

예조건화 압축성 알고리즘에 의한 저마하수 유동장 해석기법

Preconditioned Compressible Navier-Stokes Algorithm for Low Mach Number Flows

고 현*, 윤웅섭 (연세대학교)

Hyun Ko, Woong-Sup Yoon

Time marching algorithms applied to compressible Navier-Stokes equation have a convergence problem at low Mach number. It is mainly due to the eigenvalue stiffness and pressure singularity as Mach number approaches to zero. Among the several methods to overcome the shortcomings of time marching scheme, time derivative preconditioning method have been used successfully. In this numerical analysis, we adopted a preconditioner of K.H. Chen and developed a two-dimensional, axisymmetric Navier-Stokes program. The steady state driven cavity flow and backward facing step flow problems were computed to confirm the accuracy and the robustness of preconditioned algorithm for low Mach number flows. And the transonic and supersonic flows inside the JPL axisymmetric nozzle internal flow is exemplified to investigate the effects of preconditioning at high Mach number flow regime. Test results showed excellent agreement with the experimental data.

1. 서론

압축성 지배방정식에 적용된 시간전진기법은 현재 전산유체역학 분야에서 가장 활발히 이용되고, 연구되고 있는 방법 중 하나로서 고속의 압축성 유동에 대한 여러 연구에서 계산의 수렴성과 결과의 정확성이 입증되었다. 그러나 저마하수의 연소유동장에서와 같이, 압축성을 포함하는 저마하수의 유동장 계산에 이 방법을 적용할 경우, 고유치의 stiffness와 압력구배항의 특이성(singularity)으로 인하여 수렴성과 해의 정확성에 문제를 야기하는 것으로 알려져 있다[1,2,3,4]. 이와 같은 저마하수 유동장에 압축성 알고리즘을 적용할 경우 발생하는 수렴저하와 압력구배항의 특이성을 제거하기 위한 많은 연구가 진행되고 있으며, 대표적으로, Pressure Gradient Scaling(PGS) method[6], Perturbation Expansion Method[5,7], 예조건화(Preconditioning) 기법[1,2,3,4] 등을 들 수 있다. PGS 기법은 운동량 방정식의 압력구배항을 조정하여, 음향속도를 유동 속도와 같은 차수의 크기가 되도록 하는 방법으로, 정상상태의 지배방정식을 변경한다는 단점이 있다[7]. Perturbation expansion 방법은 유동 변수를 마하수나 마하수의 제곱의 형태로 표현하여 적용하는 것으로, 낮은 마하수에서 잘 조건화된 고유치를 얻을 수 있고 동시에 마하수에 따른 압력항의 특이성이 제거되는 장점이 있지만, 음속 이하에서만 적용되는 제한이 따른다[1,2]. 예조건화 기법은 지배방정식의 시간미분항에 특정한 행렬을 미리 곱하여, 고유치의 크기 분포를 동일차수로 유지하여 고유치에 의한 특이성을 완화하는 방법이다. 이 방법에서는 압력구배항의 특이성을 고려하지 않으므로 아주 낮은 마하수에서는 수렴성이 악화되나, 압력분리(pressure decomposition)기법과 결부하여 수식화하면, 압축성 지배방정식을 이용해 낮은 마하수 유동장에 대해서 고속유동과 유사한 수렴속도를 얻을 수 있다[1].

본 연구에서는 저마하수 유동장의 계산을 위하여 압축성 지배방정식에 예조건을 추가하여 수렴성에 영향을 주는 고유치의 stiffness를 조절하고, 해의 정확성을 위해서는 압력분리기법을 통하여 비압축성에 의한 압력구배항에서의 오차를 최소화하는 Chen 등[1]의 방법을 사용하였다. 마하수 1.8×10^{-5} 에서 2.3에 이르는 비압축성, 압축성의 2차원 유동장을 대상으로 하여 압축성 지배방정식을 바탕으로 예조건화와 압력분리기법을 사용하는 낮은

마하수 유동장 수치해법에 관한 장점과 단점을 비교하고, 타당성을 검증하고자 하였다.

2. 지배방정식

본 연구에 사용된 일반화된 2차원 비직교좌표계에서의 강한 보존형 Navier-Stokes 방정식은 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{E} - \tilde{E}_v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{F} - \tilde{F}_v) = \tilde{H} \quad (1)$$

여기서 $\tilde{Q} = \frac{y^\delta}{J} Q$, $\tilde{H} = \frac{1}{J} H$,

$$\tilde{E} = \frac{y^\delta}{J} (\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F), \quad \tilde{E}_v = \frac{y^\delta}{J} (\xi_x E_v + \xi_y F_v),$$

$$\tilde{F} = \frac{y^\delta}{J} (\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F), \quad \tilde{F}_v = \frac{y^\delta}{J} (\eta_x E_v + \eta_y F_v)$$

이며 Q 는 보존형 유동변수 벡터, E, F 와 E_v, F_v 는 각각 2차원 비점성 및 점성유속벡터, H 는 축대칭에 의한 발생항, J 는 Jacobian 이다. 식 (1)에서 $\delta=1$ 일 때는 축대칭, $\delta=0$ 일 때는 2차원의 경우이다.

3. 예조건화

시간전진법의 수렴특성은 최대 고유치와 최소 고유치의 비율로 정의되는 특성 조건수 (characteristic condition number)에 의해 좌우된다[4,10]. 특성 조건수는 파동의 전파 속도를 결정하며, 1에 가까울 수록 시간전진법의 수렴특성은 우수하게 된다. 1차원 Euler 방정식의 예를 들면, 고유치는 $(u, u(1+1/M), u(1-1/M))$ 로 정의할 수 있다. 이때, 특성 조건수는 $M \sim 0$ 혹은 $M \sim 1$ 에서 무한대의 값이 되어 수렴특성에 심각한 영향을 주게되는 고유치의 stiffness가 발생한다[4]. 또한 Navier-Stokes 방정식의 경우에는 Euler 방정식에서 나타나는 대류시간스케일에 부가하여, 낮은 레이놀즈수에서 점성항에 의한 확산시간스케일이 혼합되어 나타나기 때문에 이에 대한 적절한 처리도 요구된다[7,10]. 대류시간스케일과 확산시간스케일은 각각 마하수와 레이놀즈수에 따라 변화되므로, 모든 마하수와 레이놀즈 수에서 시간스케일을 유사한 정도로 유지하여야 하며, 이를 목적으로 하는 여러 방법 중 시간미분항에 대한 예조건화 방법이 광범위하게 사용되고 있다.

예조건화방법은 고유치 혹은 특성 조건수를 변경하여 수렴성이 향상되도록 하는 방법으로, 고유치 재조정을 위해 시간미분항에 임의의 예조건화행렬을 곱한다. 이때, 예조건화행렬은 1) 지배방정식의 고유치가 실수이어야 하고, 2) 고유치의 부호는 원래의 식과 동일해야 하며, 3) 시간전진방향에 방향에 대해 확산항의 부호가 바뀌지 않아야 한다는 조건을 만족해야 한다. 또한 고유치의 stiffness를 피할 수 있어야 하므로, 고유치가 동일한 차수의 크기이어야 한다. 예조건화는 시간중속 방정식의 시간항을 변경하여, 최종적인 정상상태 해에 영향을 주지 않으면서, 모든 마하수에 대해서 특성 조건수 혹은 고유치가 동일한 차수가 되도록 설정되어야 한다.

예조건화는 Chorin의 인공압축성 (artificial compressibility) 기법[8]에 기반을 두고 있다. Chorin은 연속방정식에 인공적인 압력에 관한 시간미분항을 추가하여 타원-포물선형의 지배방정식을 쌍곡선-포물선형으로 변경하였다[4]. 여기서는 압력에 대한 시간미분항을 인공적인 음속을 나타내는 예조건화 계수로 나누고 있으며 정상상태로 빠르게 수렴하기 위해서는 이 예조건화 계수가 적절히 선정되어야 한다. 이 방법은 비압축성 방정식에 적용되어 폭넓게 이용되고 있지만, 비정상 상태의 계산은 불가능하다는 단점이 있다.

Turkel[3,9]은 Chorin의 방법을 일반화하여, 중속변수의 식에 대한 예조건화를 수행하였다. 그의 방법은 연속방정식, 운동량 방정식에 인공적인 시간미분항을 추가하는 2-파라메타 예조건화로서 두 개의 예조건화 계수들은 수렴을 가속하고, 지배방정식의 고유치의 크

기를 유동속도와 동일한 차수로 유지시켜주는 역할을 한다. 이 두개의 예조건화 계수들을 속도 영역에 따라 적절한 조합하여 사용하면 모든 마하수의 유동장계산이 가능해지나, 이 방법을 통해 얻어진 비보존형의 식을 보존형으로 변환하였을 경우에는 예조건화 행렬이 아주 복잡해지고, 정체점과 음속점에서 특성조건수의 변화에 따른 심각한 수렴성의 저하를 수반하는 문제를 가지고 있다.

Merkle 등[2]은 Turkel의 예조건화행렬을 점성-압축성 유동 영역으로 확장하였다. 그리고 중속 유동변수를 원시 유동변수인 압력, 속도, 온도로 하여 Navier-Stokes 방정식계를 구성하였다. 이들의 예조건화는 Turkel의 예조건화방법에서 예조건화 계수를 한개로 줄이고 예조건화된 지배방정식계를 보존형으로 변환하였다. 또한 점성에 대한 시간길이를 정의하기 위해, CFL 수와 Von Neumann수를 동일하게 하는 스케일링기법을 이용하여, 모든 마하수와 모든 레이놀즈 수에 대해 동일한 수렴특성을 얻도록 하였다. 그리고 격자의 aspect ratio에 관한 예조건화도 수행하였다[10]. 이들의 방법에서는 내재적 수치기법을 이용하기 때문에, 정체점과 음속점에서 나타나는 stiffness를 완화할 수 있는 장점이 있다.

Chen & Shuen[1]은 Merkle과 동일한 예조건화행렬을 취하고 있다. 단지 압력항에 대해 압력분리기법을 적용하여 압력항을 게이지 압력으로 표현하고, 에너지 방정식을 엔탈피에 대한 형태로 변환하여 게이지압력, 속도, 엔탈피에 관한 지배방정식계를 구성하였다. 여기서 사용된 예조건화 행렬은 식 (2)와 같다.

$$\Gamma_{\text{Chen}} = \begin{pmatrix} 1/\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ u/\beta^2 & \rho & 0 & 0 \\ v/\beta^2 & 0 & \rho & 0 \\ H/\beta^2 - 1 & \rho u & \rho v & \rho \end{pmatrix} \quad (2)$$

위 식에서 β 는 예조건화 계수를 나타낸다.

Chorin, Turkel, Merkle, Chen 등의 예조건화 방법들에서는 각기 다른 유동변수들을 중속변수로 사용하고 있으며 특성파동 속도를 유동장의 속도와 동일한 차수가 되도록 유지시켜 낮은 마하수에서 수렴을 가속하는 예조건화 계수 β 의 정의에 따라 구별된다. 즉 Chorin은 $\beta^2 = a^2$, Turkel은 $\beta_T^2 = a(u^2 + v^2)$, Murkle은 $\beta_{\text{Merkle}}^2 = M_T^2 a^2$, Chen등은 $\beta^2 = u^2 + v^2$ 을 예조건계수로 사용하고 있다. 이들 각각의 예조건화 방법에서 나타나는 공통적인 문제점들은 정체점에서 계수가 모두 0이 된다는 것과 마하수가 1에 접근함에 따라 조건수가 아주 큰 값이 되어 수렴특성과 해의 정확성에 영향을 준다. 하지만, 대부분의 유동장에서 이러한 영역이 폭넓게 존재하지 않기 때문에, 내재적 수치기법을 이용하면 수렴에는 큰 영향을 주지 않는다고 보고되고 있고, 이를 피하기 위한 연구들이 Van Leer, Roe 등에 의해 진행되고 있다[4].

본 연구에서는 Chen 등[1]에 의해 제시된 예조건화행렬을 이용하였다. 이들의 예조건화는 기존의 압축성 코드에 많은 수정을 가하지 않고, 쉽게 구현할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 앞에서 언급한 압축성 방정식의 낮은 마하수에서의 압력항의 특이성을 해결하기 위해 압력을 식 (3)과 같이 기준압력과 게이지압력으로 분리해서 적용하는 압력분리기법[1]을 사용하였다.

$$p(x, y, t) = p_0 + p_g(x, y, t) \quad (3)$$

압력항의 특이성은 저속유동에서 해의 정확도에 영향을 주는 인자이기 때문에, 고유치의 재조정과 압력항의 특이성 완화를 동시에 이룸으로써 저속에서도 시간전진기법을 이용해 빠르게 정확한 해를 구할 수 있다. 인공적인 시간미분항을 추가하여 Chen 등[1]의 압력분리기법을 연속방정식과 운동량방정식에 적용하고, 예조건화 방법을 적용하여 지배방정식을 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ 의 좌표계로 변환하면 식(1)은 식(4)와 같은 물리적 시간항과 인공 시간항이 동시에 나타나는 방정식이 된다[16].

$$\Gamma \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} = \hat{H} \quad (4)$$

여기서 원시변수벡터 \hat{Q} 는 $(p_g, u, v, h)^T$ 이고, 예조건행렬 식(2)와 같다.

변경된 지배방정식의 ξ 방향 고유치는 예조건화에 의해 방정식 계의 특성이 변경되었으므로, 이를 반영하기 위해 $\Gamma^{-1}A$ 로 부터 다음과 같이 유도된다.

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[U \left(1 + \frac{\beta^2}{c^2} \right) \pm \sqrt{U^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{c^2} \right) + 4\beta^2 (\xi_x^2 + \xi_y^2)} \right], U, U \quad (5)$$

여기서 A 는 ξ 방향의 비점성 유속벡터 Jacobian $\partial \hat{E} / \partial \hat{Q}$ 이다. 위에서 언급된 것과 같이 예조건화 계수 β^2 의 값은 $u^2 + v^2$ 로 정의되며 이와 같이 정의함으로써 모든 고유치들은 유동속도와 무차원인 마하수의 곱으로 표현되어 고유치의 stiffness가 해소되게 된다.

4. 수치해법

정상상태를 가정하여 물리적 시간항을 무시하여, 유한차분법으로 식(4)를 다음과 같이 수식화하였다.

$$\Gamma \frac{\hat{Q}^{p+1} - \hat{Q}^p}{\Delta \tau} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)^{p+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)^{p+1}}{\partial \eta} = \hat{H}^{p+1} \quad (6)$$

예조건화 방법에서는 내재적 수치기법이 특성조건수의 변화에 대해 수렴성에 영향을 덜 받기 때문에 내재적 수치기법을 사용한다[4]. 인공 시간항에 대한 시간적분은 2차원에서는 ADI(Alternating Direction Implicit) 기법과 비교해 우수한 면이 없지만, 3차원으로의 확장을 위해 ADI 기법에 비해 3차원 확장시 인자분해 오차가 적은 LU-SGS(Lower-Upper Symmetric Gauss Sidel)[11] 기법을 이용하였다.

$$\left[\Gamma - \Delta \tau D - \Delta \tau \left(\left(\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} R_{\xi\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} R_{\eta\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right) \right]^p \Delta \hat{Q} = -\Delta \tau (R)^p \quad (7)$$

여기서 D 는 생성항 Jacobian, $R_{\xi\xi}$, $R_{\eta\eta}$ 는 점성항 Jacobian이다. LU-SGS기법을 예조건화 지배방정식에 적용하기 위해서 flux 분할시 예조건화에 의한 지배방정식의 변경된 특성을 고려하여 (8)처럼 적용하였다.

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial^-}{\partial \xi} (\Gamma \hat{A}^+) + \frac{\partial^+}{\partial \xi} (\Gamma \hat{A}^-) \quad (8)$$

여기서 $\hat{A}^\pm = \Gamma^{-1}A$ 이고, $\Gamma \hat{A}^\pm = \Gamma \frac{1}{2} (\Gamma^{-1}A \pm \kappa |\lambda_A|_{\max} I) = \frac{1}{2} (A \pm \kappa |\lambda_A|_{\max} \Gamma)$ 이다. 그리고 $|\lambda_A|_{\max}$ 는 A 의 최대 고유치이고, κ 는 1보다 약간 큰 값이다. 위의 식 (6)을 다음과 같이 LU 인자분해하여 해를 구하였다.

$$(L + D)D^{-1}(U + D)\Delta \hat{Q} = b$$

여기서 L , U , D 는 차분화된 식 좌변항에서의 하삼각행렬, 상삼각행렬, 대각행렬이다.

5. 적용예

예조건화를 통한 Navier-Stokes 방정식의 적용 범위를 알아보기 위해, 비압축성 유동과 압축성 유동에 대한 계산을 수행하였다. 비압축성 유동 계산을 위해서는 정상상태 cavity

유동, 후향계단 유동에 적용·검증하였고, 압축성 유동 계산을 위해서는 JPL 노즐 내부 유동에 적용·검증하였다.

5-1. Cavity내부의 저마하수 유동

압축성 지배방정식 예조건화에 기초한 저 마하수 비압축성 유동장에 대한 계산의 정확성과 수렴성의 검증을 위해 정방형 cavity 유동에 적용하여 보았다. 계산시 설정한 레이놀즈수는 400과 1000이고, 격자는 71×71 을 벽면에 격자점을 밀집시켜 이용하였다. 그리고 계산에 사용된 마하수는 레이놀즈수 400에서는 1.8×10^{-5} , 1000일 때는 4.56×10^{-5} 이다. 두 경우 모두 10^{-5} 오차 내로의 수렴에 약 2000번의 반복계산이 수행되었다.

그림 1a와 그림 2a는 각각 레이놀즈수 400과 1000에서의 유선이, 그리고 그림 1b와 그림 2b에서는 압력에 대한 등가곡선이 도시되어 있다. 여기서 압력은 게이지 압력을 의미한다. 주목할 것은 cavity 하부의 벽면 근처에서 압력의 미세한 파동(wiggle)이 관찰되는데, 이는 비압축성 유동에 적용된 압축성 지배방정식과 그로 인한 압력항의 특이성이 인위적으로 부여된 벽면에서의 경계조건 ($\partial p / \partial n = 0$)에 의해 강제적으로 제약됨으로써 발생하는 오차의 진동 때문에 발생하는 것으로 보인다. 이 미세한 압력파동에 대한 적절한 소산방법이 요구된다.

그림 3은 cavity의 가로축 중심선에서의 수평방향 속도 성분을, 그리고 그림 4는 세로축 중심선에서의 수직방향 속도 성분을 도시한 것으로 Ghia[12] 등에 의한 비압축성 알고리즘에 의한 결과와 비교하여 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

5-2. 후향계단 유동

비압축성 유동의 대표적인 검증 예인 후향계단 유동을 예조건화 기법을 이용한 압축성 알고리즘으로 적용하였다. 130×66 개의 격자를 벽면에 밀집시켜 이용하였다. 레이놀즈수가 200이상이면, 3차원 효과가 발생하여 2차원으로 계산한 결과와 차이를 보이기 때문에 계단의 높이를 기준으로한 레이놀즈수 100과 200에 대해 계산하였고, 유동이 재부착되는 거리를 Amaly 등[13]의 실험 결과와 비교하였다. 입구에서의 속도는 포물선 형태로 부가하였고, 각각의 마하수는 3.36×10^{-6} 과 6.72×10^{-6} 로 아주 낮은 마하수이다.

그림 5a와 5b는 각각의 레이놀즈수에서 축방향 속도의 등가곡선을 나타낸다. 벽면에서 유동이 박리되어 재부착되고 레이놀즈수의 증가에 따라 재부착 길이가 길어지는 일반적인 경향이 잘 나타나 있다. [13]의 실험결과에서 계단의 높이로 무차원된 재부착 길이는 레이놀즈수 400정도 까지는 레이놀즈수에 선형으로 비례한다. 그림 5c에서 볼 수 있듯이 예측된 재부착 길이가 실험결과와 잘 일치하고 있고, Merkle 등의 예조건화를 이용한 [10]의 계산과도 동일한 결과를 나타내고 있다.

5-3. 천음속 노즐 내부 유동

압축성 지배방정식을 바탕으로 예조건화를 수행하였으므로, 예조건화에 의한 압축성 유동장의 계산에 어떠한 변화가 발생하는지를 관찰하기 위해서 압축성 유동장인 NASA의 JPL 축대칭 노즐에서의 내부 유동장을 계산하였다. JPL 노즐은 수축각 45° , 팽창각 15° 의 수축-팽창 노즐이며 노즐목 근처에서 발생하는 천음속영역의 계산 검증에 자주 인용되는 노즐이다. 111×71 개의 격자를 사용하였고, 입구경계조건으로는 압력 $4.824 \times 10^6 \text{ Pa}$, 온도 300K로 아음속 조건이며, 출구는 모든 중속변수를 외삽하는 초음속 경계조건을 적용하였다. 노즐 중심선에는 축대칭 조건이 부여되었다.

그림 6과 그림 7에는 각각 마하수와 압력에 대한 등가곡선을 보이고 있으며, 노즐목 상류에서 노즐목을 지나 하류로 진행함에 따라 초음속으로 변화하며 동시에 압력이 감소하는 일반적인 경향이 노즐목으로부터의 경계층의 발달과 더불어 잘 나타나 있다. 입구의 마하수는 0.4정도 이고, 계산 결과 출구에서의 마하수는 2.3정도이었다. JPL노즐은 Cuffel 등[14]에 의하여 실험된 바 있으며, 노즐 중심선과 벽면에서의 압력분포에 대한 계산 및 실험의 결과가 그림 8에 비교되었다. 노즐 중심선에서의 압력분포는 그 결과가 잘 일치함을 볼 수 있으며 노즐벽면에서의 압력분포도 비교적 잘 일치하고 있다.

6. 결론

낮은 마하수 유동장 해석을 위한 예조건화와 압력분리기법을 사용하는 2차원 Navier-Stokes 방정식 계산 프로그램을 작성하였다.

마하수 3.36×10^{-6} 에서 2.3에 이르는 2차원 비압축성, 압축성 유동을 대상으로 하여 예조건화와 압력분리기법에 의한 해의 수렴성과 정확성을 검증하였다. 비압축성 유동에 대해서는 정방형 cavity 유동과 후향계단 유동에 대해 아주 낮은 마하수에 대한 계산을 수행하였고, 압축성 유동에 대해서는 JPL 축대칭 노즐 내부에서의 속도 천이과정을 계산, 실험치와 비교하였다. 정방형 cavity에서의 비압축성 유동과 후향계단 유동 계산 결과는 완전한 비압축성 알고리즘에 의한 결과 혹은 실험결과와 일치하였으며, JPL 축대칭 노즐 내에서의 압축성 유동 계산도 실험에 의한 결과와 일치하는 것으로 나타났다.

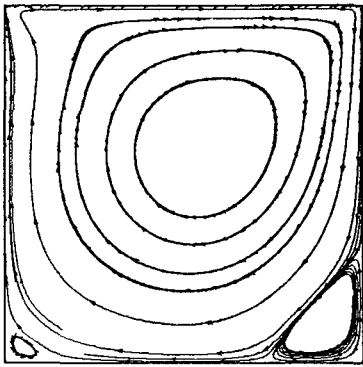
예조건화 기법에서 가장 중요한 부분은 예조건화 행렬과 속도 영역에 따라 음향파의 속도를 유동 속도와 동일한 크기로 유지하는 예조건화 계수의 결정이다. 본 연구에서 이용한 Chen 등의 예조건화 방법은 유동장의 속도 영역이 명확히 구분되는 경우에 수렴성과 해의 정확성에 좋은 결과를 보이고 있다.

예조건화 방법은 압축성 지배방정식을 이용하여 저마하수의 유동장을 빠르게 계산할 수 있다는 장점이 있어서, 화학반응 혹은 연소과정에 의해 아음속 영역에서 압축성을 고려해야만 하는 반응 유동장을 효과적으로 모사할 수 있을 것이라 기대된다. 그리고 연소유동장과 같이 유동장 내부에 비압축성 영역과 압축성 영역이 명확히 공존하는 경우에 대해서는 지속적인 연구가 진행될 것이다.

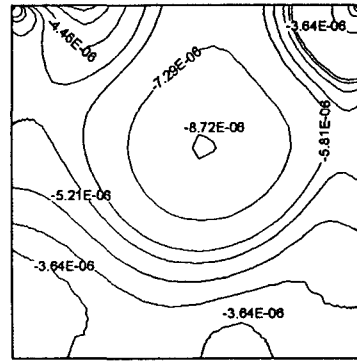
7. 참고문헌

1. J.S. Shuen, K.H. Chen and Y. Choi, "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-equilibrium Flows at All Speeds," J. of Comp. Phys., 106, No. 2, 306, 1993.
2. Y.H. Choi, and C.L. Merkle, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," J. of Comp. Phys., 105, 207, 1993.
3. Eli, Turkel, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," J. of Comp. Phys. 72, 277-298, 1987.
4. D.H. Lee, "Local preconditioning of the Euler and Navier-Stokes equations," PhD Dissertation, University of Michigan, 1994.
5. J. Guerra, "A Numerical Method for Incompressible and Compressible Flow Problems with Smooth Solutions," J. of Comp, 63, 377, 1986.
6. J.D. Ramshaw, P.J. O'Rourke, and L.R. Stein, "Pressure Gradient Scaling Method for Fluid Flow with Nearly Uniform Pressure," J. of Comp, 58, 361, 1985.
7. Y.H. Choi, "Computation of Low Mach Number compressible Flow," PhD Dissertation, Pennsylvania State University, 1989.
8. A.J. Chorin, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," J. of Comp. Phyc. 2, 12, 1967.
9. E. Turkel, R. Radespiel, "Preconditioning Methods for Multidimensional Aerodynamics", private communication with E. Turkel, 6. May. 1998.
10. P.E.P. Buelow, "Convergence Enhancement of Euler and Navier-Stokes Algorithm," Ph.D thesis, 1995, The Pennsylvania State University.
11. S. Yoon, and A. Jameson, "Lower-Upper Symmetric Gauss Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations," AIAA J. 26, 9, 1025, 1988.
12. U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," J. of Comp. Phys. 48, 387-411, 1982.
13. B.F. Armaly, F. Durst, and B. Schonung, "Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow," J. Fluid Mech., 127, 473, 1983.
14. R.F. Cuffel, L.H. Back, and P.F. Massier, "Transonic flow field in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature," AIAA J., 7, 7, 1364, 1969.

15. 고 현, 강신재, 윤웅섭, “예조건화를 이용한 모든 마하수 유동장 계산”, 한국항공우주공학회 춘계학술발표회 논문집, 1998.
16. 고 현, “연소기 내부유동 해석을 위한 다중블럭 유한차분법에 관한 연구,” 전북대학교 석사학위 논문, 1998.

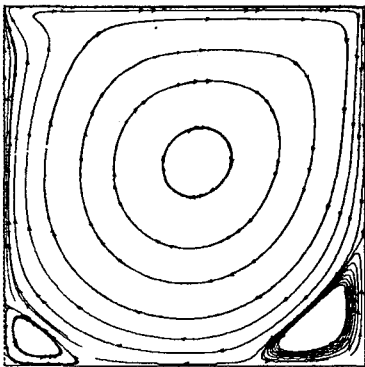


(a) 유선

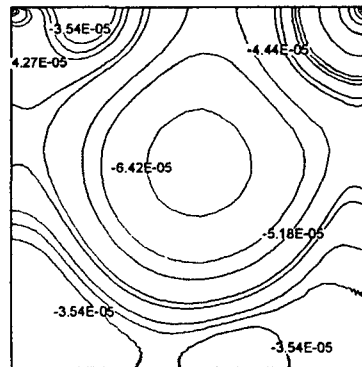


(b) 압력 등가곡선

그림1. Cavity 유동의 Re=400에서 유선과 압력분포



(a) 유선



(b) 압력 등가곡선

그림2. Cavity 유동의 Re=1000에서 유선과 압력분포

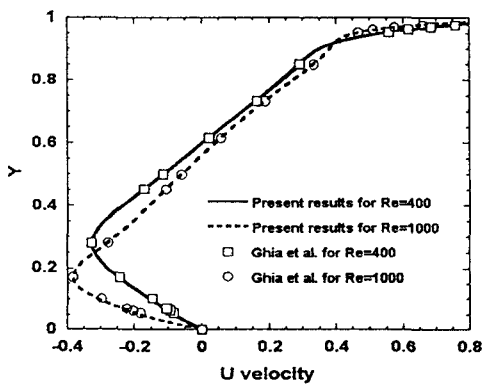


그림 3. Cavity의 축방향 속도변화 비교

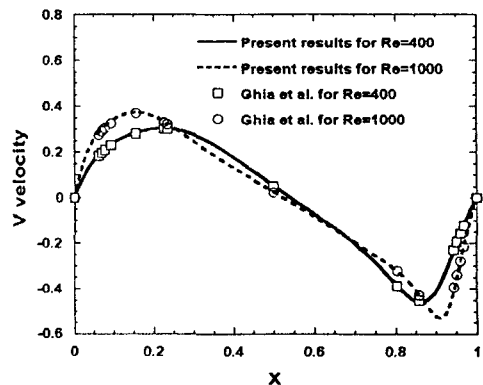


그림 4. Cavity의 수직방향 속도변화 비교

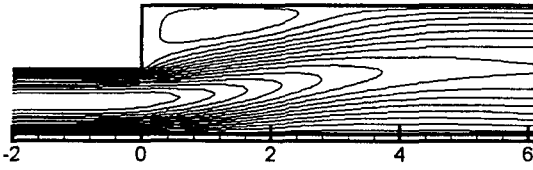


그림 5a. 후향계단 유동의 $Re=100$ 에서
축방향속도 증가곡선

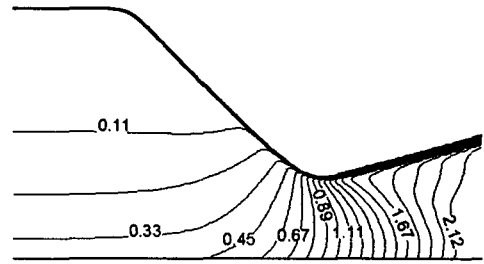


그림 6. JPL노즐의 마하수 증가곡선

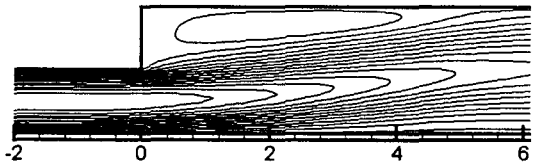


그림 5b. 후향계단 유동의 $Re=200$ 에서
축방향 속도 증가곡선

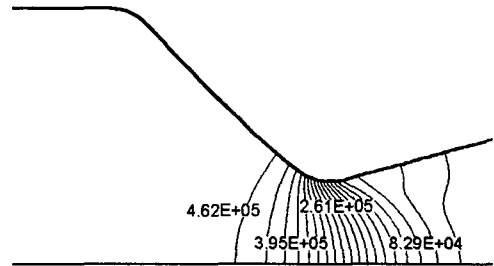


그림 7. JPL노즐의 압력 증가곡선

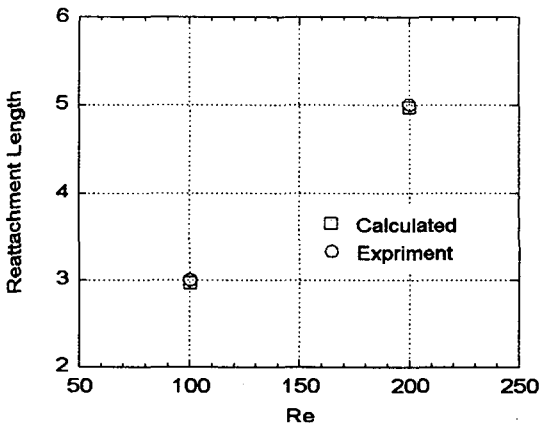


그림 5c. 후향계단 유동의 Re 에 따른
재부착길이 비교

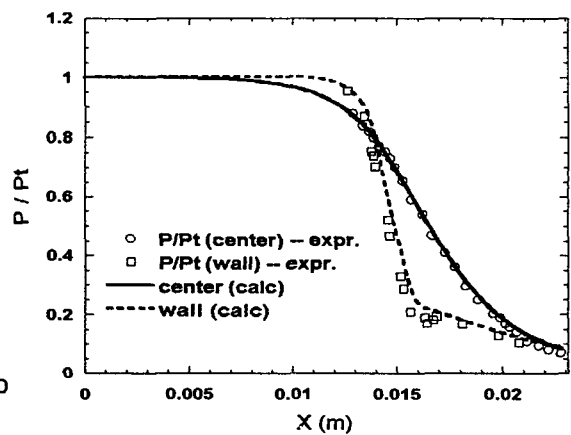


그림 8. JPL 노즐의 벽면과
중심선에서의 압력분포