

단계분할 유한 요소법에 의한 광섬유의 신호 전송 예측

정 백 호, 이 호 준
호서대학교 전자공학과

Prediction of Signal Propagation in Optical Fiber by SS-FEM

B. H. Jung, H. J. Lee

Department of Electromagnetic Engineering, Hoseo University

Abstract 광섬유에서 전송되는 신호의 예측을 위하여 편미분방정식인 비선형 슈뢰딩거 방정식(Nonlinear Schrodinger Equation, NLSE)을 단계분할 유한 요소법(Split-Step Finite Element Method, SS-FEM)을 적용하여 해석하였다. 수치결과를 해석적인 해가 알려진 솔리톤의 해로부터 전송되는 거리의 증가에 따라 각 단계마다 오차를 계산하였으며, 그 결과를 단계분할 푸리에법(Split-Step Fourier Method, SS-FM)에 의한 수치해와도 비교하였다.

여기서 $q(\xi, s)$ 는 정규화된 신호크기이며, ξ 는 전송 방향의 위치를 나타내는 정규화 파라미터이며, s 는 시간에 대한 정규화 파라미터이다. 식 (1)에서 좌변의 제 2항은 군속도 분산(group velocity dispersion)에 의한 항이며, 제 3항은 비선형성에 의한 자기위상변조(self phase modulation)를 나타낸다.

수치해석을 위하여 SSM을 적용하여 (1)을 비선형항과 분산항으로 나누어 쓰면

$$-j\frac{\partial q}{\partial \xi} + |q|^2 q = 0 \tag{2}$$

$$-j\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = 0 \tag{3}$$

1. 서론

광섬유내에서 전파되는 신호의 특성을 지배하는 전송 방정식은 NLSE이다. 이 방정식은 몇 가지 특별한 경우에만 그 엄밀해가 알려져 있다. 광섬유의 분산 및 비선형성을 나타내는 파라미터를 고려하여, NLSE로부터 직접적인 해를 구하기에는 어려움이 많으므로, 수치해석에 의존하여야 한다. 가장 많이 적용되는 수치해석 방법 중의 한가지는 단계분할법(Split-Step Method, SSM)이다. SSM은 NLSE에서 분산과 비선형의 항을 분리한 다음, 분할된 전송 거리의 증가에 따라 순차적으로 각 영향을 고려한다. 그리고 분산 효과를 나타내는 시간영역의 미분 연산자를 주파수 영역으로 변환하여 계산하는 푸리에법이 많이 사용된다[1]. 수치해석의 경우 NLSE와 주어진 광섬유의 파라미터로부터 시간영역의 표본화 개수와 전송거리의 분할간격의 선택 등이 임의적이며, 해석적인 해가 없는 경우 설정한 입력에 대한 출력신호가 얼마나 정확할지의 여부가 문제로 남게 된다.

본 연구에서는 고시바에 의하여 NLSE에 적용된 SS-FEM을 이용하여 전송거리의 증가에 따른 해의 수렴성을 솔리톤의 해석해와 비교하였다[2]. 또한 SS-FM의 수치결과와도 그 차이점을 보였다. 수치해석 시에 전송 방향으로 동일한 분할 간격을 유지하면서, 시간영역의 표본화 개수에 의한 해의 정확성을 관찰하였다. 본 논문의 순서는 다음과 같다. 2장에서 솔리톤에 적용되는 정규화된 NLSE를 소개하고, SS-FM과 SS-FEM 등의 수치해석법을 논한 다음, 3장에서 수치 결과를 보이고, 마지막 장에서 결론을 맺는다.

2. 전송방정식

광섬유내에서 전파되는 신호의 특성을 예측하는 지배 방정식은 NLSE이다. 분산효과와 비선형성의 두 영향을 동시에 고려한 엄밀해를 가지는 솔리톤의 경우를 고려하고자 한다. 역산란법(inverse scattering method)에 의한 해를 구하기 위하여 전송방정식을 정규화한 결과는 다음과 같다[2, 3].

$$-j\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + |q|^2 q = 0 \tag{1}$$

와 같다. 식 (2)의 해는

$$q(\xi + \Delta\xi, s) \approx q(\xi, s) \exp(\hat{N}\Delta\xi) \tag{4}$$

와 같다. 여기서 $\Delta\xi$ 는 전송축상의 분할 간격이며, 지수항의 연산자 $\hat{N} = -j|q(\xi, s)|^2$ 이다.

식 (3)의 해는 푸리에법에 의하여 다음과 같이 계산된다.

$$q(\xi + \Delta\xi, s) = F^{-1}\{F\{q(\xi, s)\}\exp(\hat{D}\Delta\xi)\} \tag{5}$$

여기서 Ω 는 정규화 시간 파라미터에 대응되는 주파수이며, 연산자 $\hat{D} = j\Omega^2/2$ 이다. 그리고 F 및 F^{-1} 은 푸리에 변환 및 그 역변환을 나타낸다. 분산과 비선형 영향은 독립적으로 처리되지만, 전송축상의 각 단계에서 순차적으로 고려하기 위하여, (5)의 결과를 (4)의 단계 입력으로 결합하면, (1)의 해는 근사적으로 다음과 같이 표현된다.

$$q(\xi + \Delta\xi, s) \approx \exp(\hat{N}\Delta\xi)F^{-1}\{\exp(\hat{D}\Delta\xi)F\{q(\xi, s)\}\} \tag{6}$$

식 (6)에 의해 해를 얻는 방법이 SS-FM이다.

식 (3)에 대하여 FEM을 적용하면 그 결과로서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[M_e]\frac{d}{dz}[q^e] + [K^e][q^e] = [G^e] \tag{7}$$

식 (7)에서 각 행렬의 요소는

$$M_{ij}^e = \langle N_i^e, N_j^e \rangle \tag{8}$$

$$K_{ij}^e = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{dN_i^e}{ds}, \frac{dN_j^e}{ds} \right\rangle \tag{9}$$

$$G_i^e = -\frac{1}{2} \beta_2 \left[N_i^e \frac{\partial q}{\partial s} \right]_e \quad (10)$$

와 같으며, q_i^e 는 요소 e 에서 j 번째 미지수이다. 그리고 $N_j^e(s)$ 는 전개함수이며, $j=1, \dots, N_e$ 이고, N_e 는 요소 e 에서 미지수의 개수가 된다. 식 (8)과 (9)의 $\langle \cdot \rangle$ 는 다음과 같다.

$$\langle N_i^e, N_j^e \rangle = \int_e N_i^e N_j^e ds \quad (11)$$

$$\left\langle \frac{dN_i^e}{ds}, \frac{dN_j^e}{ds} \right\rangle = \int_e \frac{dN_i^e}{ds} \frac{dN_j^e}{ds} ds \quad (12)$$

행렬식 (7)의 공간 미분연산자를 처리하기 위하여 다음과 같이 유한차분법 및 평균치 근사화를 이용하기로 한다.

$$\frac{d}{dz} q_i^e(\zeta) = \frac{q_i^e(\zeta + \Delta\zeta) - q_i^e(\zeta)}{\Delta\zeta} \quad (13)$$

$$q_i^e(\zeta) = \frac{q_i^e(\zeta + \Delta\zeta) + q_i^e(\zeta)}{2} \quad (14)$$

식 (13)과 (14)를 행렬식 (7)에 대입하면

$$[A^e][q^e(\zeta + \Delta\zeta)] = [B^e][q^e(\zeta)] + [G^e] \quad (15)$$

와 같으며, 그 결과 새로 정의된 행렬은

$$[A^e] = [M^e] + \frac{\Delta\zeta}{2} [K^e] \quad (16)$$

$$[B^e] = [M^e] - \frac{\Delta\zeta}{2} [K^e] \quad (17)$$

이다. 식 (15)에 대하여 전체 요소의 수 M 에 대하여 행렬조합 과정을 거치면 그 결과는

$$[A][q(\zeta + \Delta\zeta)] = [B][q(\zeta)] + [G] \quad (18)$$

가 되고, 행렬 $[A]$ 와 $[B]$ 는 $MN_e + 1$ 의 차수를 가지는 정방행렬이 된다. 식 (18)의 행렬식을 풀면, 분할된 전송축에서 한 단계 후의 미지행렬을 얻을 수 있다. 이를 풀기 전에 적용되는 경계조건은 다음과 같다.

$$q(\zeta, s) = q(\zeta, s + T) \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} q(\zeta, s) = \frac{\partial}{\partial s} q(\zeta, s + T) \quad (20)$$

여기서 T 는 시간영역에서 표본화되는 구간이다. 이 경계조건은 주기 T 의 연속성을 고려한 결과이다. 그러므로 (20)을 (18)에 적용하면 $[G] = 0$ 이 되며, (19)를 이용하여 이 행렬식을 다시 쓰면

$$[L_A][q(\zeta + \Delta\zeta)] = [L_B][q(\zeta)] \quad (21)$$

가 된다. 행렬 $[L_A]$ 및 $[L_B]$ 는 경계조건이 적용되어 재구성된 결과로서 차수가 $N = MN_e$ 인 $N \times N$ 의 정방행렬이다. 식 (21)의 연산에서

$$[q(\zeta + \Delta\zeta)] = [L][q(\zeta)] \quad (22)$$

로 두면, $[L] = [L_A]^{-1}[L_B]$ 이며, 이 행렬은 분할단계의 증가와 무관하며, 해석코드의 초기에 1회의 계산으로 단계가 증가할 때마다 사용이 가능하다. 그러므로 식 (22)를 이용하여 분산효과를 고려한 해를 얻고, 이 결과물식 (4)의 입력으로 사용하여 SS-FEM에 의한 최종해를 얻을 수 있다.

3. 수치 결과

식 (1)의 전송방정식에 대하여 입력으로 사용되는 신호 함수가

$$q(0, s) = A \operatorname{sech} s \quad (23)$$

이면, 역산란법에 의한 해석적인 해는 이미 잘 알려져 있다. 수치해의 정확성을 검증하기 위하여 $A = 2$ 일 때의 결과와 비교하고자 한다. 해석해는 다음과 같다.

$$q(\zeta, s) = \frac{4[\cosh(3s) + 3e^{-i4\zeta} \cosh s]e^{-i\zeta/2}}{\cosh(4s) + 4 \cosh(2s) + 3 \cos(4\zeta)} \quad (24)$$

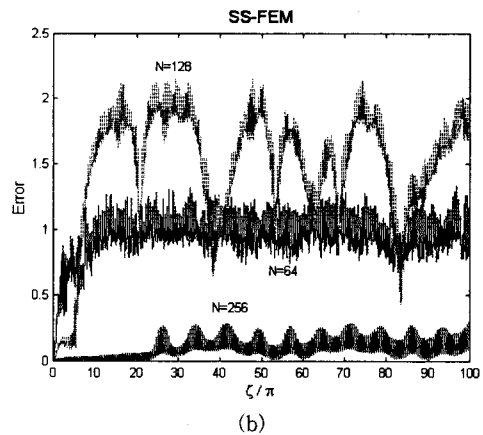
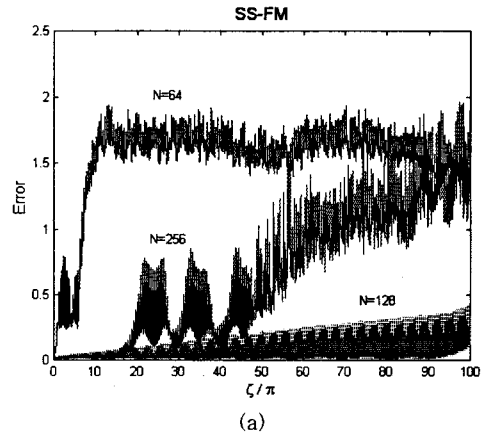
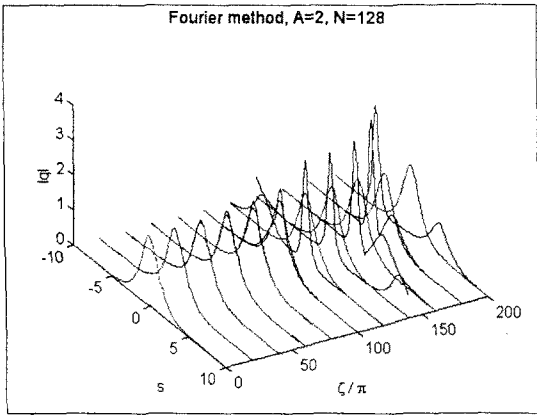
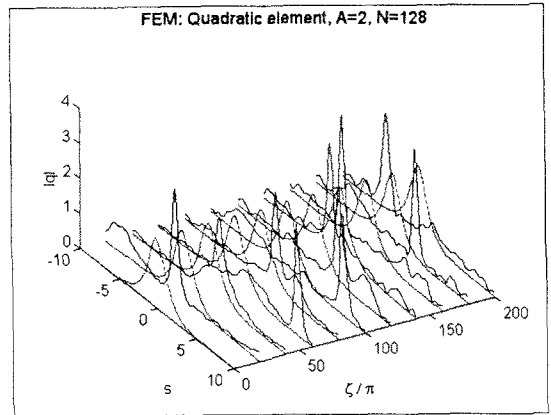


그림 1. 전송거리의 증가에 따른 오차, $\Delta\zeta = \pi/200$, (a) 푸리에법, (b) 유한요소법

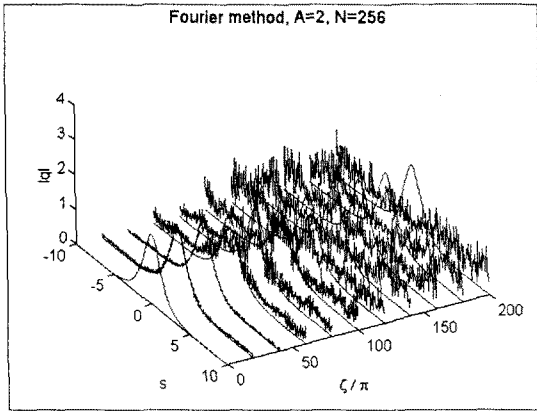
SS-FM에 의한 해석에서 표본화되는 미지수의 개수를 FFT(Fast Fourier Transform)의 적용을 위하여, $N=64, 128, 256$ 으로 선택하였으며, SS-FEM의 경우 2차 요소(quadratic element) 함수를 사용하여, 요소의 수 $M=32$,



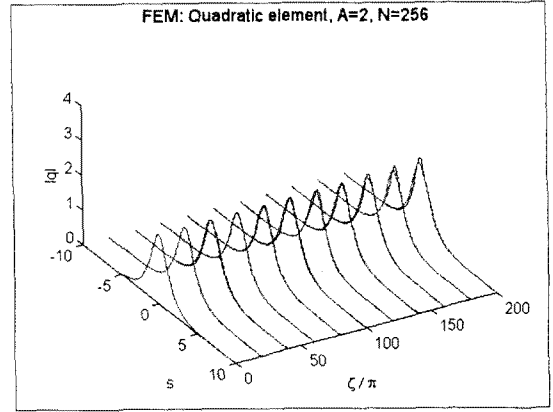
(a)



(a)



(b)



(b)

그림 2. 푸리에법에 의한 2차 솔리톤의 수치결과

그림 3. 유한요소법에 의한 2차 솔리톤의 수치결과

64, 128로 두었다. 이 때 미지수의 개수는 $N = 2M$ 으로서, SS-FM의 표본 개수와 같다. 시뮬레이션을 행할 때 분할 간격 $\Delta\zeta = \pi/200$ 으로 두었다.

전송거리의 증가에 따른 해의 정확성을 살펴보기 위하여 수치 해의 결과와 (24)의 해로부터 $\zeta = 100\pi$ 까지 오차를 계산하여 그림 1에 보였다. 오차를 계산하는데 사용된 식은

$$\text{Error} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} | |q_{\text{exact}}| - |q_{\text{numerical}}| | ds}{\int_{-T/2}^{T/2} |q_{\text{exact}}| ds} \quad (25)$$

이다. 계산시에 T 는 20으로 두었다. 그림 1의 (a)는 SS-FM, (b)는 SS-FEM에 의한 결과이다. 오차를 살펴보면, SS-FM은 $N=128$, SS-FEM의 경우는 $N=256$ 일 때 오차가 가장 작았다.

그림 2와 3은 $N=128$ 및 256에 대하여 $\zeta=200\pi$ 까지의 시뮬레이션 결과를 (24)의 해와 함께 보이고 있다. 그림 2는 SS-FM에 의한 결과이며, $N=128$ 일 때 100π 까지 엄밀해와 작은 오차를 가지지만 전송거리가 증가하면 오차가 매우 큼을 볼 수 있다. 그림 3은 SS-FEM에 의한 결과이다. SS-FEM의 경우 $N=256$ 일 때 전송거리가 100π 이상이 되더라도 작은 오차를 유지하면서, 해

석해와 거의 일치함을 볼 수 있다.

4. 결론

광섬유를 이용한 신호의 전송시 비선형을 고려한 지배 방정식인 NLSE(Nonlinear Schrodinger Equation)를 단계분할 유한 요소법에 의하여 해석하였으며, 해의 수렴성을 푸리에법의 결과와 비교하였다. 해의 정확성은 시간 영역의 표본 개수에도 의존하였다. 동일한 전송구간에 대하여 작은 오차를 주는 표본개수를 선택하여, 전송 거리를 증가시켜 수치해를 관찰한 결과 유한요소법에 의한 해가 푸리에 방법에 의한 결과보다 더욱 정확하였다. 그러므로 장거리 전송 시뮬레이션에서 단계분할 유한요소법은 더욱 적합한 수치해석의 한 방법이 되리라 본다.

참고 문헌

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. San Diego, CA:Academic, 1995, pp. 142-148.
- [2] M. Koshiba, *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*. Toyko, KTK, 1992, pp. 230-238.
- [3] J. R. Taylor, Koshiba, *Optical Solitons-Theory and Experiment*. Cambridge, Cambridge Press, 1992, pp. 73-84.