

표면접촉요소에 의한 다중 전극계의 정전용량 해석

박필용, 최승길, 심재학, 강형부\*  
 한양대학교 전기공학과, \*한양대학교 전자전기공학부

An Analysis of Capacitance in Multi-electrode System  
 by Surface-Contacted Elements

Pil-yong Park, Seung-kil Choi, Jae-hak Shim, Hyung-boo Kang\*  
 Hanyang University

**Abstract** -In this paper, a new method for calculating capacitance in multi-electrode system with arbitrarily shape is presented. This new approach based on divergence theorem and Gauss's law is achieved by Surface-Contacted Element(SCE) for Gaussian surface. To evaluate capacitance in multi-electrode system, two dimensional finite element method using only the elements which is contacted one nod (PE: Point-Element) or two nod (FE: Face-Element) with surface is employed. The proposed SCE method has short computing time to calculate capacitance which is because it uses only SCE elements and needs one calculation loop while exiting FEM method in servral loops. This method is verified by application in calculating capacitance using potential detection device model which is composed with anode, cathode, and floating electrode.

1. 서 론

송전선로 상호간 및 전력기기에서의 전극설계 그리고 최근 전자공학에서의 회로기판 설계에 이르기까지 도체 상호간 또는 도체와 대지간의 정전용량 계산은 전기 및 전자공학 분야에서 중요한 비중을 차지하고 있다. 다중 전극으로 구성된 도체계나 복잡한 형상의 전극 구조를 가진 시스템에서의 전계분포 및 정전용량을 해석 하기위한 기존의 해석법으로 전하중첩법, 표면 전하법 및 경계요소법이 주로 사용되고 있다. 그러나 전하중첩법 및 표면 전하법은 반해석적인 해법이라 불릴만큼 가상전하배치에 실험자의 경험이 무엇보다 중요하며, 경계요소법의 경우 다양한 전극 형태에 대한 적절한 Green function의 설정이 곤란하다는 단점을 가지고 있다. 또한 양극, 음극으로만 구성된 단순한 계의 정전용량의 계산은 기존의 유한요소법으로도 용이하게 해석 가능하지만, 다중 도체로 구성된 계에서는 해석소요시간이 많이 걸리는 단점이 있다. 이에 본 연구에서는 복잡한 형상으로 구성된 다중 전극계의 정전용량 해석을 위하여 유한요소법 및 표면접촉요소를 이용한 가우스 법칙을 병용하여 기존FEM의 단점인 계산소요시간을 단축하며 정확도가 우수한 새로운 해석기법을 제시하였으며, 정지형 전위감지기를 해석 모델로 본 연구에서 제시한 기법을 이용하여 전위, 전계 및 정전용량을 해석하였다.

2.기본이론 및 해석방법

2.1 정전계 지배방정식 및 가우스 법칙

정전계에서는 전기 스칼라 포텐셜  $\phi$  를 계변수로 하는 식(1)과 같은 Laplace 방정식을 얻을 수 있다

$$\epsilon \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} = 0 \tag{1}$$

$$[K] \{ \phi \} = \{ 0 \} \tag{2}$$

여기서,  $K$ 는 계수행렬이다.

유한요소법의 Galerkin Method를 사용하여  $\phi$ 를 근사화 시키면, 식(2)와 같은 시스템 방정식을 얻을 수 있다. 이 때, 경계조건은 고정경계조건, 자연경계조건 및 floating 전극의 절점들에 대하여 등 potential 경계조건을 적용한다[1]. 시스템 방정식을 계산하여 각 절점에서의 전위값이 계산되면  $E = -\nabla \phi$  관계에 의해서 요소 내의 전계  $E_i$ 를 구할 수 있다

또한, 임의의 전극표면에 접촉한 요소를 이용하여 가우스 법칙을 근사화 시키면 식(3)과 같이 된다[2].

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \epsilon \sum_{i=1}^n E_i \cdot S_i \tag{3}$$

여기서,  $E_i, S_i$ 는 요소내의 전계 및 divergence면적이다.

2.2 표면접촉요소(SCE)에 의한 전하량 계산

전극주위를 둘러싸고 있는 요소로서는 PE(Point-Element)와 FE(Face-Element)의 2종류로 나눌 수 있으며, coner effects나 edge effects와 같은 불평등 전계의 fringe 효과를 고려하기 위한 PE, FE의 합성방법에 의하여 전극표면에 존재하는 전하량은 다음과 같은 식이 된다[2].

$$Q_{totx} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=1}^{nP} E_{FE_k} \cdot n_{FE_k} da_{FE_k} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=1}^{nF} E_{PE_k} \cdot n_{PE_k} da_{PE_k} \tag{4}$$

여기서  $nP, nF$ 는 전극표면에 접촉한 PE와 FE의 갯수이며  $E_k, da_k, n_k$ 는 각각 요소내의 전계 및 divergence면적, normal벡터를 나타내며, 첨자 PE,FE는 요소의 종류이다.

3. 수치해석 및 결과

3.1 해석모델

그림 1은 본 연구의 해석 모델인 정지형 전위감지기의 구조이며, 축대칭 구조를 이루고 있기 때문에 축대칭 2차원 해석을 적용하였다. floating 전극은 두께 1mm,

길이 37mm인 동판이며 유전체로서는 전기적 특성과 온도 특성이 우수한 저유전율 재료인 에폭시 수지를 사용하였다. 해석에 사용된 에폭시 비유전율 ( $\epsilon_r$ )은 3.89이다.

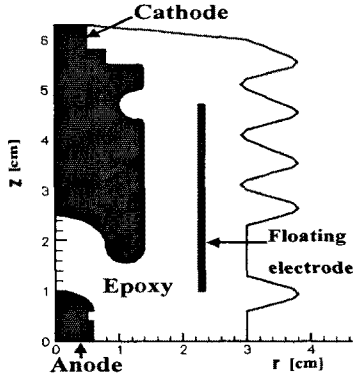


그림 1 정지형 전위감지기의 구조

### 3.2 정전용량 계산 방법

기존의 해석방법으로 본 모델과 같이 다중도체로 구성된 계에서 정전용량을 계산하기 위해서는 다음과 같은 식이 사용된다[3].

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + b_{12} & -b_{12} \\ -b_{12} & b_{22} + b_{12} \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = W_{ij} - \frac{b_{ii} + b_{jj}}{2} \quad (6)$$

$$b_{ii} = 2W_{ii}$$

여기서,  $W_{ii}$ 는  $i$ 번째 전극에 1V를 인가하고 나머지 전극은 0V로 하였을 경우의 에너지이고,  $W_{ij}$ 는  $i, j$  전극에 각각 1V를 인가하고 나머지 전극을 0V로 하였을 경우의 에너지를 나타낸다. 식 (5) 및 식(6)에서 알 수 있듯이 기존의 방법으로 정전용량을 계산하기 위해서는 3번의 계산을 수행해야 하므로 계산시간이 오래 걸린다.

이에 본 연구에서는 계산시간을 단축할 수 있는 아래와 같은 정전용량계산 알고리즘을 제시하였다. 전극에 존재하는 전하량과 전압과의 관계를 이용하면 정전용량은  $C=Q/V$  [F/m]가 되며 정지형 전위감지기의 경우 정전용량은 다음과 같이 된다[4].

$$\begin{bmatrix} Q_A \\ Q_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{AA} & -C_{AF} \\ -C_{FA} & C_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_F \end{bmatrix} \quad (7)$$

이 때,  $C_{AA}, C_{FF}$ 는 각각 양극과 floating 전극의 용량 계수(coefficient of capacity)이며  $C_{AF}, C_{FA}$ 는 각각 양극과 floating 전극의 유도계수(coefficient of induction)이다. 또한  $Q_A, Q_F$ 는 양극과 floating 전극에 존재하는 전하량을 나타낸다. 또한 양극과 음극과의 정전용량  $C_{AC}$ 과 floating 전극과 음극과의 정전용량  $C_{FC}$ 는 각 전극의 대지용량으로 생각할 수 있으므로 다음과 같은 관계식이 성립한다[4].

$$\begin{aligned} C_{AA} &= C_{AC} + C_{AF} \\ C_{FF} &= C_{FC} + C_{FA} \end{aligned} \quad (8)$$

이 때,  $C_{AF} = C_{FA}$ 이다.  $Q_F$ 는 항상 0이기 때문에  $C_{AC}, C_{AF}, C_{FC}$ 값을 계산하는데 있어서 식 7을 바로 이용하는 것은 불가능하므로 그림 2와 같이 정지형 전위감지기의 등가회로를 이용해서 정전용량을 계산한다.

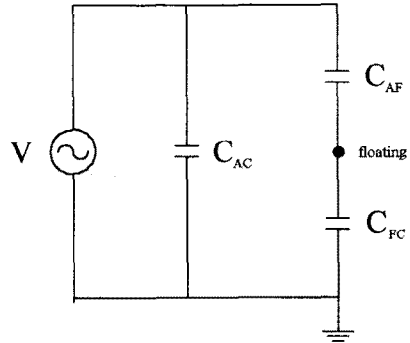


그림 2 정지형 전위 감지기의 등가모델

양극에 의해서 floating전극에 유도되는 전하량을  $Q_{AF}$ 라고 하고, floating전극과 음극사이에서 유도되는 전하량을  $Q_{FC}$ 라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다 [4].

$$Q_F = Q_{AF} + Q_{FC} = 0 \quad (9)$$

$$C_{AF} = \frac{Q_{AF}}{V_A - V_F}$$

$$C_{FC} = \frac{Q_{FC}}{V_F} = \frac{Q_{AF}}{V_F}$$

$$C_{AC} = \frac{Q_A - Q_{AF}}{V_A}$$

여기서,  $V_A, V_F$ 는 각각 양극과 floating전극의 전압이며,  $C_{AA}, C_{FF}$ 는 식 (8)과 식 (9)에 의해서 계산된다.

### 3.3 시뮬레이션 알고리즘

정지형 전위감지기의 정전용량을 계산하기 위한 시뮬레이션 알고리즘은 다음과 같다.

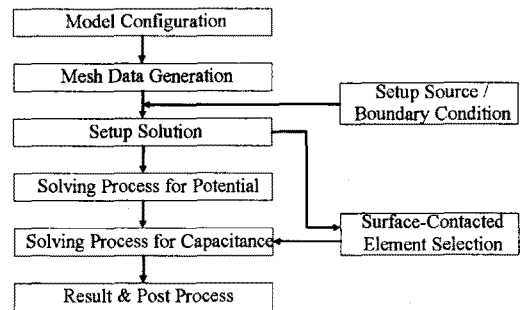


그림 3 시뮬레이션 알고리즘

위와 같은 프로그램 흐름도에 의해서 양극의 전하량  $Q_A$ 을 식 (4)에 의해 구하고, 양극에 의해 유도되는 floating 전극의  $Q_{AF}$ 는 floating 전극의 표면접촉요소 중 전극표면으로 들어오는 전체성분만을 가진 표면접촉요소만을 선택해서 식 (4)에 의해 구하였다. 또한 양극 전압  $V_A$ 는 인가전압이고, floating 전극의 전압  $V_F$ 는 수치해석에 의해 구한 값이다.  $Q_A, Q_{AF}, V_A, V_F$ 을 식

(9)에 대입하여 정전용량을 구하였다.

### 3.4 수치해석 결과 및 고찰

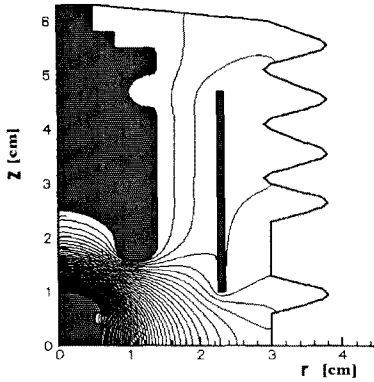


그림 4 정지형 전위감지기의 등전위면

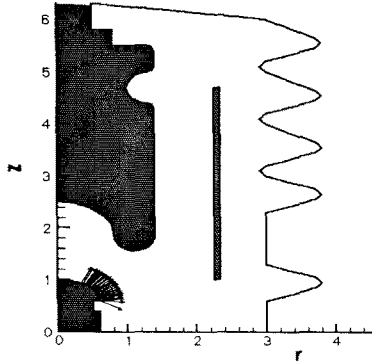


그림 5 최대 전계값의 90%이상 전계 분포도

해석모델을 총요소수 15178개로 요소분할 후, 양극에  $22.9[\text{kV}]/\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 18.7[\text{kV}]$ 를 인가하여 수치해석을 수행하였다. 수치해석 결과 floating 전극에 유기되는 전압  $V_F$ 은 1136[V]였으며, 해석 모델 내부의 최대전계값은  $4.59 \times 10^6 \text{V/m}$ 이다. 그림 5는 최대 전계값의 90%이상의 전계분포를 나타낸 것이다. 예폭시 수지의 절연파괴내력이  $20 \times 10^6 \text{V/m}$ 인 것을 감안하면 본 해석 모델은 충분한 절연내력을 가짐을 알 수 있다. 표 1은  $Q_A$ ,  $Q_{AF}$ 를 구하기 위한 양극과 floating 전극의 PE, FE를 나타낸 것이다. 표 2는 본 연구에서 제시한 방법으로 얻어진 정전용량값이다.

총요소 (개)	Anode			floating 전극		
	PE (개)	FE (개)	인가전압 ( $V_A$ )	PE (개)	FE (개)	유기전압 ( $V_F$ )
15178	47	45	18700	388	378	1136

표 1 요소수 및 전압

구분	계 산 값	단 위
$Q_A$	48.177726	{nC}
$Q_{AF}$	17.17852	
$C_{AA}$	2.635647	{pF}
$C_{AF}$	0.978087	
$C_{AC}$	1.65756	
$C_{FF}$	16.10007	
$C_{FA}$	0.978087	
$C_{FC}$	15.12199	

표 2 수치해석 결과값

전술하였듯이 기존의 해석법으로 다중전극계의 정전용량을 계산 할 경우 식 (5), (6)에서 알 수 있듯이 3번의 계산을 수행하여 계산시간이 길어진다. 반면에 본 연구에서 제안한 방법으로는 1회만 계산만으로도 근사적인 값을 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다.

### 4. 결 론

본 연구에서는 유한요소법과 전극표면에 접촉되어 있는 요소들을 이용하여 가우스 법칙을 병용한 새로운 정전용량 해석방법을 제시하였다. 본 해석 기법은 표면 접촉 요소인 PE와 FE를 이용하여 가우스 정리를 적용시킨 전극의 전하량 및 정전용량 계산 방법으로 기존의 방법에 비해 이론이 간단하고 축대칭 3차원의 경우 상당히 적은 요소로도 비교적 정밀한 값을 얻을 수 있었다. 또한 다중도체 해석모델로 정지형 전위감지기를 적용하여 정전용량을 계산한 결과, 기존의 해석방법보다 대폭 단축된 시간으로 비교적 정밀한 결과값을 얻을 수 있었다.

### [참고문헌]

- [1] 임달호, 전기계의 유한요소법, 동명사, 1986
- [2] 박필용, "표면접촉요소에 의한 정전용량계산 및 응용", 99년도 한국전기전자재료학회 춘계학술대회는문집, pp.399-402, 1999.
- [3] Mauro Feliziani and Francescaromana Maradei, "Capacitance Matrix Calculation of a Wire Conductor Line: A New FEM Approach," IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 40, No. 3, pp. 262-270, 1998
- [4] A. Haddad and P. Naylor, "Finite-element Computation of Capacitance Networks in Multiple-electrode Systems: Application to ZnO Surge Arresters," IEE Proc.-Sci. Meas. Technol., Vol. 145, pp. 129-135, 1998
- [5] S. Ratnajeevan and H. Hoole, Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices, Elsevier, 1989
- [6] Jianming Jin, The Finite Element Method in Electromagnetics, A Wiley-Interscience Publication, 1993
- [7] David J. Griffiths, Introduction To Electrodynamics, Prentice Hall, 1989
- [8] David K. Cheng, Field and Wave Electromagnetics, Addison Wesley, 1993
- [9] Matthew N. O. Sadiku, Numerical Technique in Electromagnetics, CRC Press, 1992