

비선형 시스템 모델링을 위한 퍼지 모델 구성 알고리즘

최종수

포항산업과학연구원 자동화연구부

A Constructive Algorithm of Fuzzy Model for Nonlinear System Modeling

Jong-Soo Choi

Automation Research Division, RIST

**Abstract** - This paper proposes a constructive algorithm for generating the Takagi-Sugeno type fuzzy model through the sequential learning from training data set. The proposed algorithm has a two-stage learning scheme that performs both structure and parameter learning simultaneously. The structure learning constructs fuzzy model using two growth criteria to assign new fuzzy rules for given observation data. The parameter learning adjusts the parameters of existing fuzzy rules using the LMS rule. To evaluate the performance of the proposed fuzzy modeling approach, well-known benchmark is used in simulation and compares it with other modeling approaches.

1. 서 론

퍼지 모델은 입력을 출력으로 매핑시키는 퍼지 If-Then 규칙 집합으로 구성되고, 퍼지 규칙은 영역지식을 갖춘 전문가에 의해서 제공되거나 샘플 데이터에 의해서 학습된다. 많은 연구들을 통해서 퍼지 모델은 어느 정도의 정확도로 연속함수를 근사화할 수 있는 능력이 있음이 밝혀졌다. 그러나 최적의 퍼지 모델을 구성하는 것은 훈련 데이터를 fitting 시키는 것과 모델을 간단하게 유지하는 것 사이의 trade-off를 찾아야 할 필요가 있다. 간단한 퍼지 모델은 이해를 쉽게 할 뿐만 아니라 훈련 데이터의 overfitting을 방지할 수 있다. 그러나 모델을 간단하게 유지하는 것은 모델과 훈련 데이터 사이의 오차를 최소화하는 모델링 목적과 대립된다. 그러므로 모델링에 있어서 두 상반되는 모델링 목적 사이에서 최적의 trade-off 찾기 위한 체계적인 기반을 개발하는 것은 매우 중요한 이슈이다[1].

비선형 시스템의 퍼지 모델링을 위해 퍼지 모델의 규칙을 찾고 멤버십 함수의 파라미터를 최적화하는 연구들이 발표되었다[2-4]. 신경회로망은 퍼지-신경회로망의 형태로 퍼지 논리와 결합되었고 퍼지 모델을 구축하는데 이용되었다[5,6]. 또한, 신경회로망과 함께 유전알고리즘을 퍼지 논리에 결합하여 복합 퍼지 모델을 구축하는 연구들도 발표되었다[7,8]. 그러나, 대부분의 방법들은 신경회로망을 통해 파라미터를 학습하지만 학습을 시작하기전에 FCM(fuzzy c-means) 클러스터링 통해 입력공간의 분해하여 규칙의 수를 결정해야 한다. FCM 클러스터링 알고리즘은 최적의 클러스터 수를 항상 찾을 수 없으며 weighting exponent의 최적 선정을 위한 이론적 근거가 결여되어 있다. 더욱이 유전알고리즘의 이용은 많은 계산시간을 필요로 한다.

이 논문에서는 비선형 시스템의 모델링을 위해 훈련 데이터의 순차학습 (sequential learning)을 통해 퍼

지 모델을 구성하는 알고리즘을 제안한다. 제안한 알고리즘은 매우 간단하며 쉽게 대상 시스템에 적합한 퍼지 모델을 찾을 수 있고, 구조 학습과 파라미터 학습을 동시에 수행한다. 구조 학습은 적절한 입력 공간의 분해를 결정하며 규칙 생성 판별기준을 이용하여 모델 구조를 구성한다. 파라미터 학습은 생성된 퍼지 규칙의 전건부/후건부 파라미터를 조절하기 위해 LMS 규칙이 적용된다. 제안한 퍼지 모델 구성 알고리즘의 성능은 비선형 시스템 모델링 실험을 통해서 평가된다.

2. 퍼지 모델

퍼지 모델링에 있어서 지식의 표현은 대표적으로 다음 두 가지 형태로 분류 할 수 있다. 첫 번째 형태(Type A)는 Mamdani에 의해서 개발된 퍼지 모델로 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$R^i: \text{If } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and, } \dots, \text{ and } x_m \text{ is } A_m^i.$$

$$\text{Then } y^i \text{ is } B^i. \tag{1}$$

여기에서  $R^i(i=1,2,\dots,n)$ 는  $i$ 번째 퍼지 규칙을 의미하고,  $x_j(j=1,2,\dots,m)$ 와  $y_j$ 는 각각  $i$ 번째 규칙에서 입력 및 출력변수이다. 그리고,  $A_1^i, \dots, A_m^i$  및  $B^i$ 는 퍼지 멤버십 함수이다. 이 모델은 많은 분야에서 성공적인 적용들이 발표되고 있지만 너무 많은 규칙을 필요로 하는 단점이 있다. 즉, 전체 규칙 수는 시스템 변수 수의 지수함수로 알려져 있다. 복잡한 다변수 시스템에 대하여 이 모델을 이용하여 퍼지 모델 및 제어기를 구현하는 것은 비생산적인 일이다. 반면에 두 번째 형태(Type B)의 퍼지 모델은 Takagi-Sugeno(TS)에 의해서 제안된 모델로 규칙의 후건부가 입력변수의 선형회귀 함수로 구성되어 있다. TS 퍼지 모델은 type A의 단점을 완화시켜줄 수 있는 장점을 갖고 있다. 이러한 이유로 이 논문에서는 type B의 TS 퍼지 모델을 사용한다. TS 퍼지 모델의  $i$ 번째 규칙은 다음과 같이 표현된다.

$$R^i: \text{If } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and, } \dots, \text{ and } x_m \text{ is } A_m^i.$$

$$\text{Then } y^i = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_m^i x_m. \tag{2}$$

여기에서  $A_j^i$ 는 퍼지 집합이고,  $a_j^i$ 는 조정되는 후건부 파라미터이며,  $y^i$ 는  $i$ 번째 규칙의 출력이다.

TS 퍼지 모델의 전체 출력은 정규화된 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n h^i y^i}{\sum_{i=1}^n h^i} \tag{3}$$

여기에서  $h^i$ 는 입력에 대한  $i$ 번째 규칙의 전건부 발화 강도를 의미하며 다음과 같이 계산된다.

$$h^i = \mu_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_m^i(x_m) \quad (4)$$

여기에서 입력변수에 대한 멤버십 함수는 가우시안 함수를 사용하며,  $i$  번째 규칙의  $j$  번째 멤버십 함수값은 다음과 같다.

$$\mu_j^i(x_j) = \exp\left(-\frac{(x_j - c_j^i)^2}{(\sigma_j^i)^2}\right) \quad (5)$$

식 (4)는 몇 가지 전제조건하에서 Hunt 등[9]이 규명한 TS 퍼지 모델과 GRBF (Generalized Radial Basis Function) 신경회로망과의 동가성을 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h^i = \prod_{j=1}^m \mu_j^i(x_j) \quad (6)$$

### 3. 순차학습에 의한 퍼지 모델 구성

제안한 순차학습에 의한 퍼지 모델 구성 과정은 새로운 퍼지 규칙을 생성시키는 모델 구조 학습과 전진부의 멤버십 함수와 후진부의 파라미터를 갱신하는 모델 파라미터 학습이 동시에 이루어진다.

#### 3.1 모델 구조 학습

제안하는 퍼지 모델 구성 알고리즘은 학습이 시작될 때 0개의 규칙으로부터 출발하기 때문에 모델의 어떠한 파라미터도 초기화해줄 필요가 없다. 이것은 순차적으로 입력되는 훈련 데이터의 신규성을 검출하여 퍼지 규칙 유니트를 자동으로 생성하기 때문이다. 훈련 데이터쌍  $(x_n, y_n^d)$ 이 주어지면, 아래의 두 가지 생성조건을 만족하는 경우에 새로운 규칙이 생성된다.

$$\text{생성조건 1: } \|x_n - c_{nb}\| > \epsilon_n \quad (7)$$

$$\text{생성조건 2: } \delta > h^i \quad (8)$$

여기에서,  $c_{nb}$ 는 입력공간에서  $x_n$ 과 가장 가까운 유니트의 중심이고,  $\epsilon_n$ 은 적절한 선정해 주어야 할 문턱값이다. 생성조건 2에서 사용되는 문턱값  $\delta$ 는 전진부 멤버십 함수의 발화강도를 판별하는 기준으로 퍼지규칙의  $\epsilon$ -completeness에 기반을 둔다. 현재 퍼지 모델이  $k$ 개의 규칙을 갖고 있다면 새로이 생성되는  $k+1$ 번째 퍼지 규칙에 대한 전진부의 멤버십 함수와 후진부의 파라미터들은 다음과 같이 초기화된다.

$$c^{k+1} = x_n \quad (9)$$

$$\sigma^{k+1} = x(x_n - c_{nb}) \quad (10)$$

$$a_j^{k+1} = \begin{cases} e_n, & \text{if } j=0 (j=0, 1, \dots, m) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

여기에서  $x$ 는 입력공간에서 유니트의 중첩을 결정하는 요소이고,  $e_n$ 은  $y_n^d(x_n) - y_n(x_n)$ 로 목표치와 퍼지 모델 출력간의 오차이다. 초기에 거리  $\epsilon_n$ 은  $\epsilon_{\max}$ 로부터 시작하여 다음과 같이 지수함수로 감소한다.

$$\epsilon_n = \max[\epsilon_{\max} \lambda^n, \epsilon_{\min}] \quad (12)$$

여기에서  $\lambda (0 < \lambda < 1)$ 는 감쇄상수이다.  $\epsilon_n$ 은  $\epsilon_{\min}$ 에 도달할 때까지 감소한다.

#### 3.2 모델 파라미터 학습

퍼지 모델의 파라미터는 다음과 같이 정의되는 오차함수  $E$ 를 최소화하기 위해 갱신된다.

$$E = \frac{1}{2} [y^d(t) - y(t)]^2 \quad (13)$$

$i$  번째 규칙에 대한 전진부 멤버십 함수의 중심 및 폭 벡터, 그리고 후진부 선형 모델의 파라미터 벡터를  $w^i = [(c_j^i)^T, (\sigma_j^i)^T, (a^i)^T]^T$ 라 하면, 파라미터 학습은 LMS 규칙에 의해서 다음과 같이 계산된다.

$$w^i(t+1) = w^i(t) + \eta \Delta w^i(t) = w^i(t) - \eta \frac{\partial E(t)}{\partial w^i(t)} \quad (14)$$

여기에서  $\eta$ 는 학습계수이다.

## 4. 시뮬레이션

제안한 퍼지 모델 구성 알고리즘은 Box & Jenkins에 의해 비선형 시스템 모델링 예제로 널리 알려진 가스로 모델링에 적용하고 제안한 모델과 기존 방법들간의 성능을 비교한다. 가스로 모델링은 참고문헌 [2-5, 7, 8]에서 퍼지 모델링의 대상으로 적용되었다. 모델링되는 프로세스는 gas flow rate인 입력  $u(t)$ 와  $CO_2$  concentration인 출력  $y(t)$ 로 구성된다. 훈련 데이터 집합은 9초 간격으로 샘플링된 296개의 입출력 관측 데이터 쌍으로 구성된다.

퍼지 모델의 입력은 많은 실험에서 사용하는  $y(t-1), u(t-4)$ 로 선정한다. 이 실험에서 사용된 문턱값 파라미터들은  $\epsilon_{\max} = 0.13, \epsilon_{\min} = 0.013, \delta = 0.25, \lambda = 0.977, x = 0.87$ 와 학습률  $\eta = 0.02$ 이다. 성능 평가를 위해서  $N$ 개의 데이터 포인트에 대하여 다음 식으로 표현되는 MSE(mean squared error)를 사용한다.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^d - y_i)^2 \quad (15)$$

여기에서  $y_i^d$ 는 목표 출력치이고,  $y_i$ 는 퍼지 모델의 출력이다. 모델링 결과는 그림 1에 나타났다. 그림 1(a)는 훈련데이터에 대하여 2,000회 동안 반복수행 한 후의 모델링 결과를 보여준다. 학습을 통해 생성된 제안한 모델의 퍼지 규칙 수는 5개이고, 이 때의 MSE는 0.134이었다. 그림 1(b)는 순차학습을 하는 동안 입력된 관측 데이터에 대하여 퍼지 규칙이 생성되는 과정을 보여며, 그림 1(c)는 학습과정 동안의 MSE 값의 변화를 나타낸다. 표 1은 기존 모델과의 성능을 비교하기 위해서 참고문헌 [7]에 제시된 결과를 인용하였다. 제안한 모델의 성능은 동일한 입력 수와 type A의 형태를 취하고 있는 Wang의 모델보다 우수함을 알 수 있다. 신경회로망과 유전알고리즘을 이용하여 퍼지 모델을 구성하는 Farag 등[7]의 결과는 type A의 규칙으로 구성되며 37개의 규칙에 의해서 모델링된 MSE는 0.111이었다. Farag 등의 방법은 매우 많은 퍼지 규칙을 사용하고 있으며, Pentium 166MHz 상에서 C++ 코드로 구현된 프로그램을 약 124분간 수행한 결과로서 매우 학습에 매우 많은 시간이 소요됨을 알 수 있다. 반면에 제안한 방법은 Pentium 233MHz 상에서 C++ 코드로 작성된 프로그램으로 불과 50초 만에 수행을 완료하였다. 객관적인 비교는 아닐지라도 결과적으로 제안한 퍼지 모델 구성 알고리즘은 간단한 방법으로 빠른 시간에 효율적인 퍼지 모델을 구할 수 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 비선형 시스템의 모델링을 위해 퍼지 규칙 생성기준을 이용하여 훈련 데이터의 순차학습을 통해 퍼지 모델을 구성하는 알고리즘을 제안하였다. 제안

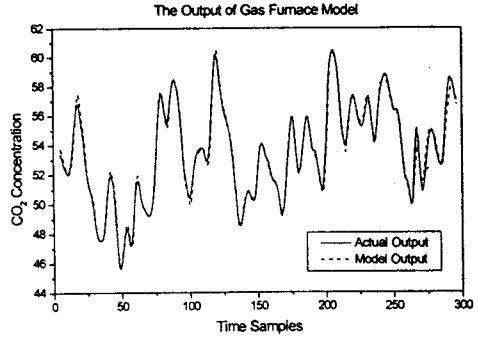
한 퍼지 모델 구성 알고리즘은 훈련 데이터를 순차적으로 입력받아 TS 퍼지 규칙을 생성기준을 만족할 경우 새로운 규칙을 생성시키는 특징을 갖는다. 제안한 알고리즘은 매우 간단하고 학습이 매우 빠른 장점이 있어서 대상 시스템에 대한 훈련 데이터를 가지고 최소의 퍼지 모델을 구성하는 해를 제공해 준다. 제안한 모델의 성능은 비선형 시스템 모델링 예제에 적용하여 테스트되었다. 실험결과로부터 제안한 알고리즘은 기존의 모델보다 모델링 성능 및 훈련 시간에서 우수함이 입증되었다.

(참 고 문 헌)

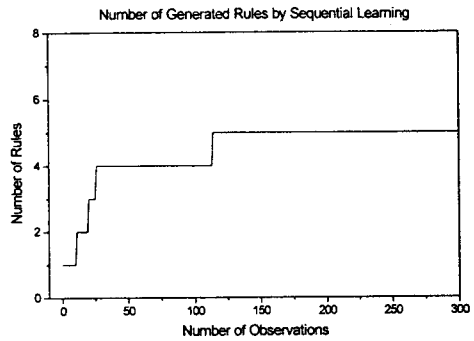
[1] J. Yen and L. Wang, "Application of Statical Information Criteria for Optimal Fuzzy Model Construction," *IEEE Tr. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 3, pp.362-372, 1998.  
 [2] M. Sugeno and T. Yaskawa, "A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling," *IEEE Tr. on Fuzzy Systems*, Vol. 1, No.1, pp.7-31, 1993.  
 [3] L. Wang and R. Langari, "Complex Systems Modeling via Fuzzy Logic," *IEEE Tr. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 26, No.1, pp.100-106, 1996.  
 [4] W. Pedrycz and J.V. de Oliveira, "Optimization of Fuzzy Models," *IEEE Tr. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 26, No.4, pp. 627-636, 1996.  
 [5] Y. Lin and G. A. Cunningham III, "A New Approach to Fuzzy-Neural System Modeling," *IEEE Tr. on Fuzzy Systems*, Vol. 3, No. 2, pp. 190-198, 1995.  
 [6] J.S.R. Jang and C.T. Sun, "Neuro-Fuzzy Modeling and Control," *Proc. IEEE*, Vol. 83, No. 3, pp.378-406, 1995.  
 [7] W.A. Farag, V. H. Quintana, and G. Lambert-Torres, "A Genetic-Based Neuro-Fuzzy Approach for Modeling and Control of Dynamic Systems," *IEEE Tr. on Neural Networks*, Vol. 9, No. 5, pp. 756-767, 1998.  
 [8] M. Russo, "FuGeNeSys -- A Fuzzy Genetic Neural System for Fuzzy Modeling," *IEEE Tr. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 3, pp.373-388, 1998.  
 [9] K. J. Hunt, R. Haas, and R. Murray-Smith, "Expanding the functional equivalence of radial basis function networks and fuzzy inference systems," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 7, no. 3, pp. 776-781, 1996.

표 1. 기존 모델과 제안한 모델의 비교

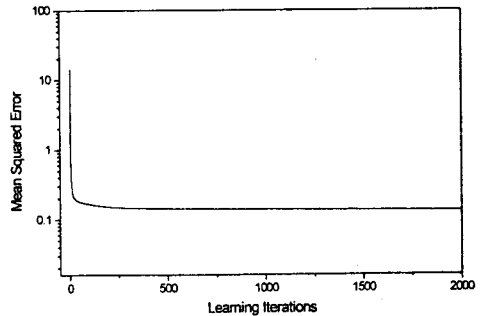
Model명	Type	입력 수	규칙 수	MSE
Tong[35]	Type A	2	19	0.469
Pedrycz[3]	Type A	2	81	0.320
Xu[4]	Type A	2	25	0.328
Box[34]	Linear	5	-	0.202
Sugeno[10]	Type B	6	2	0.068
Sugeno[10]	Type B	2	2	0.359
Sugeno[11]	Type A	3	6	0.190
Wang[8]	Type B	2	5	0.158
Farag[7]	Type A	2	37	0.111
제안한 모델	Type B	2	5	0.134



(a) 모델링 결과



(b) 규칙의 생성과정



(c) 학습 MSE 곡선

그림 1. 제안한 모델의 모델링 결과