

# 2차원 자유표면 점성 유동 계산 코드 개발에 관한 연구

## Code Development for Analysis of 2D Viscous Flow with Free Surface

허 준성\*<sup>1</sup>, 사 종엽\*<sup>2</sup>

J.S. Huh and J.-Y. Sah

A computer code has been developed for the analysis of 2D viscous flow with free surface. VOF method and higher order upwind scheme have been employed for the accurate prediction of free surface motion. Surface tension effect and axisymmetric flow can be computed by the present code.

### 1. 서론

자유표면을 포함하는 유동은 많은 공학 분야에서 발생하는 일반적인 현상이나 경계면이 이동하면서 변형되므로 엄밀해를 얻는데 많은 제약조건이 수반된다. 자유표면 유동을 수치적으로 계산하기 위해서는, 속도와 압력 외에도 시간에 따라 변화하는 자유표면의 위치를 계산할 수 있는 부가적인 방법이 필요하며 또한 자유표면상의 경계조건을 처리할 수 있어야 한다. 수치해석 기법으로는 fixed grid를 사용하는 MAC(Marker And Cell) 방법[1]과 VOF(Fraction Volume of Fluid) 방법[2] 그리고 moving grid 방법[3]이 있다.

현재 자유표면 유동 계산에 널리 사용되고 있는 VOF(Volume of Fluid) 방법은 고정격자 계내에 설정된 유체의 점유체적비(Volume Fraction, C)에 의해 자유표면의 변화를 계산한다. 이 방법은 큰 변형과 자유표면간의 교차가 있는 유동도 계산할 수 있는, 간단하고 강한 해석방법으로 알려져 있다.

본 연구에서는 자유표면이 있는 2차원 점성 유동을 계산하기 위한 컴퓨터 프로그램을 개발하였다. 자유표면의 계산은 VOF 방법을 사용하였으며, 고차 대류항 모델을 적용하였다. VOF 방법의 정밀도를 높이기 위해 표면장력, 유속보정법(FCT)[4]을 기존 알고리즘에 새로이 추가하거나 변경하였으며 2차원 혹은 축대칭 유동을 선택하여 계산할 수 있도록 하였다. 또한 전처리, 후처리 과정을 포함시켜 격자의 생성과 유동 계산 그리고 결과의 가시화가 유기적으로 연결된 실용적인 프로그램이 되도록 하였다.

\*<sup>1</sup> 영남대학교 기계공학부 대학원

\*<sup>2</sup> 영남대학교 기계공학과 (712-749, 경북 경산시 대동 214-1, Tel. 053-810-2574)

## 2. 수치 계산

### 2.1 속도와 압력의 계산

비압축성 점성유동의 속도와 압력을 계산하기 위한 지배방정식은 다음과 같다.

연속방정식 (continuity equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\xi u}{x} = 0 \quad (1)$$

운동량 방정식 (momentum equation)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \xi \left( \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2} \right) \right] + g_x + f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\xi}{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + g_y + f_y \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $\nu$ 는 동점성 계수,  $g_x$ 와  $g_y$ 는 중력 가속도의 성분,  $f_x$ 와  $f_y$ 는 표면 장력의 성분이다.  $\xi$ 는 좌표계를 선택하기 위하여 추가된 변수로  $\xi$ 가 0이면 직교좌표계이고  $\xi$ 가 1이면 원통좌표계에 대한 연속방정식을 의미한다.

수치기법은 Predictor-Correct 방법[5]을 시간 항에 대해 Implicit하게 계산하였다.

(1) explicit 방법에 의한 초기값 계산

$$\frac{U^{n+1(0)} - U^n}{\Delta t} = -CON^n + DIF^n + SRC^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^n \quad (3)$$

(2) 반복횟수 k에 대하여

(2-1) 예측 속도 얻기 (  $U^{*(k)}$  )

$$\frac{U^{*(k)} - U^n}{\Delta t} = -CON^{n+1/2(k)} + DIF^{n+1/2} + SRC^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^{(k-1)} \quad (4)$$

(2-2) 압력 Poisson 방정식 계산 (  $p'$  )

$$\nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p' \right) = \nabla \cdot U^{*(k)} \quad (5)$$

(2-3) 압력의 수정 (  $p^{n+1(k)}$  )

$$p^{n+1(k)} = p^{n+1(k-1)} + p' \quad (6)$$

(2-4) 속도의 수정 (  $U^{n+1(k)}$  )

$$\frac{U^{n+1(k)} - U^{*(k)}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (7)$$

(3) Volume Fraction의 계산

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot ( U^{n+1/2(k)} C ) = 0 \quad (8)$$

여기서  $n$ 은 시간,  $*$ 는 예측값,  $k$ 는 반복 횟수,  $CON$ 은 대류항,  $DIF$ 은 확산항,  $SRC$ 은 소스항이다.

### 2.2 자유표면의 계산

계산된 속도와 압력으로 자유표면의 거동을 계산한다. volume fraction은 mass conservation에 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (UC) = 0 \quad (9)$$

식(9)를 차분하면 다음과 같다.

$$(C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n) V_{ij} = f_{i-\frac{1}{2},j} - f_{i+\frac{1}{2},j} + f_{i,j-\frac{1}{2}} - f_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$f_{i-\frac{1}{2},j} = \int \int C_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-\frac{1}{2},j} dA dt \quad (11)$$

여기서  $C$ 는 Volume Fraction,  $V$ 는 셀의 체적,  $A$ 는 셀 경계면의 면적,  $t$ 는 시간이다.

VOF 방법에서 플럭스  $f$ 는 Doner-Acceptor 방법에 의해 계산되며 상류차분과 하류차분을 조합하여 불합리한 해의 발생을 막고 자유표면에서의 인공적인 확산을 최소화한다. Doner-Acceptor 방법은 유동방향과 자유표면이 수평에 가까울 경우 상류차분이, 자유표면이 유동방향과 수직일 경우 하류차분이 정밀도가 높으므로 플럭스는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \arccos(n_k), \quad n = \nabla^h C / |\nabla^h C| \\ f^* &= f^D \quad (\text{downwind}) \quad (:\theta(x) < \theta^c) \\ f^* &= f^U \quad (\text{upwind}) \quad (:\theta(x) \geq \theta^c) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $n_k$ 는 경계의 normal 벡터이고,  $\theta^c$ 는  $1.0 < \theta^c < 1.05$ 의 값[6]을 사용한다.

하류차분에서 발생하는 불합리한 해를 막기 위해 본 연구에서는 제한조건이 부가된 Lafaurie [6]의 수정 하류차분을 사용하였다.

$$f_{i-\frac{1}{2},j}^{MD} = P \cdot \max[ f_{i-\frac{1}{2},j}, |Q_{i-\frac{1}{2},j} - (1 - C_{i-\frac{1}{2}-\frac{P}{2},j}) V_{i-\frac{1}{2}-\frac{P}{2}}| ] \quad (13)$$

여기서  $f_{i-\frac{1}{2},j} = \min[ |Q_{i-\frac{1}{2},j} C_{i-\frac{1}{2}+\frac{P}{2},j}|, C_{i-\frac{1}{2}-\frac{P}{2},j} V_{i-\frac{1}{2}-\frac{P}{2}} ]$ .

위 식에서 기본 계산은 하류차분에 의해 수행되며 Acceptor에 유입될 수 있는 유체량과 Doner가 현재 보유하고 있는 유체량을 비교하여 물리적으로 부적절한 상황을 제한한다.

### 2.3 FCT (Flux Correct Transport)

Volume Fraction 방정식에서 안정적인 대류계산을 위해 Murray [7]등이 FCT [4] 방법을 연제시켰다. low-order의 대류계산 방법은 자유표면의 경계를 모호하게 만들고 두 유체간의 강제적인 혼합을 발생시키며 high-order 방법의 경우에도 계산과정에서 overshoot나 undershoot가 발생할 수 있다. FCT 방법은 Zalesak's에 의해 개발되었으며 high-order 방법과 low-order 방법으로 계산된 값을 가중치로 연결하여 해의 진동과 수치적 확산을 막아 주는 계산방법이다. Volume Fractoin에 FCT 방법을 적용하기 위해 low-order 방법은 상류차분을 사용하며 high-order 방법은 식(12)에서 계산된 수정 하류차분값을 사용한다.

(1)  $f_{i-\frac{1}{2},j}^L$ ,  $f_{i,j-\frac{1}{2}}^L$ ,  $f_{i-\frac{1}{2},j}^H$ ,  $f_{i,j-\frac{1}{2}}^H$ 의 계산

$$f_{i-\frac{1}{2},j}^L = f_{i-\frac{1}{2},j}^U = Q_{i-\frac{1}{2},j} C_{i-\frac{1}{2}-\frac{P}{2},j}, \quad f_{i-\frac{1}{2},j}^H = f_{i-\frac{1}{2},j}^* \quad (14)$$

(2) low order scheme에 의한 영역변수의 갱신

$$C_{i,j}^{td(k+1)} = C_{i,j}^{n+1(k)} \quad (15)$$

(3) antidiffuse flux의 정의

$$f_{i-\frac{1}{2},j}^{ad(0)} = f_{i-\frac{1}{2},j}^H - f_{i-\frac{1}{2},j}^L \quad (16)$$

$$f_{i-\frac{1}{2},j}^{ad(k+1)} = (1 - \beta_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}) f_{i-\frac{1}{2},j}^{ad(k)}, \quad f_{i,j-\frac{1}{2}}^{ad(k+1)} = (1 - \beta_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}) f_{i,j-\frac{1}{2}}^{ad(k)}$$

(4) antidiffuse flux의 한계값 계산

$$f_{i-\frac{1}{2},j}^{c(k+1)} = \beta_{i-\frac{1}{2},j}^{(k+1)} f_{i-\frac{1}{2},j}^{ad(k+1)}, \quad f_{i,j-\frac{1}{2}}^{c(k+1)} = \beta_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k+1)} f_{i,j-\frac{1}{2}}^{ad(k+1)} \quad (17)$$

(5) 제한된 antidiffuse flux로 영역변수의 계산

$$C_{i,j}^{n+1(k+1)} = C_{i,j}^{ad(k+1)} + \frac{f_{i-\frac{1}{2},j}^{c(k+1)} - f_{i+\frac{1}{2},j}^{c(k+1)} + f_{i,j-\frac{1}{2}}^{c(k+1)} - f_{i,j+\frac{1}{2}}^{c(k+1)}}{V_{i,j}} \quad (18)$$

## 2.4 표면 장력 (surface tension)

표면 장력의 계산은 CSF (continuum surface force) 모델을 사용하였다. 이 방법은 Brackbill [8]이 제안한 방법으로 Ripple 프로그램[9]과 Murray[7]에 의해 성공적으로 검증되었다. 자유표면이 위치하는 셀은 표면 장력의 영향을 받으며 다음과 같이 정의된다.

$$F_{i,j} = \frac{1}{\rho_{i,j}} \sigma_{i,j} x_{i,j} \mathbf{n}_{i,j} \quad (19)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $\sigma$ 는 표면 장력,  $x$ 는 곡률,  $\mathbf{n}$ 는 자유표면의 수직 벡터이다.

$$\begin{aligned} x &= -\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left[ \frac{n_x}{|\mathbf{n}|} \left( \frac{\partial |\mathbf{n}|}{\partial x} \right) + \frac{n_y}{|\mathbf{n}|} \left( \frac{\partial |\mathbf{n}|}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

자유표면의 노말 벡터는 다음과 같이 B-Spline 곡선으로 보간하여 계산의 정밀도를 높이게 된다.

$$\mathbf{n} = (K_x * C, K_y * C) \quad (21)$$

여기서  $K_x = \frac{\partial K}{\partial x}$ ,  $K_y = \frac{\partial K}{\partial y}$ 이다.

$K$ 는 cubic B-spline에 의한 smoothing kernel이다.

$$K(r, h) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} \frac{40}{7\pi} (1 - 6(\frac{r}{h})^2 + 6(\frac{r}{h})^3) & \text{if } \frac{r}{h} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{h^2} \frac{80}{7\pi} (1 - \frac{r}{h})^3 & \text{if } \frac{r}{h} < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

여기서  $h$ 는 smoothing length,  $r$ 는 cell center에서 interface까지의 거리이다.

## 3. 전처리, 후처리

전처리 과정에서 격자간의 간격이 일정하지 않은 nonuniform 정렬 격자를 구성할 수 있으며 또한 GUI에 의한 초기 조건과 경계조건 그리고 물성치를 입력할 수 있다. 후처리 과정은 계산된 결과를 그래픽을 이용하여 가시화시켜주는 기능으로 속도의 벡터 출력, 압력의 등고선 출력, 자유표면의 경계선 출력등을 지원한다. 그리고 자유표면 유동은 비정상 문제 (unsteady problem) 이므로 시간 경과에 따른 해의 변화를 관찰할 수 있는 animation 기능을 지원한다.

## 4. 계산 결과

Fig. 1은 갑자기 회전하는 실린더내의 섞이지 않는 2가지 유체의 거동을 계산한 것이다. 좌표는 축대칭 좌표를 사용하였으며 격자의 개수는  $52 \times 102$ , 두 유체의 밀도비가 0.7465, 점성비가 0.134로 주어졌다. Ekman number는  $E = \mu_1 / \rho_1 \Omega h^2 = 1.33 \times 10^{-3}$  이다. 시간 증가

는 0.02로 하였으며 Fig 1은 시간 2, 6, 10, 14, 18에 대해 결과이다. 기존의 계산결과[5][10]와 비교하였을 때 전체적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

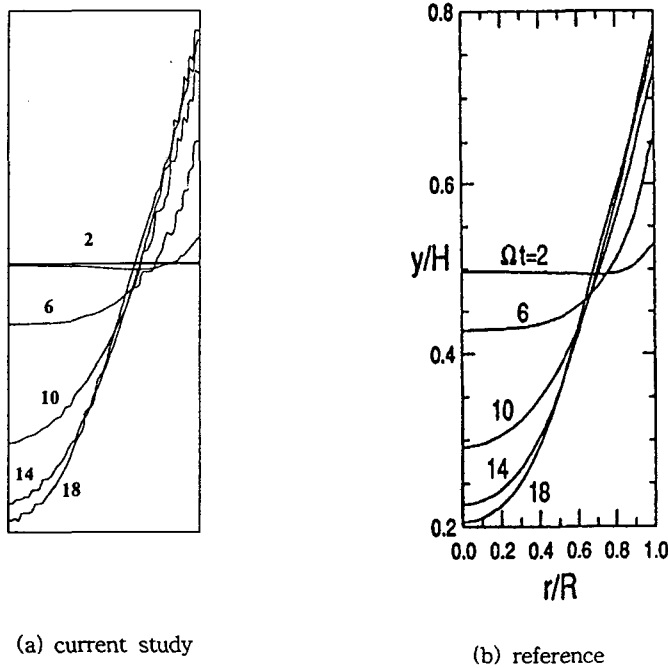


Fig1. Result of spin-up

## 5. 결론

공업분야의 해석이나 예측에 자주 등장하는, 자유표면이 존재하는 유동장은 수치적 방법이 매우 복잡하다. 본 연구에서는 자유표면 유동을 계산하는 VOF 방법을 FVM(finite volume method) 해석코드로 개발하였다. 본 연구를 통해 개발된 프로그램은 해석영역의 격자를 생성하고 경계조건 및 초기조건을 입력하는 전처리 부분과 VOF-FCT 방법에 의해 자유표면 유동을 해석하는 Solver 그리고 계산결과를 가시화하여 해석결과의 물리적 의미를 분석할 수 있는 후처리 부분이 유기적으로 연결된 하나의 독립적인 프로그램이다.

전처리와 후처리는 GUI (graphic user interface)를 지원함으로써 실용적인 코드가 되도록 하였으며 VOF-FCT Solver의 경우에는 선택적 풍향차분과 FCT 방법의 연계를 통해 Volume-Fraction 계산에서 발생하는 수치오차를 줄여 자유표면 계산의 정밀도를 높였다.

## 6. 참고문헌

1. Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", Phys. Fluids., Vol.8, No.12, 1965, pp.2182-2189
2. Nichols, B.D. and Hirt, C.W., "VOF method for the dynamics of free boundaries", J.

of Computational Physics, Vol.39, 1981, pp.201-225

3. Wei Shyy, "Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries", Taylor & Francis, 1996, pp. 1-133
4. Zalesak,S.T."Fully Multi-Dimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids", J.Comput.Phys., Vol.31, 1979, pp.335-362
5. Hosang K, and Kunio, K, "A VOF-FCT Method for Simulation Two-Phase Flows of Immiscible Fluids", The Institute of Space and Astronautical Science Report, No.662, 1996, pp.1-22
6. Lafaurie,B, "Modeling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with Suffer", J.Comput.Phys., Vol.113, 1994, pp.134-147
7. Murray R, "Volume-Tracking Method for Interfacial Flow Calculations", Int.J.for numerical methods in fluids, Vol.24, 1997, pp.671-691
8. Brackbill, J.U.,Kothe, "A Continuum method for Modelling Surface Tension", J.Comput.Phys., Vol.100, 1992, pp.335-354
9. Douglas B.Kothe, "RIPPLE:A Computer Program for Incompressible Flows with Free Surfaces",  
Los Almos National Laboratory, 1991, pp.26-32
10. Abdullah, Z. and Sacudean, M., "Free surface flow during the filling of a cylinder", Int.J.for numerical methods in fluids, Vol.11, 1990, pp.151-168