

GEVP를 이용한 GBSB 연상 메모리의 설계

박연목*, 박주영**

*고려대학교 대학원 정보공학과 제어계측전공

**고려대학교 제어계측공학과

Synthesis of GBSB Neural Associative Memories Using GEVP

Yonmook Park*, Jooyoung Park**

*Department of Information Engineering, Graduate School, Korea University.

**Department of Control and Instrumentation Engineering, Korea University.

Abstract - 본 논문은 주어진 적합한 이진 패턴들의 집합이 점근적으로 안정한 평형점들로서 저장되는 최적으로 성능을 갖는 GBSB (generalized brain-state-in-a-box)의 설계가 고려된다. GBSB 모델의 정성적 특성에 기초하여, 설계 문제가 제약 조건을 가한 최적화 문제로 공식화된다. 다음으로, 우리는 이 문제를 GEVP (generalized eigenvalue problem)라고 불리는 최적화 문제로 변환한다. 제안된 방법을 검증하기 위함과 기존의 방법과의 비교를 위해서 설계 예제가 주어진다.

본 논문에서는 LMI Control Toolbox(3)의 "gevp" 함수가 사용된다.

본 논문에서는, 다음의 정의들 및 기호 약속들을 사용한다:

1. 서 론

최근에, 제한 신경망에 의한 연상 메모리의 실현 문제가 많은 관심을 받아 오고 있다[5],[8]. 일반적으로, 이러한 신경 연상 메모리에 요구되는 핵심적인 특성들은 다음을 포함한다[7]:

- 원형 패턴(prototype pattern)들은 점근적으로 안정한 평형점들로서 저장된다.
- 저장된 원형 패턴에 충분히 가까운 어떤 벡터가 초기 조건으로 주어졌을 때, 시스템 궤적이 원형 패턴으로 수렴한다.
- 원형 패턴들에 해당하지 않는 점근적으로 안정한 평형점(즉, 의사 상태:spurious state)들의 갯수가 최소화이다.
- 시스템이 전역적으로 안정하다. 즉, 시스템의 모든 궤적이 어떤 평형점으로 수렴한다.

유망한 신경망 모델들 가운데 이러한 특성들을 달성하는데 적합한 것중 하나가 BSB 신경망이다. 이 모델은 [1]에서 처음 제안되었다. 본 논문에서는, GBSB라고 언급되는 BSB 모델의 개선된 형태에 기초를 둔 연상 메모리에 대한 설계 절차를 개발하는데 관심을 둔다. 본 논문의 설계 절차는 일반화된 고유값 문제(generalized eigenvalue problem: GEVP)라고 불리는 LMI에 기초한 최적화 문제의 형태로 주어지게 된다. GBSB 모델은 [6]과 [4]에서 연구되고 제안되었다.

본 논문에서는, 최적으로 성능을 발휘하는 GBSB에 대한 매개 변수들을 어떻게 발견할 것인가에 주의를 집중된다. GBSB 모델의 기본적인 특성들을 소개한 후에, 최적 성능을 가지고 원형 패턴들을 저장할 수 있는 GBSB의 설계가 제약 조건을 가한 최적화 문제로 공식화된다. 다음으로, 우리는 설계 문제를 일반화된 고유값 문제(GEVP)라고 불리는 최적화 문제로 변환한다. GEVP가 interior point 방법들에 의해 효율적으로 풀릴 수 있기 때문에, 설계 문제의 GEVP로의 변환은 본래 문제에 해당하는 해를 발견하는 것과 동가이다. 제안된 방법에서 나타나는 GEVP에 대한 최적 탐색기로서,

• R^n 은 Euclidean norm $\|\cdot\|$ 을 갖는 실수 n 벡터들의 normed linear space을 의미한다.

• 어떤 대칭 행렬 $A \in R^{n \times n}$ 에 대해서, $x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$ 가 만족되면, A 는 양의 정부호(positive definite)이다라고 하며, $A > 0$ 는 이를 의미한다. 또한, $A > B$ 은 $A - B$ 이 양의 정부호임을 의미한다.

• H^n 은 $[-1, +1]^n$ 을 의미한다. 즉, $H^n = \{x \in R^n : -1 \leq x_i \leq +1, i = 1, \dots, n\}$.

• 이진 벡터는 그것의 각각의 원소가 $+1$ 또는 -1 인 bipolar 이진 벡터를 의미하고, 이러한 모든 이진 벡터들의 집합을 B^n 으로 표현한다.

• B^n 에서 두 벡터 x^* 과 x 사이의 Hamming 거리는 $HD(x^*, x)$ 으로 표기하며, $HD(x^*, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i^* - x_i|$ 이다.

• 꼭지점 $\gamma \in B^n$ 의 l -이웃(l -neighborhood)은 $\{\gamma^* \in B^n \mid HD(\gamma^*, \gamma) \leq l\}$ 으로 표현된다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다: 2장에서는 GBSB 모델의 다소 알려진 정성적 특성과 새로이 관찰된 중요한 특성이 제시된다. 3장에서는, 이러한 특성에 기초하여, 최적 성능을 갖는 GBSB의 설계가 제약 조건을 가한 최적화 문제로 치환된다. 그리고, 어떻게 이러한 설계 문제가 GEVP로 변환되는지에 대해서도 기술된다. 4장에서는 기존의 설계 방법에 비해서 제안된 방법의 우월성을 보이기 위해 설계 예제가 제시된다. 마지막으로 5장에서 결론을 내린다.

2. 기초 결과들

GBSB 모델의 동역학은 다음과 같은 상태 방정식에 의해 기술된다:

$$x(k+1) = g(x(k) + a(Wx(k) + b)), \quad (1)$$

여기서 $x(k) \in R^n$ 은 시간 k 에서의 상태 벡터, $a > 0$ 은

스텝 크기, $\mathbf{W} \in R^{n \times n}$ 은 가중 행렬, $\mathbf{b} \in R^n$ 은 바이어스 벡터이며, $g: R^n \rightarrow R^n$ 은 i 번째 성분이 다음과 같이 정의되는 선형 포화 함수이다:

$$g_i([x_1 \cdots x_i \cdots x_n]^T) = \begin{cases} +1 & \text{if } x_i \geq +1, \\ x_i & \text{if } -1 < x_i < +1, \\ -1 & \text{if } x_i \leq -1. \end{cases}$$

이러한 GBSB 모델은 [1]에 의해 제안된 BSB 네트워크의 일반화된 형태이며, 바이어스 벡터 \mathbf{b} 의 존재로 인해 BSB 네트워크와는 구별된다.

GBSB 모델의 안정성에 관한 논의에서, 우리는 다음 정의들을 사용한다:

- 만약 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e$ 이 $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_e, \forall k > 0$ 을 만족하면, $\mathbf{x}_e \in R^n$ 은 시스템 (1)의 평형점이다.
- 만약 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해서, $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$ 이면, $\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon, \forall k > 0$ 이 만족되는 $\delta > 0$ 이 존재하면, 시스템 (1)의 평형점 \mathbf{x}_e 은 안정하다.
- 만약 어떤 점 \mathbf{x}_e 이 안정하고 $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$ 이면, $k \rightarrow \infty$ 일 때 $\mathbf{x}(k) \rightarrow \mathbf{x}_e$ 이 되는 $\delta > 0$ 가 존재하면, 시스템 (1)의 평형점 \mathbf{x}_e 은 점근적으로 안정하다.
- 만약 시스템의 모든 궤적이 어떤 평형점들로 수렴하면, 시스템 (1)은 전역적으로 안정하다.

GBSB 모델의 안정성 판별의 기준은 다음과 같다([4], [7], [9]):

- H^n 의 한 꼭지점 γ 가 시스템 (1)의 평형점이기 위한 필요충분 조건은

$$\gamma_i \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \gamma_j + b_i \right) \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

이다.

- 만약 H^n 의 한 꼭지점 γ 에 대해

$$\gamma_i \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \gamma_j + b_i \right) > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

이면, γ 는 시스템 (1)의 점근적으로 안정한 평형점이다.

- 만약 꼭지점 $\gamma \in B^n$ 에 대해서 (3)이 성립하고 $w_{ii} = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ 이면, 시스템 (1)의 다른 점근적으로 안정한 평형점들은 오직 $HD(\gamma, \gamma^*) > 1$ 을 만족하는 꼭지점들 $\gamma^* \in B^n$ 에서만 존재하게 된다.

- 만약 가중 행렬 \mathbf{W} 가 대칭이고 λ_{min} 을 $\mathbf{I} + \alpha \mathbf{W}$ 의 가장 작은 고유값이라 할 때

$$\lambda_{min} > -1 \quad (4)$$

이면, 시스템 (1)은 전역적으로 안정하다.

3. GBSB의 설계를 위한 GEVP 접근 방법

일반적으로, 안정성만을 고려한 GBSB 신경 연상 메

모리 설계는 만족할 만한 성능을 갖는 네트워크를 제공하지 않는다. 원형 패턴에 대한 수렴 영역과 의사 상태들의 갯수에 중점을 두는 지침이 병행되어야 한다. 다음에서는, 성능 최적화에 대한 추가적인 지침을 제공하는 데 사용할 중요한 정리를 제시한다.

정리: $\gamma \in B^n$ 가 시스템 (1)의 점근적으로 안정한 평형점이라 하고, l 이 $\{1, \dots, n\}$ 에 속하는 정수라고 하자. 만약 \mathbf{W} 와 \mathbf{b} 가

$$w_{ii} = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

과

$$\gamma_i \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \gamma_j + b_i \right) > 2(l-1) \max_{1 \leq j \leq n} |w_{ij}|, i=1, \dots, n \quad (6)$$

을 만족하면, $1 \leq HD(\gamma, \gamma^*) \leq l$ 인 임의의 이진 벡터 $\gamma^* \in B^n$ 는 다음 특성들을 갖는다:

- γ^* 는 평형점이 아니다.
- 만약 $\mathbf{x}(0) = \gamma^*$ 이고 $\gamma_i^* \neq \gamma_i$ 이면, 다음 시간 단계에서, x_i 는 γ_i 를 향해서 움직인다(즉, $x_i(1)$ 은 $x_i(0)$ 보다 γ_i 에 가까워진다).

우리가 제시한 위의 정리로부터, (5)와 (6)을 만족하는 \mathbf{W} 와 \mathbf{b} 는, 원형 패턴 γ 의 l -이웃에 존재하는 꼭지점들이 의사 상태들이 되지 않으며, γ 의 수렴 영역에 속할 확률이 높음을 알 수 있다. 따라서, 의사 상태들의 갯수를 감소시키고 원형 패턴들의 수렴 영역을 증가시키기 위한 가능한 전략은 각 원형 패턴 $\gamma \in B^n$ 에 대해 제약 조건 (6)의 l 을 최대화하는 것이다. 이러한 관찰로부터 다음과 같은 최적 설계 방안이 도출된다:

원형 패턴들 $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ 이 주어지면, 최적으로 성능을 발휘하는 GBSB의 매개 변수들은

$$\max \delta (> 0) \quad (7)$$

$$\begin{cases} x_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right) > 2\delta \max_{1 \leq j \leq n} |w_{ij}|, & i=1, \dots, n, \\ & k=1, \dots, m, \\ \text{s.t.} & \\ & w_{ii} = 0, i=1, \dots, n, \\ & \mathbf{W} = \mathbf{W}^T, \\ & \lambda_{min} > -1 \end{cases}$$

을 풀면 얻을 수 있다. 여기서, λ_{min} 은 $\mathbf{I} + \alpha \mathbf{W}$ 의 가장 작은 고유값이다. 이 최적화 문제는 두개의 비선형 제약 조건 모임을 갖는데, 이로 인해 가용한 최적화 기술을 손쉽게 적용하는데 방해가 된다. 다음에서, 이러한 문제가 효율적으로 풀릴 수 있는 최적화 문제로 변환될 수 있음을 보인다.

위의 문제는 몇가지 단계를 거치면 GEVP라고 불리는 최적화 문제로 변환될 수 있다. 일반적인 GEVP의 형태는 다음과 같다[2]:

$$\min \lambda$$

$$\text{s.t. } \lambda \mathbf{B}(\mathbf{z}) - \mathbf{A}(\mathbf{z}) > 0, \mathbf{B}(\mathbf{z}) > 0, \mathbf{C}(\mathbf{z}) > 0,$$

여기서 $\mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{B}(\mathbf{z}),$ 그리고 $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ 들은 변수 \mathbf{z} 에 관

한 affine 함수들로 대칭 행렬들이다. 이러한 GEVP는 최근에 개발된 interior point 방법들([2], [10])에 의해 효율적으로 풀릴 수 있다.

여기에서 우리는 문제(7)을

$$\begin{aligned} q_i - w_{ij} &> 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ q_i + w_{ij} &> 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

와 같은 선형 행렬 부등식들과

$$\begin{aligned} -2\delta q_i + x_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right) &> 0, \\ i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

와 같은 부등식들의 집합으로 치환할 수 있다.

다음으로, 고유값 조건 (4)는 다음과 같은 선형 행렬 부등식과 동치임을 보일 수 있다:

$$2I + \alpha W > 0.$$

위의 변환 절차들의 결과로써, 최적 성능을 가지고 원형 패턴들 $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ 을 저장할 수 있는 GBSB를 발견하는 문제는, 이제 다음과 같은 GEVP 문제로써 재공식화 될 수 있다:

$$\begin{aligned} \min \quad & (-\delta) \\ \text{s.t.} \quad & (-\delta)(2q_i) + x_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right) > 0, \\ & i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i - w_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ w_{ij} + q_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ 2I + \alpha W > 0, \\ w_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ W = W^T. \end{array} \right. \quad (8)$$

"(·)"내부 제약 조건들은 $q_i, i = 1, \dots, n$ 에 관한 선형 행렬 부등식들이고, $w_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$ 과 $W = W^T$ 를 만족하는 W 의 독립적인 스칼라 요소들임에 유의하자.

마지막으로, 결과적으로 얻어진 네트워크들이 어려움 없이 구현될 수 있게 하기 위해서 가중들 $|w_{ij}|$ 의 크기들이 합당한 상한(upper bound)을 갖도록 해야 한다. 이러한 실제적인 중요성을 반영하기 위해서, 다음과 같은 선형 행렬 부등식들이 (8)의 제약 조건들 목록에 추가된다:

$$L < q_i < U, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

(9)가 추가된 최적화 문제 역시 GEVP 형태가 됨에 유의하자.

4. 실제 예제

본 논문에서 제안된 GEVP 접근의 적용 가능성을 예증하고, 기존의 실제 방법과 비교하기 위해서 하나의 실제 예제가 고려된다. 이 예제에서, 우리는 $n = 10$ 뉴런

들을 갖는 GBSB 모델을 고려한다. 설계된 메모리 시스템의 성능은 모의실험에 의해 평가되는데, 이 모의실험에서는 모든 가능한 이진 벡터가 시스템의 초기 조건으로 적용되고, 시스템은 초기 조건으로부터 최종 상태까지 해를 얻도록 전개된다. 모의실험 결과를 분석하면, "평균 상기 능력 확률(average recall probabilities)"과 "올바른 패턴으로의 수렴율(the convergence rate to correct patterns)"을 얻게 되는데, 이들은 다음과 같이 정의된다:

- 원형 패턴 $\mathbf{x}^{(k)}$ 와 정수 $l \in \{0, 1, \dots, n\}$ 이 주어지면, $\mathbf{x}^{(k)}$ 로부터 Hamming 거리가 l 인 이진 초기 조건 벡터가 $\mathbf{x}^{(k)}$ 로 수렴하는 확률이 $P(\mathbf{x}^{(k)}, l)$ 로 표현된다. 평균 상기 능력 확률 $Prob(l)$ 에 의해서, 우리는 모든 원형 패턴들 $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ 에 대해 $P(\mathbf{x}^{(k)}, l)$ 의 평균을 의미한다(즉, $Prob(l) \triangleq \{\sum_{k=1}^m P(\mathbf{x}^{(k)}, l)\} / m$).
- 올바른 패턴으로의 수렴율에 의해서, 우리는 이진 초기 조건 벡터들이 Hamming 거리의 관점에서 원형 패턴에 가장 가깝게 가는 백분율을 의미한다.

[7]로부터 취해지는 본 예제에서는, 다음과 같이 주어지는 여섯 개의 원형 패턴들을 저장하고자 한다:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= [-1 +1 +1 +1 +1 +1 -1 -1 -1 -1]^T \\ \mathbf{x}^{(2)} &= [+1 +1 -1 -1 -1 +1 -1 -1 +1 -1]^T \\ \mathbf{x}^{(3)} &= [-1 +1 +1 +1 -1 -1 +1 -1 -1 -1]^T \\ \mathbf{x}^{(4)} &= [-1 +1 -1 -1 -1 -1 +1 -1 +1 +1]^T \\ \mathbf{x}^{(5)} &= [+1 -1 -1 +1 +1 -1 -1 +1 +1 -1]^T \\ \mathbf{x}^{(6)} &= [+1 +1 -1 +1 -1 +1 +1 +1 -1 -1]^T \end{aligned}$$

GBSB 모델의 스텝 크기는 [7]에서와 같이 $\alpha = 0.3$ 으로 한다. (9)에서의 한계를 $L = 0.1$ 과 $U = 0.2$ 로 갖는 해당되는 GEVP를 풀면, 표 1에서 보여지는 가중 행렬 W 와, 다음과 같은 바이어스 벡터 \mathbf{b} 가 얻어진다:

$$\mathbf{b} = [-0.049 + 0.609 \quad -0.391 + 0.276 \quad 0.000 \quad -0.080 + 0.176 \quad -0.264 + 0.206 \quad -0.635]^T$$

모의실험 결과에 의하면, 제안된 방법에 의해 설계된 GBSB는 어떠한 의사 상태도 갖지 않는 반면에, [7]의 GBSB는 B^* 위에서 두 개의 의사 상태들을 갖는다. 이러한 GBSB의 올바른 패턴으로의 수렴율과 평균 상기 능력 확률이 표 2와 그림 1에 각각 보여진다.

표 1 예제에 대한 가중 행렬 W
Table 1 The weight matrix W for the example

0.000	-0.117	-0.164	0.024	-0.078	0.087	-0.086	0.171	0.124	-0.170
-0.117	0.000	0.087	-0.103	-0.101	0.101	-0.082	-0.127	-0.156	0.073
-0.164	0.087	0.000	0.150	0.074	-0.052	-0.085	-0.165	-0.162	-0.123
0.024	-0.103	0.150	0.000	0.101	-0.049	0.080	0.145	-0.170	-0.145
-0.078	-0.101	0.074	0.101	0.000	0.051	-0.101	0.101	0.101	-0.050
0.087	0.101	-0.052	-0.049	0.051	0.000	-0.101	0.013	-0.101	-0.078
-0.086	-0.082	-0.085	0.080	-0.101	-0.101	0.000	0.114	-0.054	0.104
0.171	-0.127	-0.165	0.145	0.101	0.013	0.114	0.000	-0.119	-0.088
0.124	-0.156	-0.162	-0.170	0.101	-0.101	-0.054	-0.119	0.000	0.134
-0.170	0.073	-0.123	-0.145	-0.050	-0.078	0.104	-0.088	0.134	0.000

표 2 예제에 대해 설계된 GBSB의 올바른 패턴으로의 수렴율
 Table 2 Convergence rates to correct patterns of the GBSBs designed for the example

	올바른 패턴으로의 수렴율(%)
[7] 방법	13.6
제안된 방법	92.7

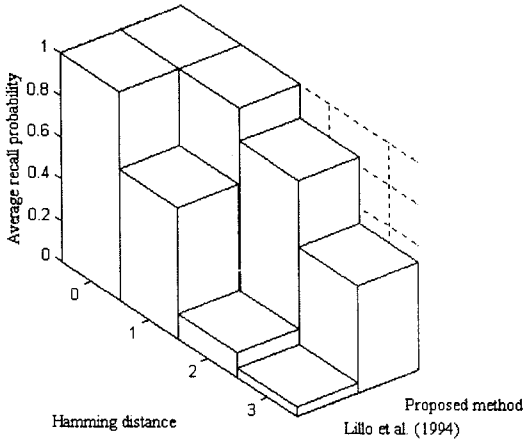


그림 1 예제에 대해 설계된 GBSB의 평균 상기 능력 확률
 Fig. 1 Average recall probabilities of the GBSBs designed for the example

위의 설계 예제에서의 성능 비교는 제안된 메모리가 일반적으로 더 높은 평균 상기 능력 확률, 올바른 패턴으로의 더 높은 수렴율, 그리고 최근에 개발된 설계 방법에 의해서 설계된 메모리보다 더 적은 의사 상태들의 갯수를 갖는다는 것을 보여준다.

5. 결 론

본 논문에서, 우리는 최적 성능을 가지고 주어진 원형 패턴들을 저장할 수 있는 GBSB 신경망의 매개 변수들을 발견하는 문제를 고려하였다. GBSB 모델의 알려진 정성적 특성과 새롭게 유도된 중요한 특성에 기초를 두어, 문제가 비선형 제약 조건을 갖는 최적화 문제로 공식화되었다. 그리고 이 문제는 GEVP (generalized eigenvalue problem)라고 불리는 quasi-convex 최적화 문제로 변환되었다. GEVP는 최근에 개발된 interior point 방법들에 의해 효율적으로 풀릴 수 있기 때문에, 이러한 변환은 매우 실질적인 가치를 지닌다. 제안된 방법을 예증하고 기존의 방법과의 비교를 위해서 설계 예제가 제시되었다. 모의실험 결과는 제안된 방법에 의해 얻어진 메모리가 기존의 방법에 의해 설계된 메모리보다 더 좋은 성능을 갖음을 보여 주었다.

(참 고 문 헌)

[1] J.A. Anderson, J.W. Silverstein, S.A. Ritz and R.S. Jones, "Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model", *Psychological Review*, Vol.84, pp.413-451, 1977.

[2] S. Boyd, L. ElGhaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15 (SIAM, Philadelphia, 1994).

[3] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub, and M. Chilali, "LMI Control Toolbox", The Mathworks Inc., Natick, MA, 1995.

[4] R.M. Golden, "Stability and optimization analyses of the generalized brain-state-in-a-box neural network model", *Journal of Mathematical Psychology*, Vol.37, pp.282-298, 1993.

[5] M.H. Hassoun, (ed.) "Associative Neural Memories: Theory and Implementation", Oxford University Press, Oxford, UK, 1993.

[6] S. Hui and S.H. Zak, "Dynamical analysis of the brain-state-in-a-box (BSB) neural models", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol.3, pp.86-100, 1992.

[7] W.E. Lillo, D.C. Miller, S. Hui, and S.H. Zak, "Synthesis of brain-state-in-a-box(BSB) based associative memories", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol.5, pp.730-737, 1994.

[8] A.N. Michel and J.A. Farrell, "Associative memories via artificial neural networks", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.10, pp.6-17, 1990.

[9] R. Perfetti, "A synthesis procedure for brain-state-in-a-box neural networks", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol.6, pp.1071-1080, 1995.

[10] L. Vandenberghe and V. Balakrishnan, "Algorithms and software for LMI problems in control", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.17, pp.89-95, 1997.