

2차원 비정렬 격자를 이용한 전도 및 대류 열전달 계산 코드 개발

Code Development for Conductive/Convective Heat Transfer on 2D Unstructured Mesh

채 은미*¹, 사 증엽*²

E.M. Chae and J.-Y. Sah

A computer code has been developed for an analysis of conduction and convection heat transfer on a personal computer. FVM based on unstructured mesh has been employed for triangular and quadrilateral element. All variable of p , u , v , T , κ and ε has been defined on a node (not on a center of element). The code possesses the pre- and post-processor for itself to provide user-friendly interface.

1. 서 론

비정렬 격자에 관한 연구는 최근 컴퓨터 성능의 발전과 더불어 복잡한 실제 유동을 해석하기 위한 목적으로 활발하게 진행되고 있는 추세이다. 이러한 비정렬 격자에 관한 연구에서 부딪히는 어려운 문제들은 복잡한 형상에 대한 효율적 격자생성, 정점 혹은 요소에 대한 변수 정의에 따른 경계조건 및 이산화 과정, 난류모델링의 적용 등이다. 본 연구에서는 복잡한 형상을 쉽게 입력할 수 있는 형상 입력 장치를 개발하고 어떠한 형상에 대하여서도 양질의 삼각형 격자를 안전하게 자동으로 생성할 수 있도록 Delaunay 삼각화 방법을 수정하였다. 또한 모든 변수를 정점에 정의하여 유한체적화를 수행하였으며, 난류 모델링의 수행을 위하여 벽면 근처에 사각형 격자를 함께 사용할 수 있도록 하였다.

비정렬 격자계의 유한체적화에 관한 수치적 방법은 크게 artificial compressibility method, fractional step method[1,2], MAC-typed method, projection method 등이 있다. 본 연구에서는 Gresho의 2nd order projection 방법[3,4]을 사용하였다. 난류모델링은 κ - ε 방정식[5]을 사용하였으며, 고체와 유체가 혼재되어 있는 다중 영역을 해석하기 위하여 두 블록 간의 경계 면에서의 경계조건 설정에 일반성을 부여하였다. 따라서, 고체와 유체, 고체와 고체, 유체와 유체 간의 어떠한 상황에서도 전도 및 대류 열전달 현상을 정확하게 풀 수 있도록 하였다.

본 연구의 수치적 방법을 검증하기 위하여 하나의 고체 블록에 대한 열전도 문제를 4개의 고체 블록으로 분할하여 블록 간 경계조건을 고려하여 수치 계산을 수행하여 서로의 결과를 비교하였으며, 대류항의 영향을 살펴 보기 위하여 driven cavity 문제에도 동일한 상황에 대하여 서로의 결과를 비교하였다.

*¹ 영남대학교 기계공학부 대학원

*² 영남대학교 기계공학과 (712-749, 경북 경산시 대동 214-1, Tel. 053-810-2574)

2. 지배방정식 및 수치해석기법

2-1. 지배방정식의 이산화

대류열전달을 계산하기 위하여 아래의 지배방정식들을 사용하였으며, Gresho의 2nd order projection 기법을 이용하여 이산화하였다.

에너지방정식

$$(T^{n+1} - T^n) - \frac{\Delta t}{2} \alpha \nabla^2 (T^{n+1} - T^n) = \frac{\Delta t}{2} [\nabla \cdot (\mathbf{u} T)^{n-1} - 3 \nabla \cdot (\mathbf{u} T)^n] + \Delta t \alpha \nabla^2 T^n \quad (1)$$

운동량방정식

$$(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) - \frac{\Delta t}{2} \nu \nabla^2 (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) = \frac{\Delta t}{2} [\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u})^{n-1} - 3 \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u})^n] - \Delta t \nabla p^n + T^{n+1} \mathbf{g} \quad (2)$$

수정값 계산 (벽면에서 Neumann 조건 사용)

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

속도 수정

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \nabla \phi \quad (4)$$

압력 수정

$$p^{n+1} = p^n + \frac{3}{2} \frac{\phi}{\Delta t} \quad (5)$$

k 방정식

$$(k^{n+1} - k^n) - \frac{\Delta t}{2} \nu \nabla^2 (k^{n+1} - k^n) = \frac{\Delta t}{2} [\nabla \cdot (\mathbf{u} k)^{n-1} - 3 \nabla \cdot (\mathbf{u} k)^n] + \Delta t \nu \nabla^2 k^n + G - \epsilon \quad (6)$$

ϵ 방정식

$$\begin{aligned} (\epsilon^{n+1} - \epsilon^n) - \frac{\Delta t}{2} \nu \nabla^2 (\epsilon^{n+1} - \epsilon^n) \\ = \frac{\Delta t}{2} [\nabla \cdot (\mathbf{u} \epsilon)^{n-1} - 3 \nabla \cdot (\mathbf{u} \epsilon)^n] + \Delta t \nu \nabla^2 \epsilon^n + C_1 \frac{\epsilon}{k} G - \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \frac{\epsilon^2}{k} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $\nu = \nu_0 + \nu_t$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_t$ 이다.

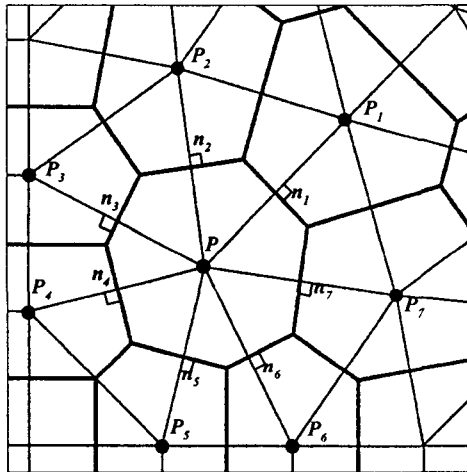


Fig. 1 Example of control volume

2-2. 제어 체적

모든 변수를 절점에서 정의하였으므로, 제어체적은 절점을 중심으로 한 주변 요소들로 구성

하였다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 절점의 제어체적은 절점에 연결되는 변에서 수직 이등분선을 내려 그 교점으로 이루어진 다각형으로 정의하였다. 이렇게 정의된 제어 체적은 한 절점에 연결된 요소의 수와 무관하므로 삼각형과 사각형 요소로 이루어진 비정렬 혼합격자계를 사용하였다.

제어체적을 이루는 다각형은 사용하는 격자계에 따라 그 형상비가 달라지게 되지만, 본 논문에서는 직사각형 격자와 Delaunay 삼각화로 만들어진 삼각형 격자를 사용하여 격자의 형상비가 우수하므로 이와 같은 방법으로 정의한 제어체적을 무리없이 사용할 수 있다.

지배방정식을 이산화하여 얻어지는 1차미분은 식 (8),(9)와 같이 이산화한다.

$$\iint \nabla \phi dA = \oint_C \phi n dS = \sum_i \phi_{n_i} \cdot n_{n_i} \Delta S_{n_i} \quad (8)$$

$$\iint \nabla \cdot a dA = \oint_C a \cdot n dS = \sum_i a_{n_i} \cdot n_{n_i} \Delta S_{n_i} \quad (9)$$

2차 미분은 절점 P 와 P_i 에서의 값을 이용하여 1차 미분을 취한 후 식 (10)과 같이 이산화하여, 제어체적을 확장하지 않고 해석 영역 내의 격자만으로 계산이 가능하도록 하였다.

$$\iint \nabla^2 \phi dA = \oint_C \nabla \phi \cdot n dS = \sum_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{n_i} \Delta S_{n_i} \quad (10)$$

3. 유체와 고체의 계산

고체 영역에서의 열전도와 유체 영역에서의 대류 열전달을 함께 계산할 수 있도록 하였다. 속도는 고체 벽면에서의 no-slip 조건을 사용하였으며, 온도는 블록의 경계면에서 에너지 보존 조건을 고려하였다.

$$q_{block1} = q_{block2}$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{block1} = k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{block2}$$

위의 식은 고체와 유체의 경계면에서 뿐만 아니라, 고체와 고체, 유체와 유체 사이의 경계면에서도 적용할 수 있다. 경계면에서의 미분은 경계점에서 블록 내부로 수선을 내려 삼각형 또는 사각형의 변과 만나는 점과 경계점을 이용하여 계산한다.

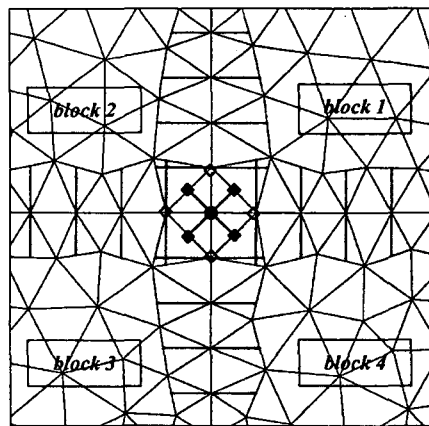


Fig. 2 Block interfaces

Fig. 2는 여러개의 블록이 공유하는 절점에서 에너지 보존 조건을 사용하기 위하여 블록의 내부로 수선을 내린 모습을 보여주고 있다. ●으로 표시된 절점은 4개의 블록에 포함되어 있

으며, 이 4개의 블록에 대하여 heat flux의 유출입량의 합은 0(zero)이다. ● 절점에서 각 블록 내부로 수선을 내려 요소의 변화 만나는 점이 ◆로 표시되어 있다. 본 논문에서는 모든 변수를 절점에 두었으므로 한 요소 내에서 그 값은 선형적으로 변한다. 따라서, ◆ 위치에서의 값은 ◇ 절점 값의 보간으로 표현할 수 있다. 이 방법은 온도 뿐만 아니라, 다른 변수의 경계를 처리할 경우에도 동일하게 적용할 수 있다.

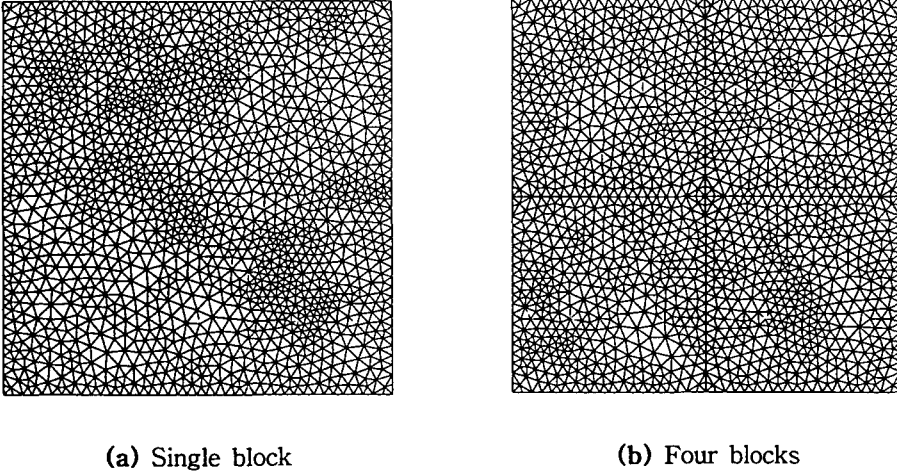


Fig. 3 Geometry and meshes of computational blocks

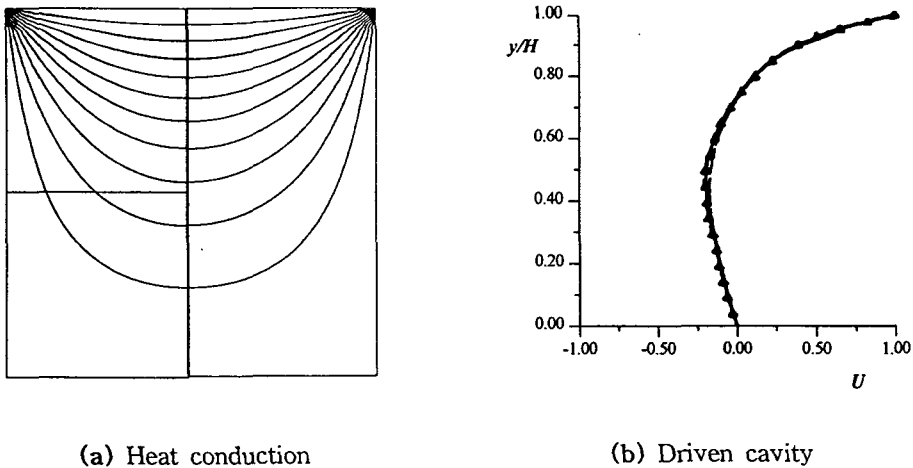


Fig. 4 Comparison of computational results

4. 계산결과

위의 방법으로 Fig. 3에서 보는 바와 같이 해석영역 전체를 1개의 블록으로 처리한 경우와 4개의 블록으로 분할한 경우를 다음과 같은 두가지 문제에 적용하여 그 결과를 비교하였다. 먼저, 윗면의 온도가 1이고 나머지 면의 온도가 0인 열전도 문제에 대하여 Fig. 3의 두 경우에

대하여 계산을 수행하여 4개의 분할 블록들과 전체 블록의 계산 결과를 각각 Fig. 4(a)의 왼쪽과 오른쪽에 함께 배치하여 비교하였다. 확산항 뿐만 아니라 대류항에 미치는 영향도 조사하기 위하여 driven cavity 문제($Re=100$)를 Fig. 3의 두 경우에 대하여 수행하였다. Fig. 4(b)에서 속도 분포가 서로 구별할 수 없을 만큼 일치하며, 다른 계산 결과[1]와도 잘 일치하고 있다.

5. 참고 문헌

- [1] Despotis G.K., Tsangaris S., "Fractional Step Method for Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 20 (1995), pp. 1273-88.
- [2] Michael T., Michael L., "A Pressure-Correction Method for the Solution of Incompressible Viscous Flows on Unstructured Grids", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 22 (1996), pp. 581-601.
- [3] Gresho P.M., "On the theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and Its Implementation via A Finite Element Method that also Introduces A Nearly Consistent Mass Matrix Part 1: Theory", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 11 (1990), pp. 587-620
- [4] Nobile E., Onesti L., Voli M., "Numerical Simulation of Three-Dimensional Time-Dependent Buoyant Flows on the Cray T3D", <http://www.epfl.ch/SIC/SA/publications/SCR95/7-95-37a.html>
- [5] Segal G., Zijlema M., Nooyen R., "User Manual of the ISNaS incompressible flow solver", <http://dutita0.twi.tudelft.nl/isnas/usermanual/usermanual.html>