

불확정성 선형 시스템의 강인 극점 배치

김재성, 김진호
충북대학교 제어계측공학과

Robust Pole Assignment of Uncertain Linear Systems

Jae-Sung Kim, Jin-Hoon Kim
Dept. of Control and Instrumentation Engineering, Chungbuk National Univ.

Abstract - In this paper, we consider the robust pole assignment for linear system with time-varying uncertainty. The considered uncertainty is an unstructured uncertainty. Based on Lyapunov stability and linear matrix inequality technique, we present a condition that guarantees the robust pole assignment inside a circular disk and the robust stability of uncertain linear systems. Finally, we show the usefulness of our results by an example.

1. 서 론

선형 시스템에 있어서 극점배치(pole assignment) 문제는 시스템의 동적인 특성을 좌우하므로 중요한 문제이다. 규정된 영역 내로 극점을 위치시켜 원하고자 하는 성능을 얻는 문제는 많은 관심과 연구가 이루어지고 있다. 불확정성(uncertainty)이 없는 공정 시스템(nominal system)에 대한 극점 배치 문제는 기존에 연구, 개발되어진 알고리즘을 사용하면 정확하고 쉬운 극점 배치가 가능하나 시스템 모델링 과정에서의 오차 및 균사화, 시스템 동작상의 변화 또는 외부 노이즈, 외란에서 오는 불확정성이 포함된 시스템에 대해서는 일정한 영역을 설정하여 놓고 불확정성의 한계 내에서 시스템의 극점들이 이 영역 내에 위치하도록 하는 연구가 진행되고 있다.

상태 공간에서 시스템의 안정도에 대하여 [1]에서는 불확정성이 없는 선형 시스템의 극점 배치에 대한 결과를 제시하였으며, 불확정성에 대한 관심이 대두되면서 [2]에서는 matrix measure를 이용하여 시불변 불확정성을 갖는 시스템 대한 극점 배치를 보였다. 또한, [4]에서는 “quadratic d stabilization”을 이용한 접근법으로 비구조적인 불확정성을 갖는 시스템의 극점 배치를 위한 제어기 설계를 다루었다. 또, [7], [8]에서는 Lyapunov 이론을 바탕으로 시변 불확정성 선형 시스템의 강인 극점 배치 문제를 다루었다. 특별히 불확정성이 시변인 경우 공정 시스템이 시불변이라 할지라도 전체적인 시스템이 시변이므로 안정성은 극점만으로는 판별 할 수 없다. 따라서, 강인 극점 배치 뿐만 아니라 시스템의 안정도는 별도로 다루어야 한다. 기존의 연구 방법들은 대부분 불확정성이 시불변인 경우를 다루었으나 실제 일반적인 시스템에 있어서 불확정성은 대부분 시변으로 주어지므로 시변 불확정성을 가지는 시스템에 대한 극점 배치 문제는 중요하다. 최근에 각광 받고 있는 LMI 기법을 이용하여 시스템의 해석이나 설계에 많이 연구되고 있으므로 극점 배치 문제에 대해서도 연구 해 볼 필요가 있다.

본 논문에서는 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템에 대한 극점 배치와 안정도를 판별한다. 고려된 불확정성으로는 시변 불확정성으로서 흔히 다루어지는 노음 바운드(norm bound) 만이 알려진 비구조적 불확정성(unstructured uncertainty)을 다룬다. 주요 결과에서는

불확정성을 갖는 시스템의 극점이 복소수 평면상의 좌반면(left half plane) 상의 중심이 $-\alpha$ 이고 반지름이 r 인 원판 $D(\alpha, r)$ 에 위치하도록 하면서 전체 시스템의 안정성이 보장되는 조건을 구하여 선형 행렬 부등식(LMI) 형태로 제시하였다. 끝으로 수치 예제를 통하여 제시된 결과의 유용성과 우수성을 보인다.

2. 강인 극점 배치 및 안정성

다음과 같이 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 상태, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 주어진 안정한 상수 행렬이다. 또, $\Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 시변 불확정성 행렬로 다음에 오는 비구조적 불확정성을

$$\|\Delta A(t)\| \leq \eta \quad (2)$$

대상으로 한다. 여기서 η 는 양의 상수이다.

이 논문에서는 조건식 (2)로 기술되는 불확정성을 갖는 선형 시스템 (1)의 모든 극점이 그림 1과 같이 중심이 $-\alpha$, $\alpha > 0$ 이고 반지름이 $r > 0$, ($r \leq \alpha$)인 원판 내에 존재하는 것이 보장되는 LMI 형태의 조건을 제시하는 것이다.

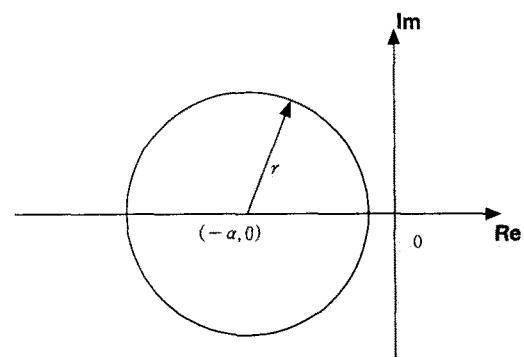


그림 1. 중심 $-\alpha$, 반지름 r 인 디스크 $D(\alpha, r)$

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과들의 증명에 이용된다.

보조정리 1 [7] 만약 다음을 만족하는 양화정 행렬 P 가 존재하면 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$ 에 존재한다.

$$(A + \alpha I_n + \Delta A(t))^T P (A + \alpha I_n + \Delta A(t)) - r^2 P < 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

증명: 행렬 A 의 고유치가 원판 $D(0, 1)$ 에 있을 필요 충분 조건은 임의의 행렬 $Q = Q^T > 0$ 에 대하여 $A^T P A - P = -Q$ 를 만족하는 $P = P^T > 0$ 가 존재하는 것이므로 [5], 행렬 A 의 고유치가 $D(\alpha, 1)$ 에 위치할 필요충분 조건은 임의의 행렬 $Q = Q^T > 0$ 에 대하여 다음식

$$(A + \alpha I_n)^T P (A + \alpha I_n) - P = -Q$$

를 만족하는 $P = P^T > 0$ 가 존재하는 것이며 따라서, 행렬 A 의 고유치가 $D(\alpha, r)$ 에 있을 필요충분 조건은 임의의 행렬 $Q = Q^T > 0$ 에 대하여 식(3)을 만족하는 것이다. ■■■

보조정리 2 [4] 만약 다음을 만족하는 양확정 행렬 \tilde{P} 가 존재하면 시스템 (1)은 안정하다.

$$(A + \Delta A(t))^T \tilde{P} + \tilde{P} (A + \Delta A(t)) < 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

보조정리 3 [10] 양확정 행렬 S 에 대하여 다음이 항상 성립한다.

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S X + Y^T S^{-1} Y \quad (5)$$

다음의 정리 1은 불확정성 (2)를 갖는 선형 시스템의 극점이 원판의 내부에 위치하는 조건이다.

정리 1 다음의 LMI를 만족하는 양확정 행렬 $P > 0$, $\tilde{P} > 0$ 와 상수 $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ 이 존재하면

$$\begin{bmatrix} (A + \alpha I_n)^T P (A + \alpha I_n) - r^2 P & (A + \alpha I_n)^T P \\ + \epsilon_1 \eta^2 I_n & P(A + \alpha I_n) \\ P(A + \alpha I_n) & -(\epsilon_1 I_n - P) \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} A^T \tilde{P} + \tilde{P} A + \epsilon_2 \eta^2 I_n & \tilde{P} \\ \tilde{P} & -\epsilon_2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

불확정성 (2)를 갖는 시스템 (1)의 극점은 $D(\alpha, r)$ 에 존재하며 이 시스템은 안정하다. 단, 여기서 $\epsilon_1 I_n - P > 0$ 이다.

증명: 불확정성 (2)를 갖는 시스템 (1)의 극점이 $D(\alpha, r)$ 의 내부에 위치할 조건은 보조정리 1에 의하여 만약 다음을 만족하는 양확정 행렬 P 가 존재하면

$$(A + \alpha I_n + \Delta A(t))^T P (A + \alpha I_n + \Delta A(t)) - r^2 P < 0, \quad \forall t \geq 0$$

시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$ 에 존재하며 보조정리 3을 이용하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$(A + \alpha I_n + \Delta A(t))^T P (A + \alpha I_n + \Delta A(t)) - r^2 P$$

$$\begin{aligned} &= (A + \alpha I_n)^T P (A + \alpha I_n) + \Delta A^T(t) P (A + \alpha I_n) \\ &\quad + (A + \alpha I_n)^T P \Delta A(t) + \Delta A^T(t) P \Delta A(t) - r^2 P \\ &\leq (A + \alpha I_n)^T P (A + \alpha I_n) + \Delta A^T(t) (\epsilon_1 I_n - P) \Delta A(t) \\ &\quad + (A + \alpha I_n)^T P (\epsilon_1 I_n - P)^{-1} (A + \alpha I_n) \\ &\quad + \Delta A^T(t) P \Delta A(t) - r^2 P \\ &\leq (A + \alpha I_n)^T P (A + \alpha I_n) + \epsilon_1 \Delta A^T(t) \Delta A(t) \\ &\quad + (A + \alpha I_n)^T P (\epsilon_1 I_n - P)^{-1} P (A + \alpha I_n) - r^2 P \end{aligned}$$

따라서 식(2)를 이용하면 다음과 같으며 다음이 성립하면

$$\begin{aligned} &(A + \alpha I_n)^T P (A + \alpha I_n) + \epsilon_1 \eta^2 I_n - r^2 P \\ &\quad + (A + \alpha I_n)^T P (\epsilon_1 I_n - P)^{-1} P (A + \alpha I_n) < 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

보조정리 1에 의하여 모든 극점은 $D(\alpha, r)$ 에 속한다. 그리고 식(8)을 LMI 형태로 다시 쓰면 식 (6)을 얻는다.

따라서 정리 1의 조건 (7)을 만족하면 시스템 (1)의 극점은 $D(\alpha, r)$ 의 내부에 위치한다.

또, 불확정성이 시변이므로 시스템의 극점만으로 안정성을 판단하지 못한다. 따라서, 시스템 (1)이 안정할 조건은 보조정리 2에 의하여 다음을 만족하는 양확정 행렬 \tilde{P} 가 존재하면 불확정성 (2)를 갖는 시스템 (1)은 안정하며

$$(A + \Delta A(t))^T \tilde{P} + \tilde{P} (A + \Delta A(t)) < 0$$

다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Delta A^T(t) \tilde{P} + \tilde{P} \Delta A(t) &\leq \frac{1}{\epsilon_2} \tilde{P} \tilde{P} + \epsilon_2 \Delta A^T(t) \Delta A(t) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon_2} \tilde{P} \tilde{P} + \epsilon_2 \eta^2 I_n \end{aligned}$$

따라서, 다음을 만족하는 양확정 행렬 \tilde{P} 와 양의 상수 $\epsilon_2 > 0$ 가 존재하면

$$A^T \tilde{P} + \tilde{P} A + \frac{1}{\epsilon_2} \tilde{P} \tilde{P} + \epsilon_2 \eta^2 I_n < 0 \quad (9)$$

불확정성 (2)를 갖는 시스템 (1)은 안정하다. 또, (9)을 LMI 형식으로 표현하면 (7)식을 얻는다. 따라서 (6), (7)을 동시에 만족하는 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(\alpha, r)$ 의 내부에 위치하며 안정하다. ■■■

3. 수치 예제

위에 제시된 결과들의 유용성을 보이기 위하여 다음과 같은 시변 불확정성 선형 시스템을 고려하기로 한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \Delta A(t) x(t) \quad (10)$$

고려된 불확정성은 비구조적 불확정성(2)을 다룬다. 먼저 불확정성 $\Delta A(t)$ 가 노음 바운드만이 알려진 비구조적 불확정성으로 시스템 (10)에 주어진 경우 시스템 (10)의 모든 극점이 $D(\alpha, r)$ 에 있으면서 시스템의 안

정성이 보장되는 불확정성의 최대 노음 바운드 η 를 정리1을 통하여 Matlab™의 Toolbox를 이용하여 구하면 표 1과 같다.

$D(a, r)$	$D(1.5, 1)$	$D(1.5, 1.4)$	$D(2.0, 2.0)$
η	0.2216	0.4706	0.5402
P	[570.87 611.54] [611.54 978.58]	[44.734 40.355] [40.355 71.639]	[54.117 47.538] [47.538 89.018]
Q	[352.02 254.35] [254.35 794.00]	[22.706 21.323] [21.323 56.694]	[43.722 46.115] [46.115 109.38]
ϵ_1	1939.1	118.04	193.1890
ϵ_2	1527.8	83.493	130.8718

표 1. 비구조적 불확정성의 강인 안정성 바운드

다음에 오는 표2는 본 논문의 우수성을 보이기 위해 이전의 논문에서 얻어진 결과와 비교하였다.

	$D(a, r)$	$D(1.5, 1)$	$D(1.5, 1.4)$	$D(3.0, 1.5)$
η	Our result	0.2216	0.4706	0.2216
	Kim. [8]	0.1403	0.2919	0.1996

표 2. 비구조적 불확정성의 바운드 비교.

(참 고 문 헌)

- [1] K.Furuta, and S.B.Kim, "Pole assignment in a specified disk", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 32, No. 5, 1987.
- [2] S.S.Wang, and W.G.Lee, "On the Analysis of eigenvalue Assignment Robustness", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 10, 1992.
- [3] Y.T.Juang, "Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems with Structured Uncertainty" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 5, 1991.
- [4] G.Garcia, and J.Bernussou, "Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 1, 1995.
- [5] S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, studies 15, 1994.
- [6] A.Rachid, "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed systems", *INT. J. Systems SCI.*, Vol. 21, No. 3, 1990.
- [7] 박상민 "규정된 원판내에 강인극점배치를 가지는 성능 보장제어", 충북대학교 전기공학과 석사학위논문, 1998.
- [8] 김진훈, "시변 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 극점 배치", *Trans. KIEE*, Vol. 48A, No. 1, 1999.
- [9] K.Zhou, J.C.Doyle, K.Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.
- [10] J.N.Franklin, *Matrix theory*, Prentice Hall, 1968.

4. 결 론

본 논문에서는 시변 불확정성을 갖는 선형시스템의 모든 극점들이 L.H.P.의 규정된 영역에 위치하도록 하면서 안정성을 보장하는 조건을 제시하였다. 설정된 영역은 $D(a, r)$ 로 표현되는 원판을 설정하였고, 이 영역 안에 극점들이 위치하면서 시스템의 안정성을 보장하는 비구조적 불확정성의 바운드 값을 제시하였다. 제시된 조건을 만족하는 불확정성의 범위는 Matlab™를 이용하여 구하였으며 수치 예제를 통하여 본 논문의 우수성과 유용성을 보였다.