3차원 다중격자 DADI 방법의 병렬처리

Parallelization of 3-dimensional Multigrid DADI Method

성춘호*, 박수형, 권장혁 (한국과학기술원)

Abstract

3-dimensional Euler solver is parallelized. The spatial discretization method is the 2nd order TVD scheme and DADI method with multigrid is used as a time integration. In order to parallelize this solver, the domain decomposition method with overlapped grid and message passing techniques are used. The informations on the each inter-processor boundaries are communicated with MPI library. Finally, the parallel performance repsented by calculating the ONERA M6 wing at transonic flow condition using CRAY T3E and C90.

1 서 론

전산 유체 역학에 있어서 컴퓨터의 성능은 매우 중요한 요소이다. 과거 수십년의 연구 결과들을 돌아보면, 컴퓨터 성능의 발달과 함께 더 복잡한 방정식과 더 거대한 문제에 대한 도전이 이루어 지고 있음을 확인할 수 있다. 80년대 후반 부터 최근까지 많이 사용된 벡터(vector)컴퓨터를 이용하여 항공기 주위 유동장의 비점성 유동해석을 그리 어렵지 않게 수행할 수 있다. 그러나 이런 벡터 수퍼컴퓨터 들의 한계는 대략 1GFLOPS 정도에서 머물고 있다. 이 정도의 성능을 가지는 컴퓨터에서는 난류효과가 포함된 점성 유동장의 경우 수일 이상의 계산시간이 소요된다. 특히 해석하고자 하는 문제의 크기가 커지는 경우 필요한 메모리의 요구량 또한 증가하여, 물리적 기억 용량을 확보하는 데는 어려움이 따른다. 이를 해결하고자 하는 노력중에 가장 큰 성과를 보이는 부분은 병렬 컴퓨터를 이용한 계산이다. 병렬 컴퓨터 환경에서는 각각의 CPU 가 독립적인 작업을 수행 할 수도 있고 각각 독립적인 물리적 기억 용량을 확보할 수도 있다. 그러나 이러한 병렬환경에서의 계산을 위해서는 기존의 수치해석 기법들을 병렬환경에 적합하도록 수정하여야 하는 어려움이 있다.

본 연구에서는 3차원 Euler 방정식 해석 코드를 영역 분할 기법을 이용하여 병렬화 하였다. 영역 분할 기법은 병렬 계산에 사용할 CPU 의 수에 따라 계산 영역을 분할하는 방법으로 이 방법을 이용하면 계산에 사용된 모든 CPU 에 비슷한 계산량을 할당할 수 있고 임의의 CPU 갯수에도 동일하게 적용되는 장점이 있다[1]. 공간 이산화에는 충격파를 높은 해상도로 계산할 수 있는 TVD 기법[2]을 사용하였으며 시간 적분에는 DADI 기법[3]을 사용하였다. 내재적 적분방법인 DADI 기법은 유량 Jacobian 행렬을 대각화하여 적분함으로서 계산 시간을 크게 줄일 수 있으면서도, 천음속 유동장 계산에서 매우 빠른 성능을 보이는 방법이다. 또한 계산의 수렴성을 높이기 위하여 다중 격자 기법[4]을 도입하였다. 다중 격자 기법은 현재까지 개발된 수렴 증진 기법중 가장 성공적인 결과를 보이는 방법으로 단일 격자계산에 비하여 2배 이상의 효율을 얻을 수 있다. 이와같은 수치해석 기법을 영역 분할법에 의하여 병렬화 할 경우 각 영역의 경계면에서 적절한 처리가 필요하게 된다. 본 연구에서는 각 경계면에서 중첩 격자를 사용하고, 각 중첩격자간의 정보 교환을 통하여 병렬화 하였다.

병렬화된 수치해석 기법의 효율과 정확도를 검증하기 위하여 천음속 유동장에서 ONERA M6 날개를 해석하였다. 동일한 문제를 CRAY C90 벡터 컴퓨터와 CRAY T3E 병렬컴퓨터에서 해석하여 각각의 효율을 비교하였다.

2 지배 방정식과 수치해석 기법

비점성 압축성 유체의 지배 방정식인 Euler 방정식을 3차원 직교 좌표계에서 미분 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

여기서

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{bmatrix} \tag{2}$$

이며, ρ, u, v, z, p, E, H는 각각 밀도, x, y, z축 방향의 속도 성분, 압력, 총에너지 및 총엔탈피를 나타낸다.

이 방정식을 직교좌표계로 변환하고 유한체적법을 이용하여 공간 이산화 하면 다음과 같은 준이산화 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{W}_{ij}}{dt} + \mathbf{R}_{ij} = 0 \tag{3}$$

여기서 잔류치(residual) $\mathbf{R}_{ij}$은 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{F}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k} + \mathbf{G}_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j-1/2,k} + \mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2} \tag{4}$$

각 격자의 경계면에서의 수치 flux 를 계산하기 위하여 Roe 의 FDS 방법[5]을 이용하고, 2차의 정확도를 얻기 위하여 upwind TVD 기법[2]을 사용하였다. 이와 같은 준 이산화 방정식을 Pulliam 등이 제안한 DADI 기법[3]을 이용하여 적분하였다. 이 때 사용하는 내재적 연산자의 선택은 수치 해석의 수렴성에 큰 영향을 미친다. 본 연구에서는 박수형등[6]이 제안한 형태의 연산자를 사용하였다. 최종적으로 이산화된 방정식은 세 번의 scalar tridiagonal 행렬의 역행렬을 구함으로서 해석할 수 있다.

계산의 수렴성을 높이기 위하여 다중격자기법이 사용되었다. 본 연구에서 사용된 다중 격자 기법은 내재적 시간 적분법에 적합한 수정된 톱니 사이클의 다중 격자기법으로 성근 격자에서의 시간 전진 횟수를 늘임으로 수렴성을 크게 증가시킬 수 있다.

3 병렬 처리 방법

본 연구에서는 영역 분할 기법을 이용한 병렬 처리 방법을 사용하였다. 이 방법은 임의의 수의 CPU 상에서도 적용이 가능한 장점을 가지고 있으나 단일 CPU 에서의 계산과 동일한 결과를 얻기 위해서는 영역 경계에서의 계산에 주의하여야 한다.

본 연구에서 사용한 것과 같은 정렬 격자계에서는 각 방향의 격자를 분할 함으로서 쉽게 영역을 나눌 수 있다. 나누어진 각 영역은 동일한 갯수의 계산 격자를 가진다. 나누어진 영역간의 수치해의 연속성을 보장하기 위하여 각 영역 경계에서 중첩 격자를 사용하였다. 공간이산화의 2차 정확도를 얻기 위해서는 각 격자점에서 양쪽으로 두 개의 격자점이 더 필요하다. 따라서 각 경계에서 두 개의 중첩 격자를 가지도록 격자계가 구성되었다. 이 때, 각각의 중첩 격자계는 인접한 격자계의 정보로 부터 구해져야 한다. 이 정보는 매 시간적분 후에 교환되어야 하고, 다중 격자를 사용할 경우 각 다중 격자 사이에서도 교환되어야 한다. 본 연구에서는 병렬처리에서 필요한 메세지 전달 라이브러리로 널리 이용되는 MPI 라이브러리를 이용하여 정보를 교환하였다. 각각의 정보를 전달함에 있어 보내는 쪽과 받는쪽의 동시성이 보장되지 않으면 각 단계의 충돌로 인하여 수치해석이 진행할 수 없는 경우가 발생한다. 이를 피하기 위하여 MPI 에서 제공하는 blocking, barrier 등을 사용할 수 있으나 이와 같은 경우 더 많은 함수를 호출함에 따라 계산 시간이 증가하는 단점과 함께 정보전달 함수의 구성이 복잡하게 된다. 이와 같은 문제를 피하기 위하여 각 CPU 간의 가상적인 좌표계를 구성하고 MPI 에서 제공하는 sendrecv 함수[7]를 사용한다. 이 함수는 좌표계로 정리된 CPU 들 간의 정보를 교환함에 있어 하나의 CPU 가 정보를 보내고 받는 역할을 동시에 수행하게 됨에 따라 충돌이 발생할 소지가 매우적고 정보의 교환을 간단하게 구현할 수 있는 장점이 있다.

시간 적분을 위해서는 세 번의 tridiagonal 행렬의 역행렬 계산이 필요하게 된다. 영역을 분할한 행렬 문제를 전체 행렬을 단일 CPU 에서 해석하는 것과 동일한 해를 얻는 것은 거의 불가능하고 효율이 크게 떨어진다. 또한 경계에서 문제를 보정함으로서 좀 더 정확한 해를 얻고자 하는 노력이 많이 있었지만 이러한 방법들은 전체적인 알고리즘이 복잡해 지거나 정보의 교환 횟수가 늘어나는 단점이 있다. 이에 반하여 각각의 영역에서 독립적인 행렬 문제를 푸는 방법은 단일 CPU 에서 사용하는 것과 동일한 방법으로 행렬을 해석함으로 간단하며 정보의 교환이 필요없다. 물론 이러한 방법은 전체 행렬과 동일한 결과를 얻을 수 없지만 정상상태의 해를 구

하는데 있어서 수렴된 상태에서는 해에 아무런 영향을 주지 않는다. 따라서 본 연구에서는 각각의 영역에서 tridiagonal 행렬을 해석하였다. 이와같은 방법을 사용할 경우 단일 CPU 의 계산 결과에 비하여 약간의 수렴성 저하가 동반된다.

다중 격자법을 병렬환경에 적용하는데 있어서도 여러 방법이 존재한다. 그 중에서 각각의 영역에서 독립적으로 다중격자를 구성하는 방법이 가장 간단하고 적용이 용이하여 본 연구에서는 이를 사용한다. 다중 격자가 수렴성을 향상 시키는 원인은 여러가지가 있지만 Euler 방정식과 같은 쌍곡선형의 미분방정식에 있어서는 크게 두 가지로 알려져 있다. 그중 하나는 고주파 성분의 오차를 성근 격자계에서 감쇠시켜 수렴성을 높이는 특성이고 다른 하나는 파동의 전달을 가속시키는 특성이다. 본 연구에서 사용된 바와 같은 내재적 시간 적분법에 있어서는 후자의 특성이 더 크게 작용한다. 이와 같은 관점에서 보면, 가장 조밀한 격자의 영역내에서만 다중 격자를 적용하는 방법은 초기의 파동이 분산되는 영역에서는 영역 분할의 영향에 의한 수렴성 저하가 적을 것으로 기대할 수 있다.

4 결 과

개발된 병렬 코드의 성능과 정확도를 검증하기 위하여 3차원 유동장 검증에 많이 사용되는 ONERA M6 날개 주위의 천음속 유동장을 해석하였다. ONERA M6 날개의 실험 결과는 몇가지 조건에서 알려져 있으나, 본 연구에서 사용된 비점성 유동장 계산의 검증에는 마하수가 0.84 이고 받음각이 3.06 도인 경우가 많이 사용된다. 이 경우는 날개위에서 박리가 발생하지 않는 조건이므로 비점성 유동장 해석으로도 실험치에 상당히 근접한 결과를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 날개위에 129 개, 날개의 스팬방향에 33개, 원방경계 방향으로 33개의 격자점을 분포시켜 전체격자계가 140,481 개인 O 형의 격자계를 사용하였다.

그림 1 은 32개의 CPU를 사용하여 해석한 결과중, 날개 주위의 압력 분포를 도시한 그림이다. 날개위에 16개의 영역이 존재하나, 각 영역 경계에서 압력이 불연속이 존재하지 않음을 확인 할 수 있다. 또한 날개 표면에 존재하는 λ 형사의 충격파를 잘 묘사함을 확인할 수 있다. 각 단면에서 압력 분포를 도시한 그림을 보면 실험치와도 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

그림 2-(a) 는 여러개의 CPU 에서 계산한 수렴 곡선을 도시한 그림이다. 단일 CPU 의 계산 결과는 CRAY C90 에서 수행한 결과이고 병렬처리 결과는 CRAY T3E 에서 계산한 결과이다. 단일 격자를 사용한 계산의 경우, 그림에서 보는 바와 같이 단일 CPU 에 비하여 약 10/이것은 시간적분법상의 행렬을 각 영역별로 계산함으로 인하여 생긴 결과이다. 다중격자에서의 계산 결과 역시 약간의 수렴 저하가 보인다. 이는 CPU 의 갯수가 늘어남에 따라 성근격자의 격자수가 급격히 감소하여 단일 CPU 에 비하여 다중격자의 효율이 떨어지는 것으로 볼 수 있다. 공학적으로 의미있는 오차정도인 10^{-4} 이하까지의 초기 수렴속도에는 거의 차이가 없으나, 점근영역(asymtotic region)에서는 30% 정도의 수렴성 저하가 일어난다.

그림 2-(b) 는 다중격자기법을 적용할 경우 각각의 CPU 의 수에 따른 병렬 효율을 그린 그림이다. CPU 수가 16 개인 경우 속도 향상은 약 15 배 이고, 32 개인 경우는 약 29 배로 나타났다. 이는 32 개인 경우에도 90% 이상의 병렬효율을 나타내는 것이다. 이와 같이 높은 성능 향상을 얻을 수 있었던 것은 본 연구에서 사용된 내재적 적분법의 경우 각 영역에서 연산량이 정

보 전달량에 비해 큰 것에 기인한다.

5 결 론

3차원 Euler 방정식의 다중격자 DADI 방법을 병렬처리 하여 ONERA M6 날개 주위의 유동장을 해석하였다.

영역 분할 기법을 이용하여 각 영역별로 내재적 시간 적분과 다중격자 기법을 적용하여 연산량에 대한 정보전달량의 비를 크게 줄일 수 있었으며, 이로 인하여 CPU 가 32 개인 경우에도 90% 이상의 병렬 효율을 보였다. 영역이 분할된 영향으로 인한 수렴성 저하는 단일 격자의 10% 이내로 그 영향이 매우 적었고, 다중 격자의 경우 초기영역에서는 단일 CPU 와 동일하고 점근영역에서는 30% 이내로 나타났다.

개발된 병렬 코드는 CPU 가 32 개인 경우 약 140000만개의 격자점을 가지는 3차원 유동장을 30 초 이내에 해석할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 98년도 시스템 공학 연구소의 연구비 지원에 의한 결과임을 밝히여 이에 감사드립니다.

참고문헌

[1] 김성호, 비정렬 격자를 이용한 Euler Code의 병렬처리 기법, 석사학위 논문, 한국과학기술원 항공우주공학과, 대전 (1994)

[2] H. C. Yee, A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods NASA TM 101088 (Feb. 1989)

[3] T. H. Pulliam and D. S. Chaussee, A diagonal form of an implicit approximate-factorization algorithm, J. Comp. Phys. 39 (1981) 347–363

[4] A. Jameson, Solutions of the Euler equations for two dimensional transonic flow by a multigrid method, MAE report No. 1613 (1983)

[5] P. L. Roe, Characteristic-based schemes for the Euler equations, Ann. Rev. Fluid Mech. 18 (1986) 337–365

[6] 박수형, 성춘호, 권장혁, 3차원 압축성 유동 해석을 위한 효율적인 다중격자 DADI 기법, 한국전산유체학회 춘계 학술대회, (1998)

[7] M. Snir, et al., MPI: The Complete Reference, The MIT Press (1996)

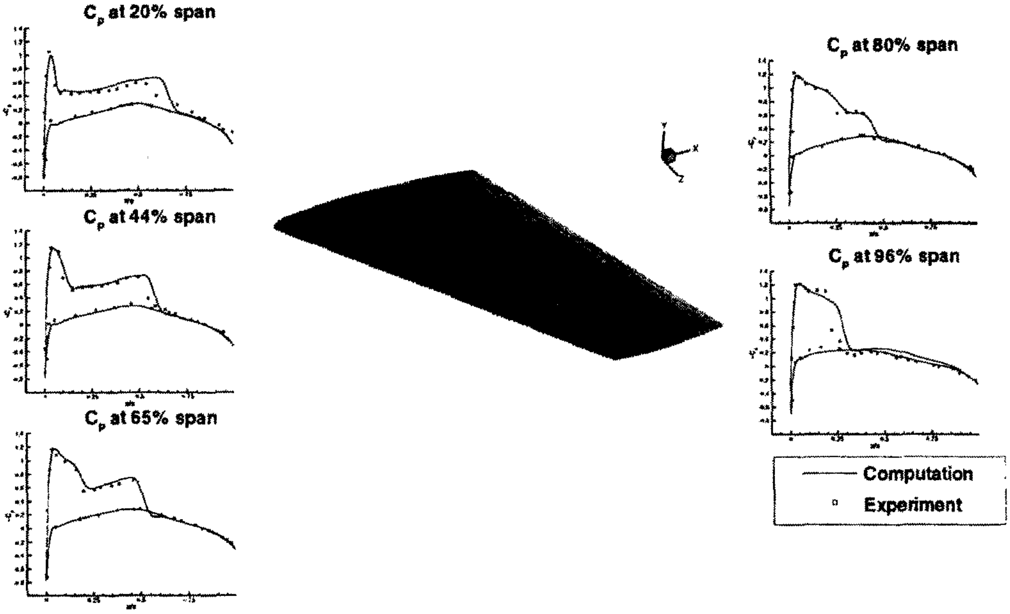
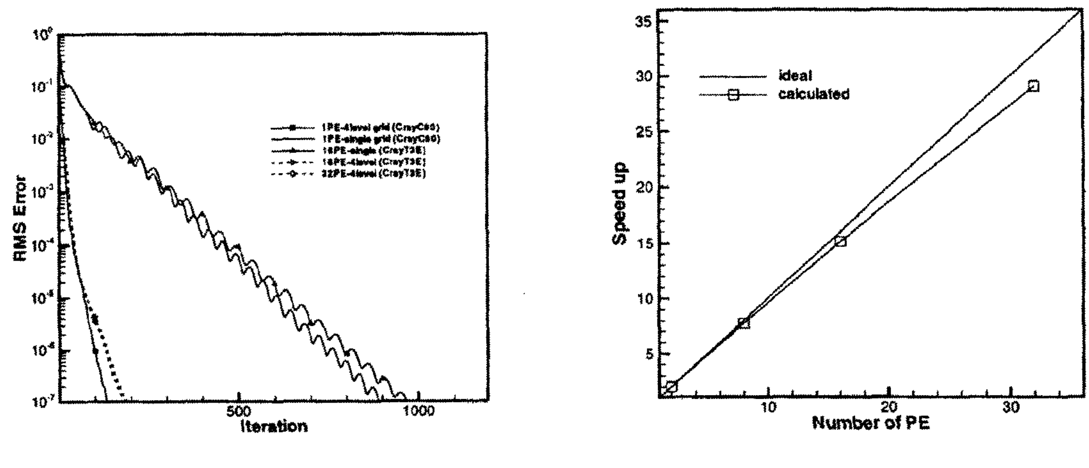


그림 1. ONERA M6 주위의 압력 분포(M=0.84 AOA=3.06)



(a) 여러개의 CPU 수에서의 수렴 곡선

(b) CPU 수에 따른 성능향상

그림 2. 수렴 곡선과 성능 향상