

비정형격자 압력기준 유동해석기법을 이용한 비압축성 유동해석

김 종태^{*1}, 김 태준^{*2}, 김 응모^{*3}

Unstructured-grid Pressure-based Method for Analysing Incompressible flows

J. Kim, T.J. Kim and Y.M. Kim

The pressure-based methods are very popular in CFD because it requires less computer core memory compared to other coupled or density-based solvers. Currently structured-mesh methodology based on pressure-based algorithm is quite mature to apply to the practical problems. The unstructured mesh method needs much more computer memory than the structured-mesh method. However the pressure-based method utilizing the sequential approach does not require very large memory used for unstructured-mesh density-based solvers. The present study has developed the unstructured grid pressure-based method. Cell-centered finite volume method was selected due to robustness for imposing various boundary conditions and easy implementation of higher-order upwind scheme. The predictive capability of present method has validated against several benchmark problems.

Key words: 압력기준(Pressure-based) , 비구조격자(Unstructured grid), 비압축성 유동
(Incompressible flow)

1. 서론

압력을 기반으로 방정식을 순차적으로 푸는 SIMPLE 계열의 유동해법은 여러 물리적 모델을 도입하기가 쉽고 적은 컴퓨터 메모리로도 활용도가 높은 반면, 밀도기준의 동시해법은 특히 내재적인 방법을 사용하는 경우 플럭스 자코비안의 계산이 복잡하고 많은 메모리를 요구한다. 비구조격자는 구조격자와 달리 격자의 연결자료를 부가적으로 저장하여야 하기 때문에 밀도기

준 동시해법을 비구조격자에 적용하는 경우 메모리의 제약을 크게 받는다. 반면에 순차적해법은 비구조격자에서도 상대적으로 메모리의 제약을 덜 받는 방법이다.

비구조격자에 순차적해법을 적용시키는 이산화 기법에는 유한요소법(FEM), 검사체적유한요소법(CVFEM), 유한체적법 등이 있다. Benim et. al[1] 등은 유한요소법을 사용하였으며, Baliga et. al[2] 등은 CVFEM을 이용하였다. 그리고 Jiang et. al[3], Shang et. al[4], Mathur et. al[5] 등은 유한체적법을 비구조격자에 적용시켰다.

본 연구에서는 다면체의 혼합격자를 사용하기 쉽고 3차원으로 확장이 용이한 유한체적법을 사용하였다. 유동변수를 셀 중심에 저장하였으며

^{*1} 정회원, 한양대 산업과학연구소

^{*2} 한양대 대학원

^{*3} 정회원, 한양대 기계공학과

이 방법은 유동장의 경계조건을 셀 면에 부여하므로 많은 종류의 경계조건을 쉽게 도입할 수 있다. 압력과 속도를 같은 장소에 저장하였으며 이로 인한 압력의 체커판 현상을 막기 위하여 Rhie 등[6]의 압력가중보간법을 이용하였다. 2차 정확도의 흐름차분으로 대류 플럭스를 계산하였으며 이를 위하여 해를 선형적으로 재구성하였다. 점성 플럭스는 주확산항과 엇확산항으로 나누고 주확산항은 검사면에 이웃하는 두 셀을 이용하여 내재적으로 처리하고 엇확산항은 해의 재구성에 의해 얻어진 셀 중심의 구배를 이용하여 외재적으로 처리함으로써 격자점에 해를 내삽하는 필요를 제거하였다. 모든 계산은 면 기준 격자 연결자료만을 사용하여 임의의 다면체에 대하여 적용이 가능하게 하였다. 이산화된 방정식은 매우 성기고 큰 행렬식을 구성하게 되며 Gauss-Seidel 반복법을 이용하여 해를 구하였다.

2. 지배방정식과 수치해법

2.1 지배방정식

열전달을 고려하지 않은 비압축성 유동방정식은 다음과 같이 연속방정식과 운동량방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) \quad (1)$$

2.2 수치해법

수치계산 영역은 임의의 모양의 셀로 구성되며 각각의 셀이 바로 검사체적이 되고 압력과 속도성분을 모두 셀의 중심에 저장하는 셀중심 유한체적법을 사용한다. 각 셀은 여러개의 면으로 이루어져 있고 각 면의 중심에서 플럭스를 계산하여 적분한다. 대류항은 2차 정확도의 흐름차분으로 계산하기 위하여 최소자승법을 도입하여 해를 선형적으로 재구성하는 방법을 사용하였으며, 셀 면에서 필요한 값들은 이웃하는 두 셀의 값을 거리가중 평균하여 사용한다. Fig. 1은 임의의 셀과 수치계산에 필요한 기하 벡터를

보여주고 있다.

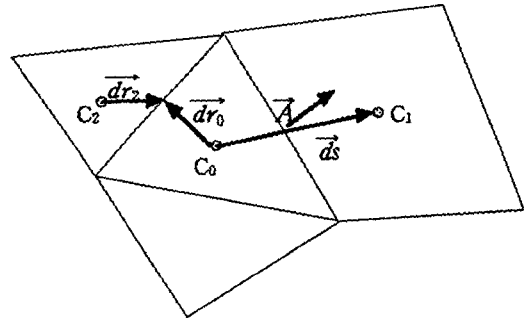


Fig. 1 Control volume and necessary geometric vectors

여기서 C_0, C_1, C_2 등은 셀 1, 2, 3의 중점을 나타내며, \vec{A} 는 면적 벡터, $d\vec{s}$ 은 두 셀 중점을 잇는 변위 벡터, $d\vec{r}$ 은 셀 중점과 면의 중점을 잇는 변위 벡터이다.

2.2.1 수송 방정식

속도성분 및 임의의 스칼라 ϕ 에 대한 수송방정식을 검사체적에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int \phi(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) = \int \Gamma \nabla \phi \cdot d\vec{A} + \int S_\phi d\Omega \quad (2)$$

대류 플럭스와 점성 플럭스의 연속적인 면적분을 셀 면의 중점에서의 값을 이용한 Gauss 적분으로 이산화하게 된다.

$$\begin{aligned} \sum_f (\phi \rho \vec{V} \cdot \vec{A})_f &= \sum_f J_f \phi_f \\ \sum_f (\Gamma \nabla \phi \cdot \vec{A})_f &= \sum_f D_f \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 J_f 는 질량 플럭스를, 첨자 f 는 셀의 한 면을 나타내고 D_f 는 점성 플럭스이다. 대류 플럭스는 식 (4)와 같이 2차 정확도의 흐름차분법으로 구한다. 그리고 1차 항은 내재적으로 처리하며 고차의 수정항은 외재적인 방법으로 원천항에 더해진다.

$$J_f \phi_f = \max(J_f, 0) [\phi_0 + \nabla \phi_0 \cdot \overrightarrow{dr_0}] + \min(J_f, 0) [\phi_1 + \nabla \phi_1 \cdot \overrightarrow{dr_1}] \quad (4)$$

여기서 셀 내에서 변수의 구배를 계산하기 위해 최소자승법을 사용한다. 점성 플러스 D_f 는 다음과 같이 두 개의 항으로 나누고 첫째 항은 면의 좌우 셀을 이용하여 직접 차분을 하고 둘째 항은 고차의 대류 플럭스를 위해 계산된 셀 내의 변수 구배를 가중 평균한 값을 이용한다.

$$D_f = \Gamma_f [\widehat{\nabla} \phi \cdot \alpha \hat{s} + \overline{\nabla} \phi \cdot (\hat{n} - \alpha \hat{s})] A_f \quad (5)$$

$$\widehat{\nabla} \phi \cdot \alpha \hat{s} = \alpha \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{ds}$$

$$\overline{\nabla} \phi = (1 - g\beta) \nabla \phi_0 + g\beta \nabla \phi_1$$

여기서 $\hat{s} = \overrightarrow{ds}/ds$, $\hat{n} = \overrightarrow{A}/A$ 이다. α 는 수정계수로 Shang et. al[7], Ferziger et. al[8] 등은 1의 값을 사용하였다. 여기서는 국소좌표를 이용해 유도[5]된 $\alpha = 1/(\hat{n} \cdot \hat{s})$ 를 이용하였다. $g\beta$ 는 가중계수로서 $dr_0/(dr_0 + dr_1)$ 을 사용하였다. 그리고 면의 중점에서 질량 플럭스는 압력의 체커판 현상을 막기 위하여 압력가중보간법으로 다음과 같이 계산한다.

$$J_f = \rho_f \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{V}_f - \rho_f \left(\frac{\rho}{a} \right)_f \left[\frac{p_1 - p_0}{ds} - \overline{\nabla} p \cdot \hat{s} \right] aA \quad (6)$$

Ω 는 셀의 체적, a 는 이산화된 운동량 방정식의 대각 계수이다. 면의 중점에서 필요한 값들은 두 셀의 값을 거리 가중평균하여 사용한다.

운동량 방정식은 원천항에 압력구배를 포함하고 있으며 이것은 점성 및 비점성 플럭스와 마찬가지로 면적적분으로 치환하여 처리한다.

$$\int \nabla p d\Omega \approx \sum_f p_f \overrightarrow{A} \quad (7)$$

$$p_f = \frac{1}{2} [(p_0 + \nabla p_0 \cdot \overrightarrow{dr_0}) + (p_1 + \nabla p_1 \cdot \overrightarrow{dr_1})]$$

면의 중점에서 압력 p_f 는 이웃하는 두 셀에서 선형외삽을 하여 평균한 값을 이용한다.

2.2.2 압력보정 방정식

압력보정방정식은 연속방정식으로부터 구하게 된다.

$$\sum_f J_f = \sum_f (J_f + J'_f) = 0 \quad (8)$$

J'_f 는 운동량 방정식을 만족하는 속도를 식 (6)에 대입하여 얻은 질량 플럭스로 이것은 연속방정식을 만족시키지 못하며 보정항 J'_f 를 첨가함으로써 질량보존을 만족시킬 수 있다.

$$J'_f = -\rho_f \left(\frac{\rho}{a} \right)_f \left(\frac{p_1 - p_0}{ds} \right) aA \quad (9)$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 이산화된 압력보정 방정식을 얻는다.

$$-\sum_f \left[\rho \left(\frac{\rho}{a} \right) a \frac{A}{ds} \right]_f p_0 + \sum_f^{\text{nb}} \left[\rho \left(\frac{\rho}{a} \right) a \frac{A}{ds} \right]_f p'_{nb} = \sum_f J_f \quad (10)$$

식 (11)은 계수의 형식으로 나타낸 것으로 Gauss-Seidel 반복법을 이용한다.

$$a_0 p_0 + \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} = b \quad (11)$$

압력보정방정식으로부터 구한 p' 값을 이용하여 운동량 방정식에서 얻은 속도와 질량 플럭스, 전단계 압력을 보정하게 된다. 보정식은 다음과 같다.

$$p_0 = p_0 + \omega_p p_0$$

$$J_f = J_f + J'_f$$

$$\overrightarrow{V}_0 = \overrightarrow{V}_0 - \frac{\sum_f p'_f \overrightarrow{A}_f}{a_0} \quad (12)$$

3. 결과 및 고찰

시스템은 공조용 덕트등 산업에 많이 이용되고

3.1 2차원 공동 유동

2차원 비압축성 공동 유동은 기하학적 형상이 단순한 반면 일정속도로 움직이는 위쪽 벽면에 의해 1차의 큰 와동이 공동의 중심에 형성되고 모퉁이에서 2차의 와동이 생성되는 복잡한 유동 구조를 만들기 때문에 많은 연구자들에 의해 수치기법이나 알고리즘의 검증에 의해 해석되어 왔다. 본 수치해법의 특성을 파악하기 위하여 레이놀즈 수 5000에서 직사각형 격자와 그 격자의 점들을 무작위로 흩트려 Fig. 2에서 보는 바와 같은 찌그러짐이 심한 사각형 격자를 이용하였다.

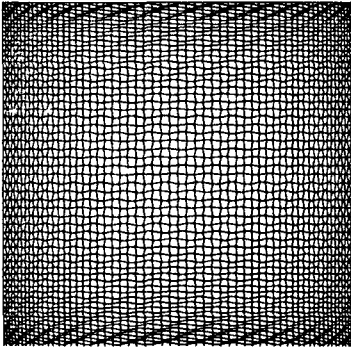


Fig. 2 Skewed quadrilateral mesh used for cavity flow, $n_{\text{poin}}=3721$, $n_{\text{quad}}=3600$.

Fig. 3은 찌그러진 사각형 격자를 이용하여 얻은 압력분포로 압력과 속도를 모두 셀 중심에 저장하는 비엇갈림 격자 기법을 사용하는 본 수치해법이 구불거림(wiggle)이 없는 압력장을 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 격자의 큰 중형비, 비뚤어짐(skewness) 등은 해의 정확도를 떨어뜨리는 원인이 된다. 격자의 비뚤어짐 정도가 해의 정확도에 미치는 정도를 파악하기 위하여 공동의 중심선에서 u 속도분포를 Ghia 등[9]의 해와 비교하였다. Fig. 4에서 볼 수 있듯이 본 수치해법은 2차원 공동 유동에서 격자의 비뚤어짐 정도가 해의 정확도에 영향을 거의 미치지 않는다.

3.2 2차원 T형 분지관 유동

하나의 관이 여러개의 관으로 나누어지는 관

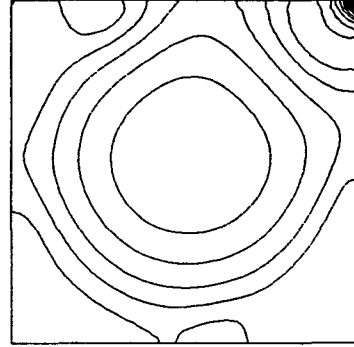


Fig. 3 Pressure contours of cavity flow at $Re=5000$ with skewed quadrilateral mesh used.

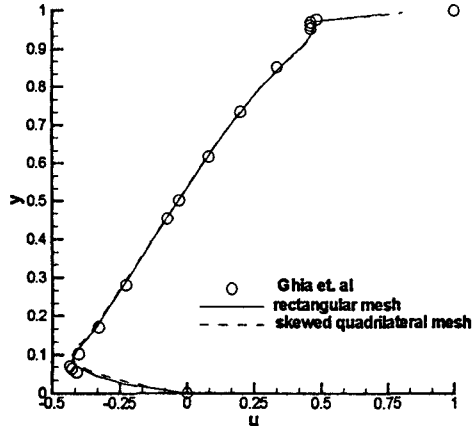


Fig. 4 Comparison of u velocity profiles to show the effect of grid skewness on the solution accuracy.

있는 것으로 정확한 유량을 예측하는 것은 매우 흥미로운 일이다. Fig. 5에서 보는 것처럼 두 분지관의 폭이 같은 T형의 2차원 형상에 대하여 동일한 출구압을 주고 레이놀즈 수에 따른 유량 배분률을 계산하였다. 5597 개의 삼각형 격자를 사용하였고 입구에서는 포물선형의 속도분포를 주었다. Fig. 6은 레이놀즈 수가 400일 때 유선을 보여주는 것으로 아래 분지관의 입구부에서 매우 큰 와동으로 인하여 분지관으로 배출되는 유량이 주 분지관에 비하여 아주 작을 것임을 짐작할 수 있다. 이 유동 규모는 아래 분지관이

마치 공동(cavity) 역할을 하는 것과 흡사하다.

Fig. 7은 입구유량에 대한 주 분지관으로 배출되는 유량의 비 f 와 레이놀즈 수의 관계를 보여주는 것으로 Hayes 등[10]의 결과와 매우 일치하고 있다.

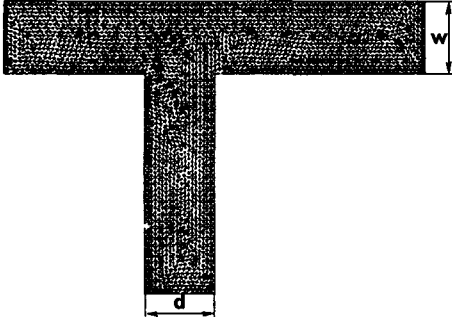


Fig. 5 Triangular mesh used for flow split in a 90° planar branch, $d=w$.

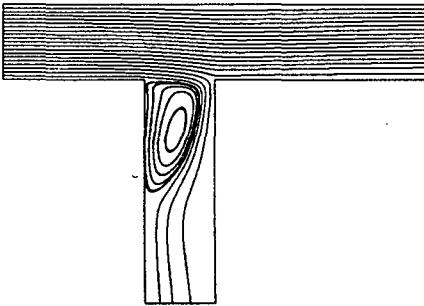


Fig. 6 Streamlines at $Re=400$ with equal exit pressures.

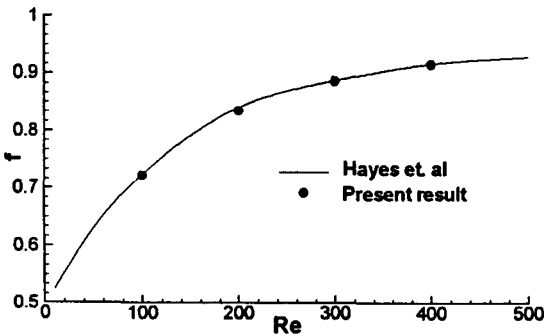


Fig. 7 Variation of the fractional flow rate in the main branch, f with Reynolds number.

3.3 3차원 공동 유동

레이놀즈 수 100에서 가로, 세로, 높이가 1인 3차원 공동내의 층류유동을 해석하였으며, 육면체 격자와 프리즘 격자를 사용하여 해를 비교하였다.

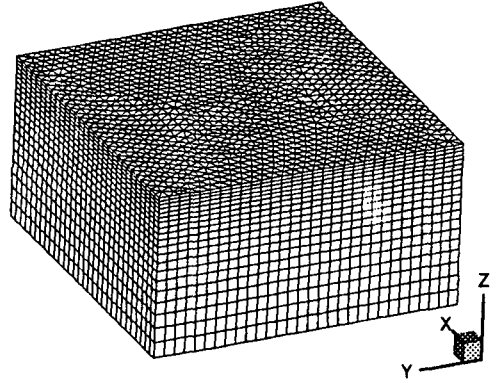


Fig. 8 Prismatic mesh of the 3D half cavity, upper surface is wall, and lower is symmetric. $n_{\text{poin}}=21609$, $n_{\text{pri}}=38720$.

육면체 격자는 $31 \times 31 \times 21$ 의 구조격자를 이용하여 18000개의 육면체 셀을 생성하였으며, 프리즘 격자는 $x-y$ 평면에서 1020개의 격자점과 1936개의 삼각형 격자를 생성하고 z 방향으로 20단 적층하여 38720개의 프리즘 셀을 생성하였다.

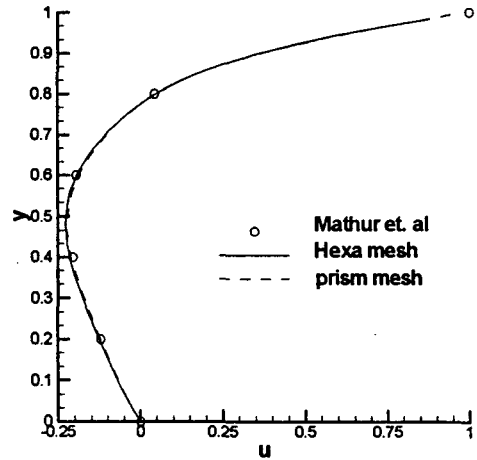


Fig. 9 u velocity on the center line of the 3D cavity.

Fig. 8에서 프리즘 격자를 볼 수 있으며 $y=1$ 인 이동평판에 대하여 상하 대칭이므로 반 영역만 해석하였다. Fig. 9는 공동의 중심선을 따라 u 속도를 비교한 것으로 육면체, 프리즘 모두 문헌 [7]의 결과와 거의 일치하고 있다. Fig. 10은 모든 셀에 대하여 오차의 절대값을 합한 값을 반복횟수에 따라 나타낸 것이다.

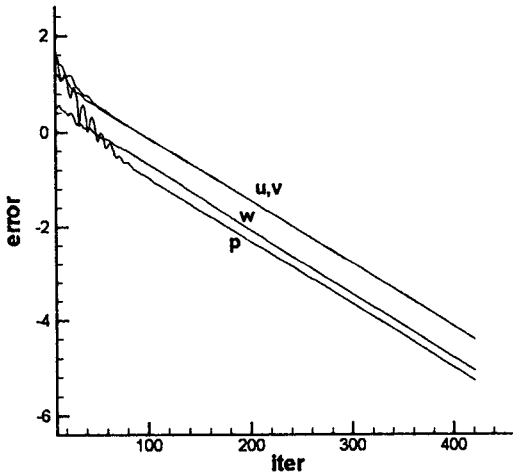


Fig. 10 Convergence rates for the computation of the 3D cavity flow.

4. 결론 및 앞으로의 과제

비압축성 유동해석을 위한 비구조격자 압력기준 유동해석 기법을 개발하였다. 압력과 속도를 셀 중심에 저장하는 유한체적법을 이용하였으며, 압력과 속도를 연결하기 위하여 SIMPLE 알고리즘을 적용시켰다. 대류항은 2차 정확도의 흐름차분으로, 점성항은 2차의 중앙차분으로 계산하였고 이산화 방정식은 Gauss-Seidel 반복법으로 해를 구하였다. 2차원 및 3차원의 여러 비압축성 층류 유동장을 해석하고 그 정확도를 평가하였다. 앞으로 CGS 계열의 행렬 연산기법이나 다중격자 기법 등을 도입함으로써 본 해석기법의 수렴성을 개선해야 할 것이다.

5. 참고문헌

[1] Benim, A.C. and Zinser, W, "A Segregated

Formulation of Navier-Stokes Equations with Finite Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol.57 (1986), pp.223-237

- [2] Baliga, R.B. and Patankar, S.V., "A Control-Volume Finite Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer," *Numer. Heat Transfer*, Vol.6 (1983), pp.245-261
- [3] Jiang, Y. and Przekwas, A., "Implicit, Pressure-Based Incompressible Navier-Stokes Equations Solver for Unstructured Meshes," AIAA paper 94-0305 (1994)
- [4] Shang, H.M. et. al, "A Hybrid Unstructured-Grid Method for Fluid Flow Computation," *ASME Numerical Developments in CFD*, FED-Vol. 215 (1995), pp55-61
- [5] Mathur, S.R. and Murthy, J.Y., "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes," *Numer. Heat Transfer, Part B*, Vol.31 (1997), pp.195-215
- [6] Rhie, C.M. and Chow, W.L., "Numerical Study of the Turbulent Flow past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol.21 (1983), pp.1523-1532
- [7] Shang, H.M. and Chen, Y.S., "Unstructured Adaptive Grid Method for Reaction Flow Combustion," AIAA paper 97-3183 (1997)
- [8] Ferziger, J.H. and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer Press (1996), pp.217-222
- [9] Ghia, U, Ghia, K.N. and Shin, C.T. "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comp. Phys.*, Vol.48 (1982), pp.387-411
- [10] Hayes, R.E. et. al, "Steady Laminar Flow in 90 Degree Planar Branch," *Compt. Fluids*, Vol.17 (1988), pp.537-553