

비구조 혼합 격자에서 내재적 방법을 이용한 비압축성 유동해석

김 종태^{*1}, 김 옹모^{*2}, 맹 주성^{*2}

Implicit Incompressible flow solver on Unstructured Hybrid grids

J. Kim, Y.M. Kim, and J.S. Maeng

Three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations have been solved by the node-centered finite volume method with unstructured hybrid grids. The pressure-velocity coupling is handled by the artificial compressibility algorithm and convective fluxes are obtained by Roe's flux difference splitting scheme with linear reconstruction of the solutions. Euler implicit method is used for time-integration. The viscous terms are discretised in a manner to handle any kind of grids such as tetrahedra, prisms, pyramids, hexahedra, or mixed-element grid. The numerical efficiency and accuracy of the present method is critically evaluated for several example problems.

Key words: 내재적 방법(Implicit Method), 비구조 혼합격자(Unstructured Hybrid grid), 비압축성 유동(Incompressible flow)

1. 서론

구조격자에 비하여 격자생성의 자동화가 훨씬 용이한 비구조(혹은 비정렬)격자는 항공기와 같이 형상이 복잡한 물체 주위의 비점성 유동해석에 매우 유용한 도구로 사용되고 있다. 그러나 점성 유동의 경계층을 정확히 해석하기 위해서는 벽면에 당겨진 종횡비가 큰 격자의 생성이 필수적이며 단순히 정사면체나 정육면체에 가까운 격자로는 점성유동장의 정확한 해석은 매우 힘들다. 현재 비구조격자를 이용한 점성유동 해석에서 여러 가지 방법이 제시되고 있는데, 종횡비가 큰 사면체를 벽면 근처에 생성함으로써

전영역에 걸쳐 사면체 셀로만 격자를 구성하는 방법[1]과, 벽면 근처에서는 프리즘의 셀을 생성하고 그 외의 영역에서는 사면체나 육면체의 셀을 생성하는 혼합격자법, 그리고 벽면 부근에서는 구조격자를 생성하고 나머지 영역을 비구조의 격자를 사용하는 방법 등이다. 첫 번째 방법은 전 유동영역을 사면체만으로 채움으로써 해석코드가 간단해질 수 있다. 그러나 Barth[2]는 종횡비가 큰 사면체에서 격자점을 중심으로 메디안 셀을 생성하면 불필요한 대각의 모서리로 인하여 메디안 셀이 크게 찌그러지고 대류 플럭스에 많은 수치오차가 발생함을 보였다. 이는 셀 중심법으로 이산화하는 경우에도 마찬가지로 벽면에서 경사지게 존재하는 삼각면은 대류 플럭스에 큰 수치오차를 포함시키며, 점성플럭스의 계산에 있어서도 해를 불안정하게 만들

^{*1} 정희원, 한양대 산업과학연구소

^{*2} 정희원, 한양대 기계공학과

며 해의 수렴성이 매우 취약하다. Michal등[3]은 발달된 구조격자 코드와 비구조격자의 비점성 유동해석 코드를 통합하여 구조/비구조 혼합격자 기법을 개발하였다. 벽면 근처는 구조형 다중격자를 생성하여 경계층을 효율적으로 계산하며, 벽면에서 떨어진 곳에서는 사면체의 비구조격자를 이용하여 비점성 유동으로 해석하는 점성/비점성 영역분할법(zonal method)을 사용하였다. 그러나 이 방법은 유동해석 관점에서는 사면체 격자에 비해 계산시간이 효율적이라 말할 수 있으나 벽면에서 구조격자를 생성해야 하는 어려움이 있으며, 구조격자 해석코드가 있는 경우에만 가능하다. Nakahashi[4], Kallinderis[5] 등은 사면체, 오면체(프리즘, 피라미드)를 자동 생성하고 유동해석하는 기법을 개발하였다. 점성경계층에는 프리즘을 적층함으로써 종횡비가 크고 찌그러짐이 거의 없는 셀을 생성하였으며 비점성영역은 양질의 사면체를 생성함으로써 계산효율을 증대시켰다. Karman[6]은 직교격자의 한계성을 극복하기 위하여 벽면근처에 프리즘을 생성하는 직교/프리즘 혼합격자를 이용하였으며, Coirier[7], Strang[8] 등은 사면체, 오면체, 육면체의 혼합격자에서 셀중심기법을 이용하여 점성유동을 해석하였다. 비구조 혼합격자를 사용하는 방법은 사면체 격자만을 사용하는 경우보다 셀, 모서리, 면의 수를 대폭 줄일 수 있어 계산시간과 주기억장소 측면에서 보다 효율적이고 프리즘은 종횡비가 큰 사면체가 갖고 있는 셀의 찌그러짐이 없으므로 더 정확하게 플럭스를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 점성유동해석에 큰 장점을 갖고 있는 혼합격자를 이용하여 비압축성 유동을 해석하는 기법을 개발하고 실린더와 구 주위의 유동을 해석하였다.

2. 지배방정식과 수치해법

2.1 지배방정식

Chorin[9]이 제안한 방법에 따라 비압축성 Navier-Stokes 방정식에서 압력과 속도를 연결하기 위하여 연속방정식에 압력의 비정상 항을 도입한다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

여기서 β 는 인공압축성의 매개변수이다.

해가 정상상태에 도달하면 식 (1)은 원래의 연속방정식 형태가 된다. 식 (1)을 운동량 방정식과 연결하면 다음과 같은 조합된 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} Q dV + \oint_{\partial \Omega} \vec{F} \hat{n} dS = \oint_{\partial \Omega} \vec{F}_o \hat{n} dS \quad (2)$$

$$Q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \beta(u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \\ u(u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) + p\hat{i} \\ v(u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) + p\hat{j} \\ w(u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) + p\hat{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k} \\ \tau_{xy}\hat{i} + \tau_{yy}\hat{j} + \tau_{yz}\hat{k} \\ \tau_{xz}\hat{i} + \tau_{yz}\hat{j} + \tau_{zz}\hat{k} \end{bmatrix}$$

점성응력은 비압축성의 가정에 의하여 발산항을 제거하면 다음과 같다.

$$\tau_{xx} = 2\nu u_x, \quad \tau_{yy} = 2\nu v_y, \quad \tau_{zz} = 2\nu w_z$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \nu(u_y + v_x), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \nu(u_z + w_x)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \nu(v_z + w_y)$$

2.2 수치해법

임의의 셀(사면체, 프리즘, 피라미드, 육면체 등)로 이루어진 격자계에서 격자점을 공유하고 있는 셀을 이용하여 셀의 중점, 면의 중점, 모서리의 중점 들을 차례로 이어 검사체적을 재구성한다. 이것을 매디안 셀(median cell)이라고 부

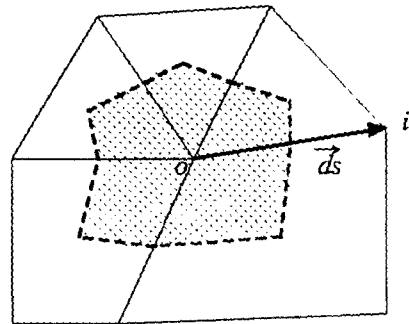


Fig. 1 Median dual control volume and edge direction vector on a hybrid mesh

르며 유한체적법을 적용시키는 검사체적이 된다. 이 방법은 단순히 사면체로 구성된 비구조 격자뿐만 아니라 비구조 혼합격자(Unstructured hybrid grid)에서도 적용이 가능하다. 지배방정식의 적분형태는 다음과 같은 이산화식으로 표현할 수 있으며 식(3)을 각각의 검사체적에 적용시켜 수치계산을 수행한다.

$$\frac{d}{dt}(Q_o V_o) + \sum_{i=1}^{N_s} (\vec{F} - \vec{F}_o)_i \cdot \vec{A}_i = 0 \quad (3)$$

식 (3)의 하첨자 i 는 모서리에 의해 격자점 o 에 연결된 이웃하는 임의의 격자점을 나타내고 \vec{A}_i 는 검사면(control surface)의 면적벡터이다. 대류항은 MUSCL법을 이용한 2차 정확도의 Roe 플럭스로 이산화하며, 점성항은 임의의 셀에서도 이산화 가능한 방법으로 중앙차분한다. 시간에 대해서 Euler 음해법을 이용하면 블록 매트릭스(Block matrix)형태의 이산화방정식이 생성되며, 이것은 Jacobi 반복법을 이용하여 해를 구한다.

2.2.1 비점성 플럭스 계산

대류 플럭스는 다음과 같이 셀 경계면을 따라 차분된 형태로 표현할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{N_s} \vec{F}_i \cdot \vec{A}_i = \sum_{i=1}^{N_s} \phi(Q_o, Q_i, \hat{n}) A_i \quad (4)$$

N_s 는 o 점을 공유하는 모서리의 수이고 ϕ 는 셀 경계면에서 계산한 수치 플럭스이다.

셀 경계면에서 플럭스를 계산하는 방법은 중앙차분법과 흐름차분법으로 크게 나눌 수 있다. 본 연구에서는 해의 정확도와 수렴안정성을 위하여 Roe[10]의 플럭스를 사용하였다.

$$F_i = 1/2 [F(Q) + F(Q_r) - |A| (Q_r - Q)] \quad (5)$$

Q_o 와 Q_r 은 검사면의 왼쪽과 오른쪽의 상태를 나타내는 유동변수이다. $|A|$ 는 비점성 플럭스벡터의 특성벡터 행렬을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$|A| = [R] [|A|] [L] \quad (6)$$

[R]과 [L]은 플럭스 벡터의 자코비안 행렬 [A]를 상사변환하여 얻은 특성벡터 행렬이고, [A]는 특성값 행렬이다.

Q_o 와 Q_r 은 다음과 같이 Taylor series를 이용하여 선형적으로 외삽하였다.

$$Q(x, y) \approx Q(x_o, y_o) + \nabla Q_o \cdot \vec{dr} \quad (7)$$

격자점에서 해의 구배를 구하기 위해 최소자승법을 이용하였다.

2.2.2 점성 플럭스 계산

점성 플럭스는 다음과 같이 유동변수와 변수의 1차 도함수로 표현된다.

$$F_o = F_o(Q, \nabla Q) \quad (8)$$

검사면에서 해의 구배를 구하기 위해서는 검사면을 포함하는 새로운 검사체적을 구성해야 하는 어려움이 있다. 여기서는 해의 구배를 모서리 방향의 성분은 직접 차분한 값을 사용하고 나머지 성분은 두 격자점의 평균 값으로 처리하였다.

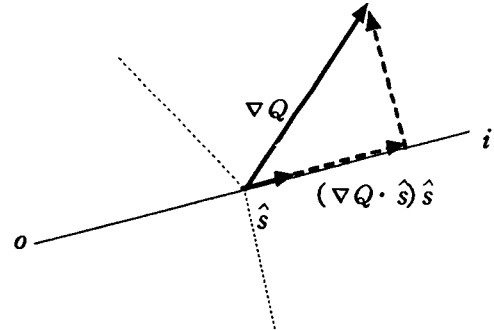


Fig. 2 Splitting of the gradient on the control face

$$\begin{aligned} \nabla Q &= (\nabla Q \cdot \hat{s}) \hat{s} + [\nabla Q - (\nabla Q \cdot \hat{s}) \hat{s}] \\ &\approx (\overline{\nabla Q} \cdot \hat{s}) \hat{s} + [\overline{\nabla Q} - (\overline{\nabla Q} \cdot \hat{s}) \hat{s}] \quad (9) \\ &= \frac{(Q_i - Q_o)}{ds} \hat{s} + [\overline{\nabla Q} - (\overline{\nabla Q} \cdot \hat{s}) \hat{s}] \end{aligned}$$

여기서 \hat{s} 는 모서리 방향의 단위 벡터이고, ds 는 그 길이를 나타낸다. $\overline{\nabla Q}$ 는 $(\nabla Q_o + \nabla Q_r)/2$ 이다.

2.2.3 시간 적분

시간에 대해서는 Euler 음해법을 이용하여 이산화한다.

$$\frac{d}{dt}(Q_o V_o) + R_o^{(n+1)} = 0 \quad (10)$$

$$R_o^{(n+1)} = \sum_{i=1}^N [F_i^{(n+1)} S_i - F_{Vi}^{(n+1)} S_i]$$

n+1 단계에서의 잔류오차는 Taylor series를 이용하면 다음과 같이 선형화시킬 수 있다.

$$R_o^{(n+1)} = R_o^n + \left(\frac{\partial R_o}{\partial Q}\right)^n \Delta Q \quad (11)$$

식 (10)에 (11)를 대입하고 시간증분 혹은 반복 계산에 의한 수정값 ΔQ 로 정리하면 델타형(delta form)의 이산화 방정식을 얻는다.

$$\left(\frac{V_o}{\Delta t} [I] + \left(\frac{\partial R_o}{\partial Q}\right)^n\right) \Delta Q = -R_o^n \quad (12)$$

대류항의 자코비안은 1차 정확도만을 고려하고, Roe 자코비안 행렬은 상수라 가정하여 근사적인 대류 플럭스 자코비안을 계산한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_o}{\partial Q_o} &= \frac{1}{2}(A_l + |A|) \\ \frac{\partial F_o}{\partial Q_i} &= \frac{1}{2}(A_r - |A|) \end{aligned} \quad (13)$$

점성 플럭스에 대해서는 라플라스 형의 점성플럭스만을 고려하고 식 (9)의 둘째 항을 무시하고 대입하여 정리하면

$$\sum F_o^* \approx \sum \mu \nabla u \vec{A} \approx \sum \mu \left(\frac{\delta Q}{\delta s} \hat{s}\right) \vec{A} \quad (14)$$

이 되고, 결국 점성 플럭스의 자코비안은 식 (14)에서 δQ 를 제외한 계수로 이루어진 대각행렬이 된다.

2.2.4 이산방정식의 해법

식 (12)의 이산방정식의 좌변은 매우 성긴

구조를 갖고 각각의 요소는 4X4의 행렬로 이루어져 있어서 구조적자에서 많이 사용되고 주기역장소의 사용에서 효율적인 TDMA등과 같은 방법은 사용할 수 없다.

식 (12)의 좌변행렬을 대각성분과 나머지로 나누어 표현할 수 있다.

$$(D + L + U)\Delta Q = RHS \quad (15)$$

Jacobi 법은 다음과 같이 대각행렬만 남기고 나머지 부분은 우변으로 넘김으로써 셀간의 연결성을 제거하는 방법이다.

$$D\Delta Q_o = RHS - (L + U)\Delta Q_i \quad (16)$$

본 연구에서는 각각의 모서리에서 2 개의 플럭스 자코비안 A^+ , A^- 를 구한 뒤 내부반복계산에서 이용하였으며 20번의 내부반복을 수행하였다.

3. 결과 및 고찰

3.1 3차원 원주 주위의 점성유동

직경이 1이고 길이가 2인 원통 주위의 낮은 레이놀즈 수 유동에 대하여 해석하였다. 먼저 2차원 원주에 대하여 삼각형과 사각형으로 구성된 격자를 생성한 뒤 원주의 축방향으로 적층하였다. 2차원에서 격자점 수는 9143개이며, 삼각

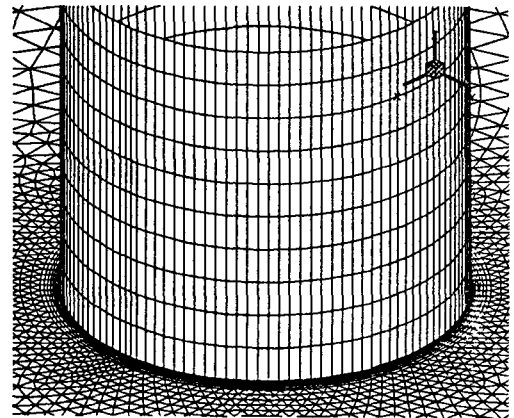


Fig. 3 Mixed element grid around cylinder, npoin=100573, npri=153890, nhex=13410

형은 15389개, 사각형은 1341개이다. 길이방향(z 방향)으로 11개의 격자점을 등간격으로 분포시켰다. 레이놀즈 수가 40인 경우 유동은 정상상태이며 원주 뒤에 발생하는 와동은 이탈하지 않고 벽면에 부착되어 있다. Fig. 4는 $z=1$ 인 원주의 중간 단면에서 압력장을 보여준다. 벽면에서 등압력선도가 찌그러짐 없이 이어져 있고, 원주 후류에서 와도에 의해서 압력이 구배가 작음을 알 수 있다.

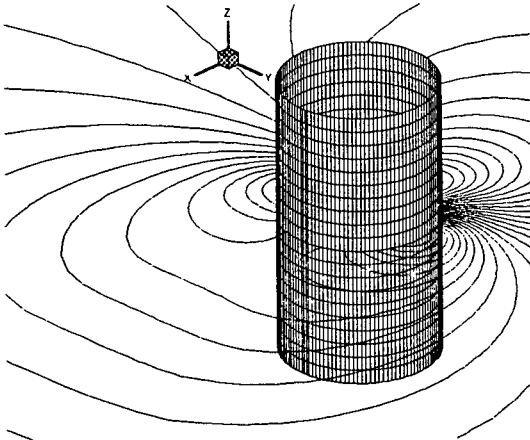


Fig. 4 Pressure contours for incompressible laminar flow around cylinder at $z=1$, $Re_D = 40$

Fig. 5는 같은 단면에서 속도장을 나타낸 것으로, 1쌍의 대칭적인 와동이 원주 후류에 존재함을 볼 수 있다.

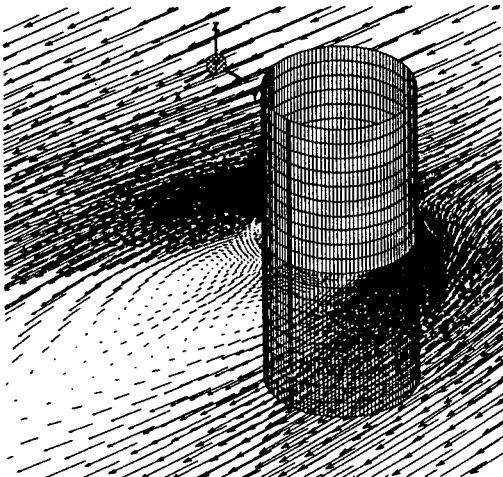


Fig. 5 Velocity vectors for incompressible laminar flow around cylinder at $z=1$, $Re_D = 40$

Coutanceau등[11]은 원통형 수조에서 원주를 정속도로 이동시키면서 후류의 속도와 박리길이 등을 측정하였다. 수조의 벽면효과를 고려하기 위하여 원주직경과 수조의 직경비를 이용하여 벽면효과를 나타내는 매개변수 λ 를 정의하였다. Fig. 6은 실험치와 2차원 및 3차원의 계산결과를 비교한 것으로, 2차원 결과는 $z=1$ 인 단

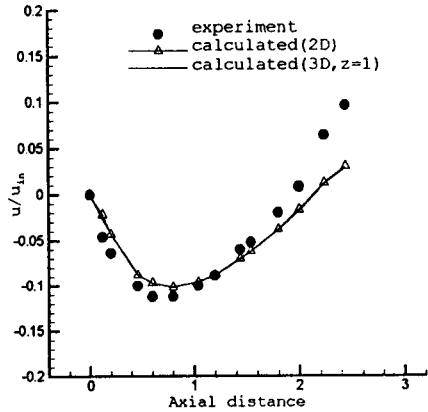


Fig. 6 Comparison of computed and experimental wake centerline velocity, $Re_D = 40$

면에서의 결과와 일치하는 것을 볼 수 있으며 실험치와는 약간의 차이를 보이고 있다. 실험치는 λ 가 0.07일 때의 값으로 2개의 z 평면에서 미끄럼 조건을 사용하여 계산한 값과 차이가 있는 것은 당연하다. Coutanceau등은 λ 에 따른 박리길이 변화를 고찰하고 원주 길이가 무한대 ($\lambda=0$)인 경우에 대하여 박리길이를 2.13으로

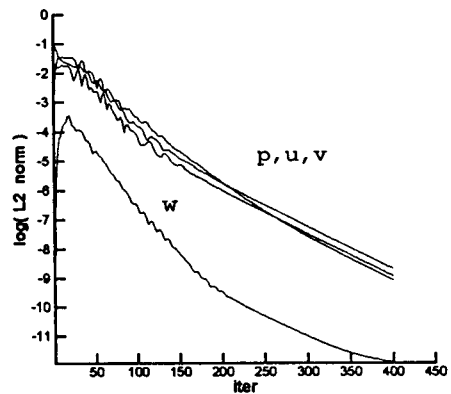


Fig. 7 Convergence rates for incompressible laminar flow around cylinder, $Re_D = 40$

추정하였으며, Fig. 6의 계산값은 u/u_m 이 0인 점이 2.13으로 일치하고 있다.

Fig. 7에서 원주 유동에 대한 수렴성을 볼 수 있으며 사용된 CFL은 500이었다.

3.2 3차원 구 주위의 점성유동

Taneda[12]는 실험을 통하여 레이놀즈 수가 20이하인 구 주위의 유동에서는 박리가 발생하지 않으며, 20에서 400사이의 레이놀즈 수에서 정상상태의 박리가 발생하고 400이상에서는 후류에 진동이 발생하는 것을 알았다. 본 연구에서는 수치해석기법의 검증에 위하여 레이놀즈 수가 50, 75, 100인 경우 구 주위의 비압축성 점성 유동을 해석하였다. 먼저 완전한 구 표면에 6416개의 삼각격자를 생성한 뒤 반경방향으

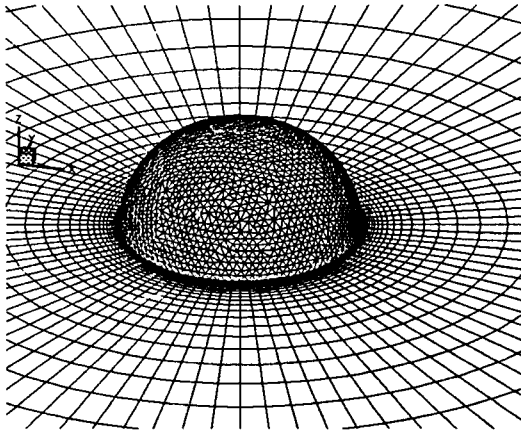


Fig. 8 Prismatic grid around sphere, npoin=128400, npri=250224

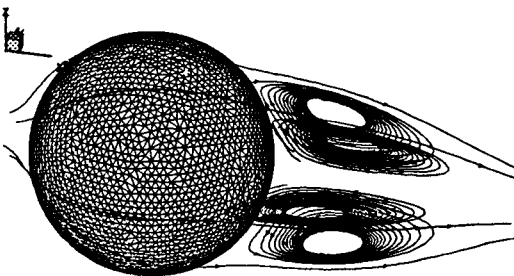


Fig. 9 Streamlines to show the recirculating wake behind sphere at $Re_D = 100$

로 40개의 격자점을 적층하여 250224개의 프리즘을 생성하였다. Fig. 8은 구 표면과 $z=0$ 인 단면에서의 격자를 보여준다. 구 표면에서 고리모양의 박리 와(vortex ring)가 생성되고 구 후미에서는 Fig. 9에서 볼 수 있는 것처럼 대칭 와동이 벽면에 부착되어 있다. 그리고 수치해석으로 구한 후류와의 길이를 Fig. 10에서 Taneda의 실험치와 비교하였다.

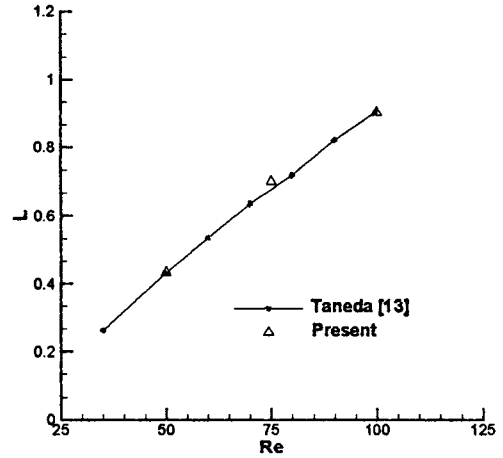


Fig. 10 Comparison of the variation of eddy length

Fig. 11은 구 주위의 유동에 대하여 수렴특성을 보여주며, 펜티엄(300Mhz) PC에서 177분이 소요되었다. 수치계산은 실수 8바이트를 사용하였고 CFL은 100이었다.

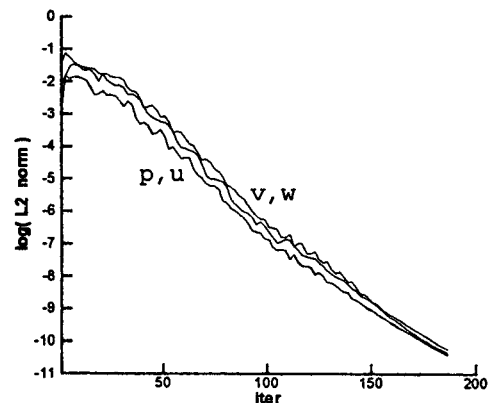


Fig. 11 Convergence rates for incompressible laminar flow around sphere, $Re_D = 100$

4. 결론

비구조 혼합격자를 사용한 비압축성유동 해석 기법을 개발하였으며, 3차원 원주 주위 및 구 주위의 점성유동을 해석하여 정확도와 수렴성을 보였다. 프리즘을 벽면 근처에 적층함으로써 중형비가 크면서 찌그러짐이 없는 격자를 생성할 수 있으며 격자의 모서리 수를 줄여 계산의 효율을 높일 수 있었다. 앞으로 난류 모델을 도입함으로써 이 해석 기법의 활용성을 높일 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] Pirzadeh, S., "Three-Dimensional Unstructured Viscous Grids by the Advancing Layer Method," AIAA J., Vol.34, No.1 (1996), pp.43-49
- [2] Barth, T.J., "Numerical Aspects of Computing Viscous High Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes," AIAA paper 91-0721 (1991)
- [3] Michal, T. and Johnson, J., "A Hybrid Structured/Unstructured Grid Multi-Block Flow Solver for Distributed Parallel Processing," AIAA paper 97-1895 (1997)
- [4] Nakahashi, K., "Adaptive-Prismatic-Grid Method for External Viscous Flow Computations," AIAA paper 93-3314 (1993)
- [5] Kallinderis, Y. et al., "Hybrid Prismatic/Tetrahedral Grid Generation for Complex Geometries," AIAA paper 93-0669 (1993)
- [6] Karman, S., "SPLITFLOW: A 3D Unstructured Cartesian/Prismatic Grid CFD Code for Complex Geometries," AIAA paper 95-0343 (1995)
- [7] Coirier, W.J. and Jorgenson, C.E. "A Mixed Volume Grid Approach for the Euler and Navier-Stokes Equations," AIAA paper 96-0762 (1996)
- [8] Strang, W.Z., "Cobalt User's Manual," WL/FIMC WPAFB, OH 45433 (1995)

- [9] Chorin, A.J., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," Math. Comp., Vol.22, No.104, (1968), pp.745-762
- [10] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors and Difference Scheme," J. of Comp. Phys., Vol.43, (1979), pp.357-372
- [11] Coutanceau, M., and Bouard, R., "Experimental Determination of the Main Features of the Viscous Flow in the Wake of a circular Cylinder in Uniform Translation," J. Fluid Mech., Vol.79, No.2, (1977), pp231-256
- [12] Taneda, S., "Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers," J. Phys. Soc. Japan Vol.11, (1956), pp1104-1108