고 직관적으로 이해가 쉬운 특성이 있으므로 본 연구에서는 PBA모형을 현실에 기반한 것으로 인정하고 이를 구현하기 위한 LBA모형의 적용가능성 연구를 수행하였다.

모형의 적용 결과 Bell의 모형을 통해서는 4개의 링크가 용량에 도달하는 것으로 분석되었고 해당 링크에 대해서만 지체가 발생하는 것을 확인하였다.

반면, MSA모형의 적용결과를 살펴보면 용량제약식(BPR식)의 계수인 α, β의 값을 각각 0.15, 4 로 하였을 경우 링크 통행시간과 경로배정율에서 Bell의 모형과 다소 차이를 보이고 있다.

현재 이 파라메타 값들의 변화를 통해 민감도 분석 중에 있으며 잠정적인 결과에 의하면 이 값들을 상향조정할 경우, 배정결과가 Bell의 결과와 근사하는 방향으로 진행되는 것을 확인하였다. 또한 실제 교통망(서초구)의 관측값에 대한 비교를 통해 모형의 적용성에 대한 검토도 함께 수행 중이다.

<참고 문헌>

· D.B. Benson and W.D.Cunagin, Development and Implementation of a New Impedance Function for Capacity Restraint Traffic Assignment, Texas Transportation Institute, Texas A&M University, Texas, 1980

· Bereau of Public Roads. Traffic Assignment Mannual, U.S. Department of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C. , 1964

· J.G. Wardrop, Some Theoretical aspects of road traffic research, Proceedings of the Institution of Civil Engineering II(1),1952, pp. 325-378

· M.G.H Bell, Stochastic User Equilibrium Assignment in Networks with Queues, Transport Operation Research Group, Department of Civil Engineering, University of Newcastle Upon Tyne, NEI 7RU, UK, 1995

· Sheffi, Y. Urban Transportation Network, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1985