

시소 시스템의 균형 제어에 관한 연구

강기원*, 정철범**, 박기현*

*성균관대학교 전기·전자·컴퓨터 공학부, **철도기술연구원

A Study on the Equilibrium Control of a Seesaw System

Kiwon Kang*, Chul-Bum Jung**, Kiheon Park*

*The School of Electrical Eng., Sung-Kyun-Kwan Univ., **Korea Railroad Research Institute

Abstract - In this study, a seesaw system is used as an example to demonstrate effectiveness of the control theory. This problem which keeps a seesaw's balance is corresponded to one of regulating problems. In this regard, a controller is designed by LQ techniques and an observer is implemented and applied to estimate states which cannot be actually measured in this system. And the genetic algorithm is utilized to systematically choose weighting factors in the given cost function. The performance of the controller is verified through the experiment results.

1. 서 론

본 논문은 시소의 평형을 유지하도록 하기 위해 대차가 트랙 상에서 이동하는 구조로 제작된 평형 유지 시스템으로서 허용 가능한 외란에 대해 평형 혹은 기준점을 유지하는 것을 목표로 한다. 따라서 이러한 제어 문제는 어떤 기준점을 유지하고자 하는 조정(regulating)의 문제에 부합되므로 LQR(Linear Quadratic Regulator) 제어 이론을 이용한 제어기를 구현하여 실질적인 하드웨어에 적용하였다. LQR 제어 기법을 적용하기 위해서는 모든 상태들이 측정 가능해야 하므로 측정이 불가능한 상태에 대해서는 축소차 관측기(reduced-order observer)를 구성하여 추정한다. 또한, 제어기를 구현하고자 할 때 주어지는 평가 함수를 최소화시키는 가중치 값들을 선정하는 문제에 있어서 자연 현상을 모델링한 확률적 탐색 방법인 유전 알고리즘(GA)을 이용한다. 이 알고리즘은 전체 탐색 공간 내에서 여러 해를 동시에 탐색해 나가므로 전역적인 해(global solution)에 도달할 확률이 높고 정확한 해의 지식이 없어도 적합한 해를 찾아낼 수 있다. 또한, 몇 개의 개별적인 해를 통해 병렬적으로 탐색해나가기 때문에 국부적인 해(local solution)에 쉽게 빠지지 않으면서 최적해(optimal solution)를 찾을 수 있다. 따라서 기존의 시행착오적인 방법으로 구한 해와 GA의 해를 이용해 각각의 제어기를 실제로 구현하여 그 성능을 비교해 보고 탐색 방법으로서 GA의 유용성에 대해서도 검증하였다.

2. 본 론

2.1 시스템 모델링

마찰이 없는 트랙 위를 질량 m_m 의 대차가 직선 운동하며 이를 지탱해주는 시소는 중앙에 위치한 피봇점을 중심으로 자체적으로 제한된 각도 내에서 회전 운동을 한다. 시소 시스템은 불안정한 시스템이므로 초기에 수평으로 있었다하더라도 조그마한 외란에 의해서 곧 어느 한 쪽으로 기울어지게 된다. 따라서 이러한 외란이 존재하거나 수평이 아닌 초기 상태에서 시작하더라도 항상

시소가 수평이 되도록 즉, 시소의 수평각 θ 가 0이 되도록 하기 위해서 제어기가 정확한 제어 입력을 계산하여 대차에 가해 주어야 한다.

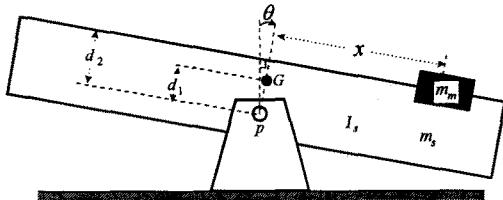


그림 1. 시소 시스템 모델

그림 1의 시스템은 대차와 시소 두 시스템이 결합되어 있다. 따라서 운동하는 시스템에 대한 동적 모델을 구하기 위해 시스템 전체의 동력학 표현에 유리한 Lagrangian 접근법을 이용, 수학적 모델식을 구하면

$$m_m \ddot{x} - m_m x \dot{\theta}^2 - m_m g \sin \theta = \frac{k_1 V_a(t) r - k_1 k_e \dot{x}(t)}{R_a^2} - \frac{b_m \dot{x}}{r^2} \quad (1)$$

$$m_m x^2 \ddot{\theta} + 2m_m x \dot{x} \dot{\theta} + I_s \ddot{\theta} - m_m g d_2 \sin \theta - m_m g x \cos \theta - m_s g d_1 \sin \theta = 0 \quad (2)$$

여기

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) &= \frac{m_m g d_2 + m_s g d_1}{m_m x^2(t) + I_s} \sin \theta(t) \\ &+ \frac{-2m_m x(t) \dot{x}(t) \dot{\theta}(t)}{m_m x^2(t) + I_s} + \frac{m_m g x(t) \cos \theta(t)}{m_m x^2(t) + I_s} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = g \sin \theta(t) + x(t) \dot{\theta}^2(t) + \frac{k_1 V_a(t) r - k_1 k_e \dot{x}(t)}{m_m R_a^2} - \frac{b_m \dot{x}(t)}{m_m r^2} \quad (4)$$

이 된다. 상태 방정식을 세우기 위해 상태 변수를 다음과 같이 선정한다.

$$\begin{aligned} [x_1(t) x_2(t) x_3(t) x_4(t)]^T &= [\theta(t) x(t) \dot{\theta}(t) \dot{x}(t)]^T \\ u &= V_a \end{aligned} \quad (5)$$

시스템의 해석을 용이하게 하기 위해 모델링식에 포함된 비선형 요소를 동작점에 대해 선형화시키면 최종적인 상태 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) \\ \delta \dot{x}_3(t) \\ \delta \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_5 \end{bmatrix} \delta u(t) \quad (6)$$

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) \quad (7)$$

2.2 제어기 설계

2.2.1 LQR 제어기

다음과 같이 시스템의 상태 방정식과 출력 방정식이 주어졌을 때,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (9)$$

LQR 제어의 문제는 식(10)의 성능 평가 지수 J 를 최소화시키는 최적 제어 입력을 구하는 것을 목적으로 한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (10)$$

식(10)에서 제어기의 성능과 특성을 좌우하는 가중치 Q, R 값을 선정하여 식(11)과 같이 주어지는 대수 리카티 방정식(ARE:Arithmetic Riccati Equation)

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (11)$$

을 만족시키는 해인 양의 한정 행렬(positive-definite matrix) P 를 구한 후 제어 이득 K 를 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$K = R^{-1}B^T P \quad (12)$$

식(12)로부터 최적 제어 입력은 다음과 같다.

$$u(t) = -Kx(t) \quad (13)$$

이와 같은 최적 제어 입력을 통해 최종적인 시스템 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (14)$$

2.2.2 축소차 관측기(reduced-order observer)

식(13)은 모든 상태 값을 알아야만 구할 수 있으므로 (5)에서 선정된 상태 변수 중 실제로 측정할 수 없는 상태를 추정하기 위해 축소차 관측기를 사용한다. 이를 유도하기 위해 상태 방정식에 선형 변환을 취하여 구해진 최종적인 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \hat{z} - Ly \\ &= (A_{22} - LA_{12})\hat{z} + (A_{21} - LA_{11})y + (B_2 - LB_1)u \\ &= (A_{22} - LA_{12})w + ((A_{22} - LA_{12})L + A_{21} - LA_{11})y \\ &\quad + (B_2 - LB_1)u \\ &= Fw + Dy + Gu \end{aligned} \quad (15)$$

단, $F \triangleq A_{22} - LA_{12}$, $D \triangleq FL + A_{21} - LA_{11}$.

$$G \triangleq B_2 - LB_1, \hat{z} = w + Ly$$

관측기의 목적은 미지의 상태를 추정하는 것이므로 상태 추정 오차 $\tilde{z} (= z - \hat{z})$ 가 가능한 한 빨리 0으로 수렴하는 것이 바람직하다. 따라서 $\tilde{z} = (A_{22} - LA_{12})\tilde{z}$ 의 고유값이 음의 실수부를 갖도록 해야 한다.

2.3 유전 알고리즘(Genetic Algorithms)

유전 알고리즘은 John Holland에 의해서 1975년에 제안된 자연의 진화 현상에 기초한 탐색 알고리즘으로서 자연계의 모든 생물들이 유전 인자인 염색체(chromosome)에 의해서 생식과 유전 등 진화 과정을 반복해 발전하는 것처럼 유전 알고리즘에서도 생물학적 유전인자인 염색체에 해당하는 문자열(string)을 가지고 생물과 같은 재생산, 교배, 돌연변이를 거쳐서 다음 세대의 새로운 자손을 인공적으로 만들어 생물 유전을 모방한 연산자들을 반복적으로 적용하여 적합한 해를 탐색한다. 해를 구하기 위해 다음과 같은 과정이 실행된다.

1. 부호화 및 초기화(Coding and Initialization)

생물의 유전 정보인 염색체에 해당하는 문자열(string)을 부호화(coding)한다. 보통의 부호화 방법은 유한 길이의 2진수를 나열하여 부호화하며 랜덤하게 N개의 문자열을 생성하여 초기해 집단을 구성한다.

2. 초기 세대(First Generation)

개체군(population)의 수는 해의 정확성 및 GA의 수렴 시간을 결정한다. 많은 개체군은 수렴 시간이 커지지만 보다 정확한 해를 유도한다. 초기 세대는 보통

제한 범위 안에서 랜덤하게 선택된다.

3. 평가(Evaluation of Fitness)

각 문자열을 디코딩(decoding)하여 목적 함수에 대한 적합도(fitness)를 계산하며 이것은 시스템의 성능에 대한 판별 기준이 된다.

4. 재생산(Reproduction)

자연 생태계의 적자 생존의 원리를 이용하여 높은 적합도를 가진 개체들(individuals)에 대하여 다음 세대에 반영될 수 있게 한다.

5. 교배(Crossover)

개체를 쌍으로 구성하여 개체 안에 있는 유전자 정보를 서로 교환하여 새로운 정보를 갖는 자손(offspring)을 만든다.

6. 돌연변이(Mutation)

문자열 안에 있는 유전자의 한 비트를 변환시켜 새로운 유전 정보를 갖는 문자열을 만든다. 따라서 새로운 유전 정보를 갖는 즉, 탐색의 범위가 다른 곳으로 이동되어져 보다 더 전역적인 해를 찾는 것이 가능하게 된다. 개체는 돌연변이가 발생되기 전보다 더 좋거나 더 나쁜 적합도를 가질 수 있으므로 비교적 이 확률은 낮게 한다.

2.4 제어기 설계

2.4.1 시행착오적 과정 적용

개루프 시스템의 안정도를 알아보기 위해 시스템 행렬 A 에 대한 고유값을 구하면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.8796 & 7.1878 & 0 & 0 \\ 9.81 & 0 & 0 & -7.5448 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{고유값} = -7.7015$$

$$\begin{aligned} &2.0921 \\ &-0.9677 + 1.8547i \\ &-0.9677 - 1.8547i \end{aligned} \quad (17)$$

(17)과 같이 시스템 고유값이 우반 평면에 있는 불안정한 시스템임을 알 수 있다. 따라서, 불안정한 극점을 제어기 설계를 통해서 안정한 좌반 평면으로 보내기 위해 최적 제어 이득 K 를 구해야 한다. 이 때 Q 값과 R 값을 선정하는 문제는 시행착오적인 방법을 거쳐 최종적으로 결정된 값들은 다음과 같으며 이 경우 고유값들이 모두 좌반 평면에 있는 안정한 시스템임을 알 수 있다.

$$Q = \text{diag}[1000 \ 100 \ 10000 \ 1000] \quad (18)$$

$$R = 80 \quad (19)$$

$$K = [13.9165 \ 37.5445 \ 14.3083 \ 4.1740] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{고유값} &= -11.6463 \\ &-2.8424 + 2.9803i \\ &-2.8424 - 2.9803i \\ &-0.4771 \end{aligned} \quad (21)$$

이제는 측정할 수 없는 상태 값을 추정하기 위한 축소차 관측기를 설계하기 위해 제어기를 포함한 폐루프 시스템의 극점을 5배정도 빠르게 관측기 행렬 L 을 선정하면 관측기는 다음과 같은 구조가 된다.

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Fw + Dy + Gu \\ &= \begin{bmatrix} -63.3545 & 0 \\ 0 & -63.3545 \end{bmatrix} w \\ &\quad + \begin{bmatrix} -4012.9 & 7.2 \\ 9.8 & -3535.8 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 2.4589 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (22)$$

2.4.1 GA 적용

적합도(fitness)를 판별하기 위한 기준으로 목적 함수를 LQR 제어기의 성능 지수로 두고 성능 지수 값을 가장 최소화시키는 Q 값과 R 값을 찾는다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (23)$$

개체 수(population size)는 각 세대당 50, 세대 수(generation size)는 25세대, 교배비(crossover rate)는 0.9, 돌연변이비(mutation rate)는 0.1로 하고 각 개체는 14비트의 2진수로 부호화하였다. 이러한 조건을 적용하여 잠재적인 해가 존재할 공간 내에서 탐색을 실시하여 결정된 값들은 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 612150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 81250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 98250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54900 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$R = 530 \quad (25)$$

$$K = [47.7093 \ 77.3670 \ 32.0508 \ 10.1954] \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{고유값} &= -26.1184 \\ &-2.0928 + 2.3778i \\ &-2.0928 - 2.3778i \\ &-2.31 \end{aligned} \quad (27)$$

또한, 관측기의 구조는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Fw + Dy + Gu \\ &= \begin{bmatrix} -130.592 & 0 \\ 0 & -130.592 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -17053 & 7 \\ 10 & -16069 \end{bmatrix} y \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 2.4589 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (28)$$

2.5 시뮬레이션 결과

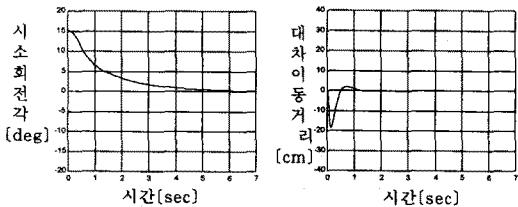


그림 2. 시행착오적인 방법에 의한 Q값과 R값 선정

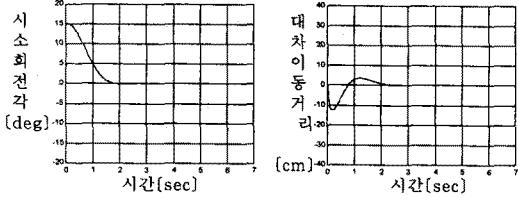


그림 3. GA에 의한 Q값과 R값 선정

그림 2와 그림 3에서 보는 바와 같이 GA를 이용한 시뮬레이션에서 시소의 회전각과 대차의 이동 거리가 시행착오적인 방법에 비해 더 빨리 평형점에 도달함을 알 수 있다.

2.6 실험장치 구성

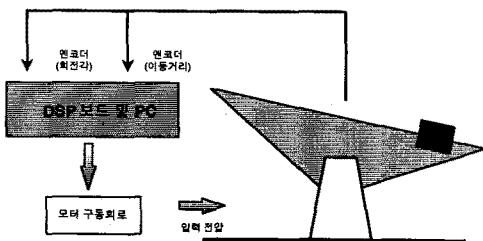


그림 4. 하드웨어 구성도

2개의 엔코더가 시소의 중심축과 모터의 축에 각각 연결되어 시스템이 동작할 때 엔코더에서 발생되는 펄스

수를 카운터 회로로 계산함으로써 시소의 회전각과 대차의 이동 거리가 측정되어 제어기를 통해 제어량이 연산되어 모터 입력 전압을 발생시킨다.

2.7 실험 결과

시스템에 의란을 인가하여 시소의 회전각과 대차 이동 거리를 측정하였으며 실험 결과를 통해서 GA를 이용한 실험 결과가 시행착오적인 방법의 결과에 비해 더 빠른 시간 내에 안정화됨을 확인할 수 있었다.

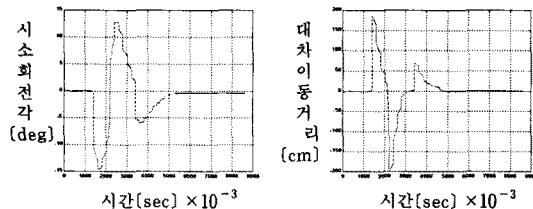


그림 5. 시행착오적인 방법에 의한 Q값과 R값 선정

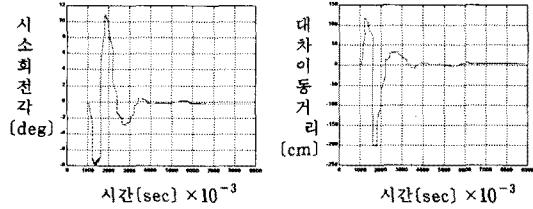


그림 6. GA에 의한 Q값과 R값 선정

3. 결 론

본 논문에서는 시행착오적인 방법과 유전 알고리즘을 이용해 구현한 각각의 제어기를 실제 시스템에 적용시킨 실험 결과를 통해 시소 시스템이 안정화될 수 있는 시스템 즉, 제어 이론을 검증해 볼 수 있는 시스템임을 입증 할 수 있었다. 그리고 시스템에 어떠한 외란이 인가되더라도 제어기가 동작한 후에는 시스템은 항상 수평을 유지하므로 조정 문제에 있어서 설계된 LQR 제어기가 만족스러운 성능을 보여준다는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 유전 알고리즘은 시행착오적인 방법에 비해 비교적 제어 성능이 우수한 해를 시스템에 대한 어떠한 부가적인 정보가 없어도 여러 변수들을 단지 목적 함수만을 가지고서 짧은 시간 안에 찾을 수 있게 해주므로 탐색 알고리즘으로서 매우 효과적인 기법인 것으로 판단된다.

(참 고 문 헌)

- [1] Bahram Shahian and Michael Hassul, "Control Design Using MATLAB", Prentice-Hall, 1993.
- [2] Grant R. Fowles, "Analytical Mechanics", Sa College Publishing.
- [3] David G. Luenberger, "An Introduction to Obse IEEE Trans. Automatic Control, Vol. ac-16, No.6, 197
- [4] David E. Goldberg, "Genetic Algorithm in S Optimization and Machine Learning", Addison-W Company inc, 1989.
- [5] Lei Jia, Jiang Jingping, "The Model Reference A Control Based on the Genetic Algorithm", Proceedings 1997 int. conference on Neural Network, 1997.
- [6] P. J. van Rensburg, I. S. Shaw and J. D. Van "Adaptive PID-control using a Genetic Algori Proceedings of the 1998 second int. conferenc knowledge-based intelligent electronic system-Vol2, 19
- [7] Frank L. Lewis, "Applied Optimal Contro Estimation", Prentice-Hall, 1992.