1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템의 최적 퍼지 제어

박 연 묵*, 박 주 영**
*고려대학교 대학원 정보공학과 제어계측전공
**고려대학교 제어계측공학과

Optimal Fuzzy Control of Nonlinear Systems Described by Takagi-Sugeno Fuzzy Model

Yonmook Park*, Jooyoung Park**
*Department of Information Engineering, Graduate School, Korea University.
**Department of Control and Instrumentation Engineering, Korea University.

Abstract - 본 논문은 TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템의 최적 퍼지 제어에 관한 새로운 설계 방법론을 제시하며, 최적 TS 퍼지 제어기의 매개 변수들을 설정하는 문제가 선형 행렬 부등식 문제로 표현될 수 있음을 보인다.

1. 서 론

최근에 퍼지 제어기의 안정화를 위한 체계적인 설계에 관련된 연구들이 진행되어 왔다[1]-[3]. 안정화와 최적화는 어떤 제어 시스템에 대한 제어기 설계에 있어서도 가장 중요한 관심 사항들이다. 그러나, 퍼지 제어 분야에 있어서는, 최적 안정화 제어기 설계가 거의 논의되지 않았다. 본 논문에서 우리는 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템에 대해 최적 안정화 TS 퍼지 제어기를 야기하는 새로운 설계 절차를 개발한다. TS 퍼지 모델에서, 전체 시스템은 퍼지 IF-THEN 규칙들로 기술되는데, 이 모델의 각각은 다른 상태 공간 영역에서 국소 선형 상태 방정식 $\dot{\mathbf{x}}=A_i\,\mathbf{x}+B_i\,\mathbf{u}$ 를 표현한다[4]. 우리는 "역최적설계(inverse optimal design)"방식에 기초하여, 최적값 함수와 가중 함수에 대해 간단하면서도 명료한 선택을 조사하고, TS 퍼지 제어기 형태인 최적 안정화 제어기를 얻을 수 있음을 보인다. 또한, 최적 TS 퍼지 제어기의 매개 변수들을 설정하는 문제가 선형 행렬 부등식 문제로 표현될 수 있음을 보인다. 선형 행렬 부등식을 갖는 제어기 설계 문제의 형식화는 신뢰성 있고 효율적인 convex 최적화 기법[5](예로써, Matlab LMI Control Toolbox[6])에 의해 풀릴 수 있기 때문에 매우 실질적인 가치를 지닌다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다: 2장에서는 TS 퍼지 모델, TS 퍼지 제어, 그리고 역 최적 제어기 설계에 대하여 간단히 소개한다. 3장에서는 "최적 안정화 제어(optimal stabilizing control)"개념에 기초를 둔 TS 퍼지 제어기 설계 절차를 제시하고, 마지막으로 4장에서 결론을 내린다.

2. 기초이론: TS 퍼지 모델, TS 퍼지 제어, 역 최적 설계

2.1 TS 퍼지 모델

Takagi와 Sugeno에 의해 제안된 퍼지 모델은 비선형 시스템의 국소 선형 입출력 관계를 표현하는 퍼지 IF-THEN 규칙들로 표현된다[4]. 본 논문에서는 연속 TS 퍼지 시스템을 고려하며, 이것의 TS 퍼지 모델의 IF-THEN 규칙은 다음과 같은 형식으로 주어진다:

Plant 규칙 i :
IF $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_g(t)$ is M_{ig},
THEN

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A_i\,\mathbf{x}(t)+B_i\,\mathbf{u}(t),\quad i=1,\cdots,r. \tag{1}$$

여기서 $z_i(t)$ 와 M_{ij}, $i=1,\cdots,r$, $j=1,\cdots,g$ 은 각각 전제부 변수와 퍼지 집합이고 r 은 IF-THEN 규칙의 개수이다. $\mathbf{u}(t)\in\mathrm{R}^p$ 와 $\mathbf{x}(t)\in\mathrm{R}^n$ 는 각각 입력 벡터 및 상태 벡터이며, $A_i\in\mathrm{R}^{n\times n}$, $B_i\in\mathrm{R}^{n\times p}$ 이다. TS 퍼지 모델의 일반적인 추론 방법에 의하면, 시간 t 에서의 상태 방정식은 궤적 $\mathbf{z}(t)\in\mathrm{R}^g$ 에 따른 가중 평균의 형태로 시간 t 에서의 $\mathbf{x}(t)$ 와 $\mathbf{u}(t)$ 의 함수로 표현된다:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))\{A_i\,\mathbf{x}(t)+B_i\,\mathbf{u}(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))}. \tag{2}$$

방정식 (2)에서 하중 함수(weight functions)는 다음과 같이 정의된다:

$$w_i(\mathbf{z}(t))=\prod_{j=1}^{g} M_{ij}(z_j(t)).$$

여기서 $M_{ij}(z_j(t))$ 은 퍼지 집합 M_{ij} 에서 $z_j(t)$ 의 소속 정도이다. 음이 아닌 측정 가능한 하중 함수 w_i 은 일반적으로 다음을 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))>0,\quad \forall t>0. \tag{3}$$

본 논문에서는 (3)이 항상 만족되는 것과 벡터 $\mathbf{x}(t)$ 와 $\mathbf{z}(t)$ 이 실시간으로 측정 가능함을 가정한다. 하중 함수를 $h_i(\mathbf{z}(t))\triangleq w_i(\mathbf{z}(t))/\sum_{i=1}^{r} w_i(\mathbf{z}(t))$ 로 정규화하면 상태 방정식 (2)는 polytopic 형식으로 쓰여질 수 있다:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))\{A_i\,\mathbf{x}(t)+B_i\,\mathbf{u}(t)\} \tag{4}$$

여기서 정규화된 하중 함수 h_i 는 $h_i(\mathbf{z}(t))>0$, $i=1,\ldots,r$ 과 $\sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))=1$, $\forall t\geq 0$ 을 만족한다.

2.2 TS 퍼지 제어

벡터 $\mathbf{x}(t)$ 와 $\mathbf{z}(t)$ 가 실시간으로 측정 가능함을 가정했으므로, TS 퍼지 모델 (1)에 대한 TS 퍼지 제어기는 다음과 같은 퍼지 IF-THEN 관계들로 주어진다:

제어기 규칙 i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_g(t)$ is M_{ig},

THEN

$$\mathbf{u}(t) = -K_i\,\mathbf{x}(t), \quad i=1,\cdots,r.$$

TS 퍼지 제어기는 TS 퍼지 모델 (1)과 동일한 퍼지 집합을 공유함에 유의하자. $\mathbf{z}(t)$가 $\mathbf{u}(t)$에 종속되지 않음을 가정하고, 일반적인 추론 방법은 다음과 같은 TS 퍼지 제어기를 야기한다[1]:

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{z}(t))K_i\,\mathbf{x}(t). \tag{5}$$

여기서 h_i는 (4)에서 정의한 것과 같다. (5)의 매개 변수들 K_i는 안정도와 성능 요건들을 만족하도록 선택되어져야 한다.

2.3 역 최적 설계

다음으로, 비선형 제어 시스템에 대한 역 최적 설계를 간단히 소개한다. 최적 제어 이론에서 가장 중요한 문제 중 하나는 (6)과 같은 일반적인 비선형 동적 시스템에 대해서

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\,\mathbf{u} \tag{6}$$

다음과 같은 특성들을 갖는 궤환 제어 법칙 $\mathbf{u}$를 찾는 것이다:

- $\mathbf{u}$가 평형점 $\mathbf{x}=0$의 점근적 안정을 달성한다.

- $\mathbf{u}$가 다음과 같은 비용 함수를 최소화한다.

$$J = \int_0^\infty (l(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T R(\mathbf{x})\,\mathbf{u})dt, \tag{7}$$

여기서, $l(\mathbf{x})>0$이고 $R(\mathbf{x}) = R^T(\mathbf{x})>0$, $\forall\,\mathbf{x}$이다. J가 최소값일 때, $J(\mathbf{x})$는 최적값 함수(optimal value function)라고 불린다. 다음 보조 정리에서 보이는 바와 같이, 이 문제는 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)방정식을 고려함으로써 풀릴 수 있다.

보조 정리 1: HJB 방정식

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}) + L_fV(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}(L_gV(\mathbf{x})) \\ R^{-1}(\mathbf{x})(L_gV(\mathbf{x}))^T = 0, \\ V(0) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

을 만족하는 C^1에 속하는 양의 정부호 함수 $V(\mathbf{x})$가 존재하고, 궤환 제어

$$\mathbf{u}^* = -\frac{1}{2}R^{-1}(\mathbf{x})(L_gV(\mathbf{x}))^T \tag{9}$$

가 시스템 (6)에 대해 평형점 $\mathbf{x}=0$의 점근적 안정을 달성한다고 가정하자. 그러면 $\mathbf{u}^*$는 $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=0$를 보장하는 전체 $\mathbf{u}$에 대해 비용 함수 (7)을 최소화하는 최적 안정화 제어이다.

HJB 방정식을 푸는 것은 일반적으로 쉬운 작업이 아니다. 그러나, 만약 설계자가 함수 $l(\mathbf{x})$를 나중에 선택한다면 최적화 문제를 더욱 쉽게 풀 수 있는데, 이것을 역 최적 접근법(inverse optimal approach)이라고 부른다. 만약 $\mathbf{u}$가 다음과 같이 표현되면

$$\mathbf{u}^* \triangleq -k(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}R^{-1}(\mathbf{x})(L_gV(\mathbf{x}))^T,\ R(\mathbf{x})>0,$$

안정화 제어 $\mathbf{u}$는 시스템 (6)에 대해 역 최적 문제를 풀 수 있는데, 여기서 $V(\mathbf{x})$는 양의 정부호 함수로 $\dot{V}(\mathbf{x})$의 음의 정부호가 제어 $\mathbf{u} = -k(\mathbf{x})/2$를 가지고 달성된다. 즉,

$$\dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{u}^*} = L_fV(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))k(\mathbf{x}) < 0. \tag{10}$$

만약 함수 $l(\mathbf{x})$가 (10)의 오른쪽의 음부호가 되게 잡으면, 즉,

$$l(\mathbf{x}) := -L_fV(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))k(\mathbf{x}) > 0$$

$V(\mathbf{x})$는 HJB 방정식 (8)의 해가 된다. 더욱이, (10)의 결과로써 다음을 보장 할 수 있다:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} &= L_fV(\mathbf{x}) + (L_gV(\mathbf{x}))\,\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \\ &= \dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{u}^*} \\ &\quad + \frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))\,\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \\ &< \frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))\,\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}L_gV(\mathbf{x})\left\{-\frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))^T\right\} \\ &= -\frac{1}{4}L_gV(\mathbf{x})(L_gV(\mathbf{x}))^T \\ &= -\frac{1}{4}\|L_gV(\mathbf{x})\|^2 < 0. \end{aligned}$$

따라서, 우리는 다음을 얻는다.

보조 정리 2: 만약 제어 법칙 $\mathbf{u}^*$가 시스템 (6)에 대해서 다음을 만족하면, 역 최적 전역 안정화 제어 법칙(inverse optimal globally stabilizing control law)이 된다.

- $\mathbf{u}^*$가 시스템 (6)에 대해 $\mathbf{x}=0$의 전역 점근적 안정을 달성하고,

- $\mathbf{u}^*$가 다음과 같은 형태를 띤다.

$$\mathbf{u}^* \triangleq -k(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}R^{-1}(\mathbf{x})(L_gV(\mathbf{x}))^T, \tag{11}$$

여기서 $V(\mathbf{x})$는 방사상으로 유계되지 않은 양의 정부호 함수(radially unbounded positive definite function)로 다음을 만족한다.

$$\dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{u}^*} \triangleq L_fV(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))\,\mathbf{u}^* < 0.$$

3. 역 최적 접근법에 기초한 TS 퍼지 제어기 설계

본 논문의 주요 착상은 매우 명료하다. 먼저, 상태 방정식 (2)는 다음과 같이 표현됨에 유의하자:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))\{A_i\mathbf{x}(t)+B_i\mathbf{u}(t)\}. \quad (12)$$

$f(\mathbf{x})\triangleq\sum_{i=1}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))A_i\mathbf{x}(t)$와 $g(\mathbf{x})\triangleq\sum_{i=1}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))B_i$를 가지고, (2)는 정규 형태(canonical form)(6)에 의해 표현되는 비선형 시스템의 한 예라 할 수 있다. 따라서, 보조 정리 2는 역 최적 전역 안정화 제어기 $\mathbf{u}^*$를 얻는데 사용될 수 있다. 방정식 (11)로부터 이끌어 낼 수 있는 주목할 만한 관찰은 $V(\mathbf{x})$와 $R(\mathbf{x})$에 대해 어떤 간단한 선택으로 $\mathbf{u}^*$가 TS 퍼지 제어기로 변형될 수 있다는 것이다.

더욱 세부적으로, $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TP\mathbf{x}$, $P=P^T>0$으로 정의되는 양의 정부호 최적값 함수 $V(\mathbf{x})$를 고려하자. 만약 가중 함수 $R(\mathbf{x})$를 $\mathbf{I}$로 잡으면, 제어기 $\mathbf{u}^*$ (11)는

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^* &= -\frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))^T=-\frac{1}{2}[L_g(\mathbf{x}^TP\mathbf{x})]^T\\ &= -\frac{1}{2}[2\mathbf{x}^TP(\sum_{i=1}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))B_i)]^T \quad (13)\\ &= -\sum_{i=1}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))B_i^TP\mathbf{x},\end{aligned}$$

와 같은 TS 퍼지 제어기 형태로 변형 될 수 있다. 보조 정리 2에 의해서 만약 다음 조건들 (14)이 성립한다면 TS 퍼지 제어기 $\mathbf{u}^*$ (13)는 TS 퍼지 시스템 (12)에 대해 역 최적 전역 안정화 제어 법칙이 되는 성질을 갖는다.

$$\begin{cases}\cdot\ P>0\\ \cdot\ \dot{V}(\mathbf{x})|_{\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{u}^*}\\ \quad = L_fV(\mathbf{x})+\frac{1}{2}(L_gV(\mathbf{x}))\mathbf{u}^* \quad (14)\\ \quad = \mathbf{x}^T\Big[\sum_{i=1}^{r}h_i^2(\mathbf{z}(t))(G_{ii}^TP+PG_{ii})\\ \quad\quad +\sum_{i<j}^{r}2h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))\\ \quad\quad \Big\{\Big(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\Big)^TP+P\Big(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\Big)\Big\}\Big]\mathbf{x}<0,\end{cases}$$

여기서 $G_{ij}\triangleq A_i-B_iB_j^TP/2=A_i-B_iK_j/2$이다. 정규화된 하중 함수 h_i는

$$h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))\geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))=1,$$

과

$$\sum_{i=1}^{r}h_i^2(\mathbf{z}(t))+2\sum_{i<j}^{r}h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))=1,$$

을 만족하므로, 제어기 설계는 정점들 " $(G_{ij}+G_{ji})/2$와 G_{ii}"를 이용한 안정도 판별을 가지고 시도될 수 있다 [1]. 즉,

$$\begin{cases}X=P^{-1}>0,\quad G_{ii}X+XG_{ii}^T<0,\\ \quad\quad i=1,2,\dots,r,\\ \Big(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\Big)X+X\Big(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\Big)^T<0,\\ \quad\quad 1\leq i<j\leq r.\end{cases} \quad (15)$$

(15)에서 보여지는 바와 같이, 역 최적 전역 안정화 TS 퍼지 제어기의 매개 변수들을 구하는 것은 LMI 문제로 표현될 수 있다. 선형 행렬 부등식을 갖는 제어기 설계 문제의 형식화는 신뢰성 있고 효율적인 convex 최적화 기법[5](예로써, Matlab LMI Control Toolbox [6])에 의해 풀릴 수 있기 때문에 매우 실질적인 가치를 지닌다.

4. 결 론

본 논문에서, TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템의 최적 퍼지 제어에 대한 새로운 설계 방법론이 제시되었다. 제시된 최적 TS 퍼지 제어기의 도출은 최적 제어 이론[7]을 이용하였다. 개발된 설계 절차는 본질적으로 LMI 가능성(feasibility) 문제에 기초를 두므로, LMI Control Toolbox 환경이 문제를 푸는데 효율적으로 사용된다. 추후 연구 과제로는, 새로 개발된 방법론의 확장과 상세한 성능 비교를 들 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] H.O. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.4, pp.14-23, 1996.

[2] K. Tanaka, T. Ikeda and H.O. Wang, "An LMI approach to fuzzy controller designs based on relaxed stability conditions", Proceedings of FUZZ-IEEE'97, pp.171-176, 1997.

[3] K. Tanaka, T. Ikeda and H.O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.6, pp.250-264, 1998.

[4] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Transactions on systems, Man and cybernetics, Vol.15, pp.116-132, 1985.

[5] S. Boyd, L. Elghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in systems and Control Theory", SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15 (SIAM, Philadelphia, 1994).

[6] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub and M. Chilali, "LMI Control Toolbox", The MathWorks Inc., Natick, MA, 1995.

[7] R. Sepulchre, M. Jankovic and P.V. Kokotovic, "Constructive nonlinear control", Springer, Verlag London, 1997.