

천정 크레인 시스템의 비선형 슬라이딩 모드 제어

김 도우*, 윤 지섭**, 박 병석**, 양 해원*, 김 흥필***
 한양 대학교 전기공학과*, 한국 원자력 연구소**, 경일 대학교***

Nonlinear Sliding mode Control of Overhead Crane System

Do-woo Kim*, Hai-won Yang*, Ji-sup Yoon**, Byung-suk Park**, Hong-phil Kim***
 Dept. of Elec. Eng., Hanyang University*, KAERI**, Dept. of Elec. Eng., Kyungil University***

Abstract - In this paper, we proposed a nonlinear sliding mode controller to regulate the swinging angle of Overhead Crane System. Roughly speaking, the controller is designed to regulate an output(the swing angle) while providing internal stability. It is difficult to apply many of standard nonlinear control design techniques. In contrast to control that use a command generator and possibly a time-varying feedback, our control law is simple autonomous nonlinear controller. We analyze the stability of the closed-loop system using an L₂ sliding surface conditions approach on a nonlinear feedback linearization of the system about the desired periodic orbit. One can easily extend this approach to analyze the robustness of the control system with respect to disturbances and parameter variations.

1. 서 론

자동차공장, 건설현장, 조선소, 및 중공업 플랜트등과 같은 산업현장에서 천정 크레인은 크고 무거운 화물을 원하는 위치로 이동시키는데 주로 이용되어지고 있다. 크레인의 트롤리와 이송물사이가 로프에 연결되어 있는 물리적인 구조로 인하여, 이송물을 목표위치로 이송할시 대부분 진자운동의 진동이 발생된다. 과도 진동시 이로 인하여, 시설물의 파괴, 이송물의 손상과 같은 경제적 손실과 인명의 안전사고를 발생시킬 수 있다. 따라서, 이와 같은 피해를 줄이기 위하여, 빠른시간내에 이송물의 진동을 제거하기 위하여, 무진동 크레인 시스템에 대한 많은 연구가 있어 왔다. 특히 초기 크레인의 진동 제어의 경우에는 이송물의 진동각을 측정하지 않고, 속도제어에 따라, 트롤리를 운전하여 로프의 진동각을 최소화하는 개루프 제어가 있었다[1]. 그리고, 진동각 및 트롤리속도와 가속도를 실시간으로 측정하여 제어하는 케환제어가 있어 왔다[2]. 또한 크레인의 진동과 위치제어에 적용 제어를 적용하여 진자의 혼들림을 최소화 하기 위한 최적제어기법[3], 크레인 대차에서 로프의 간격을 조정 로프의 장력을 증가 시킴으로서 진자의 진동을 줄이는 방법[5], 그리고, 비선형 크레인 모델을 통하여 진동을 제어하는 비선형 포화 제어 기법이 연구되어 왔다[4]. 논문은 비선형 크레인 시스템을 입출력 케환선형을 통하여 선형화하고 로프의 진동각이 매우 작은 평형점에서 출력변수인 이송물의 진동각인 θ 의 진동각이 최소가 되도록 조정하여, 특히, 크레인의 이송물 이동시에 줄길이 변화와 같이 진동각에 영향을 주는 파라미터 변동에 대해서 강인성과 안정성을 갖는 비

선형 슬라이딩 모드 제어기를 제안하고자 한다.

2. 천정 크레인 동적상태 시스템 모델링

본 장에서는 그림 1의 천정 크레인을 라그랑지식을 이용하여 수학적 모델링한다.

2.1 천정 크레인의 운동 방정식

천정 크레인은 그림 1과 같은 트롤리와 이송물, 그리고, 트롤리와 이송물을 연결하는 로프로 구성된다[2].

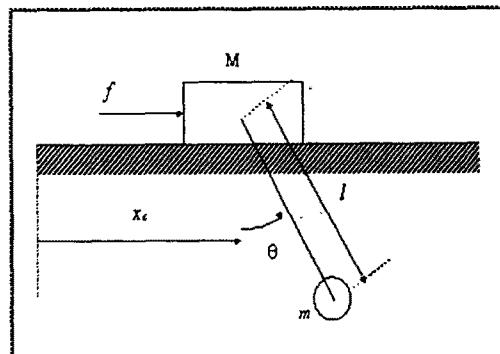


그림 1 2차원 천정 크레인 시스템

M : 트롤리 등가질량

m : 이송물의 질량

l : 트롤리와 이송물간의 거리

θ : 이송물의 진동각

j : 트롤리에 가해지는 외부적 힘

x_c : 트롤리 이송거리

일반적으로 천정 크레인의 전체 운동 방정식, 위치에너지 및 마찰에너지는 다음과 같다.

$$T_{\text{tot}} = \frac{1}{2} (M+m) \frac{dx_c^2}{dt} + ml \frac{dx_c}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + \frac{1}{2} l^2 m \frac{d\theta^2}{dt} \quad (1)$$

$$U_{\text{tot}} = Mg(l - \cos \theta) \quad (2)$$

$$D_{\text{tot}} = \frac{1}{2} B_d \frac{dx_c^2}{dt} \quad (3)$$

B_d : 점성 마찰 계수, g : 중력 가속도

(1), (2) 및 (3)식을 다음의 라그랑지식에 따라 풀면, (5), (6)식과 같은 트롤리와 이송물에 대한 운동방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{\partial T}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = f \quad (4)$$

트롤리 운동방정식

$$(M+m) \ddot{x}_c + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + B_d \dot{x}_c = J \quad (5)$$

이송물 운동 방정식

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml \cos \theta \ddot{x}_c + mgl \sin \theta = 0 \quad (6)$$

그리고, (5), (6)식의 상태 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in R^4$ 가 $x_1 = x_c, x_2 = \dot{x}_c, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$ 라고 할 때 비선형의 상태식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\frac{B_d}{M + m \sin^2 x_3} x_2 + \frac{(m g \cos x_3 \sin x_3 + m l \sin x_3 x_4^2)}{M + m \sin^2 x_3} \\ &\quad + \frac{1}{M + m \sin^2 x_3} J \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{B_d \cos(x_3)x_2}{(M + m \sin^2 x_3)l} - \left[\frac{g \sin(x_3)}{l} + \frac{m g \cos^2(x_3) \sin(x_3)}{(M + m \sin^2(x_3))l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m \cos(x_3) \sin(x_3) \dot{x}_4^2}{(M + m \sin^2(x_3))} \right] - \frac{\cos(x_3)}{(M + m \sin^2(x_3))l} J \end{aligned}$$

(7)식에서 트롤리에 가해지는 외부적 힘인 J 를 시스템의 입력으로 볼 수 있다.

3. 비선형 천정 크레인 시스템의 궤환 선형화 모델

(7)의 천정 크레인의 비선형시스템은 다음과 같은 비선형식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (8)$$

$$y = h(x) \quad (9)$$

따라서, (8), (9)식의 비선형 시스템 식에 대하여 입력-출력 궤환 선형화 이론을 적용한다. 그러므로, (7)식의 시스템 모델링식에서 시스템의 출력을 로프의 진동각이라 할 때

$$y = h(x) = x_3 = \theta \quad (10)$$

입력-출력 궤환 선형화 이론을 적용하기 위해 (10)의 결과를 제어변수 J 가 나타날 때까지 시간에 대하여 미분하면 출력변수 θ 의 1계 미분은

$$\dot{y} = L_j h + L_g h u = x_4 \quad (11)$$

과 같고, 출력변수 θ 의 2계 미분은

$$\ddot{y} = L_j^2 h + L_g L_j h u \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{B_d \cos(x_3)x_2}{(M + m \sin^2 x_3)l} - \left[\frac{g \sin(x_3)}{l} + \frac{m g \cos^2(x_3) \sin(x_3)}{(M + m \sin^2(x_3))l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m \cos(x_3) \sin(x_3) \dot{x}_4^2}{(M + m \sin^2(x_3))} \right] - \frac{\cos(x_3)}{(M + m \sin^2(x_3))l} J \end{aligned} \quad (13)$$

와 같다. (14)식의 결과에 따라 출력변수 θ 의 2계 미분식에서 제어량 u 의 계수인 $L_g L_j h$ 는 0이 아니다. 따라서, 시스템의 상대차수는 2가 되며, (7)식의 궤환 선형화를 위한 제어량은 다음과 같이 정의 된다.

$$u = \frac{1}{L_g L_j h} (v - L_j^2 h) \quad (14)$$

따라서, 상대 차수가 2인 (7)식의 크레인 시스템의 궤환 선형화 모델은 다음과 같다.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (16)$$

$$y = [1 \ 0] z \quad (17)$$

여기서 변환된 상태변수 벡터 z 는 다음과 같이 정의된다.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - y_e \\ \dot{y} - \dot{y}_e \end{bmatrix} \quad (18)$$

위 식에서 y_e, \dot{y}_e 는 각각 출력변수 y, \dot{y} 의 안정점에서의 값들을 의미한다. 주어진 무진동 시스템의 설계 모델에서 출력변수 y 는 이송물의 진동각인 J 로 정의되어 있으므로, 안정점 y_e, \dot{y}_e 는 0로 정하고, (18)식에서 로프의 진동각 상태의 출력은 각도측정기를 통하여 측정한다.

4. 천정 크레인 시스템의 궤환 선형화 모델을 이용한 슬라이딩 모드의 진동각 조정

본 절은 3절에서 유도된 (16), (17)식의 로프 진동각에 대한 궤환 선형화 모델을 이용하여 트롤리의 움직임에 관계없이 이송물의 진동각을 조정하기 위한 제어입력을 설계한다. 그리고 이를 위해 슬라이딩 초평면을 다음과 같이 정의한다.

$$s = Gz = 0 \quad (19)$$

여기서, $G = [c_1 \cdots c_{r-1} \ 1]$ 는 슬라이드 초평면의 계수벡터로써 $1 \times r$ 의 차원을 가진다. 따라서, 이러한 슬라이딩 초평면 식에 대하여 궤환 선형화 모델에 대한 등가제어입력 v_{eq} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= Gz \\ &= GAz + GBv_{eq} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } v_{eq} = -(GB)^{-1} GAz \quad (20)$$

(20)식은 진동각의 상태 변수 벡터 초기값이 슬라이딩 초평면상에 존재할 경우, (16)식의 궤환 선형화 시스템이 항상 (19)식의 슬라이딩 초평면 상에 머무르도록하는 제어량임을 알 수 있다. 그러나, 만약 시스템의 초기상태가 슬라이딩 초평면상에 존재하지 않은 상태에서 (20)식과 같은 등가제어를 시스템에 인가하면 s 는 항상 일정한 값을 유지하게 되며 이는 진동각의 상태가 슬라이딩 평면과 항상 일정한 거리를 두면서 움직이는 효과를 가지게 된다. 따라서, 상태공간상에서 상태변수와 시스템 파라미터의 불확실성이나 상태변수의 추정오차로 인한 영향에 대하여 (20)식의 등가제어 입력은 문제가 있다. 따라서, 이러한 영향에 대한 문제를 해결하기 위해 (21)식과 같이 제어입력을 정한다.

$$v = v_{eq} - (GB)^{-1} K sgn(s) \quad (21)$$

그리고, (21)식의 제어입력으로 안정성과 강인성을 갖기 위한 슬라이딩 모드 존재 조건인 (22)식이 만족됨을 통하여

$$ss < 0 \quad (22)$$

안정성과 강인성을 갖음을 증명한다.

우선, 안전성을 고려하기 위하여, 다음과 같은 리아프노프 형태의 함수를 정한다.

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (23)$$

이를 시간에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
V &= ss \\
&= s(GAz + GBv_{eq} - (GB)^{-1}Ksign(s)) \\
&= -sKsign(s) \\
&= -K|s|
\end{aligned}$$

따라서, $K = (GB)^{-1} > 0$ 일 때, (22)식에 의하여 항상 $\dot{V} < 0$ 을 만족하므로 (21)식의 슬라이딩 모드 제어식은 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 으로 수렴시키는 제어량임을 알 수 있다. 결국, s 가 0으로 수렴하게 되면

$$s = Gz = 0 \quad (24)$$

됨을 의미하므로 (21)식의 제어입력에 의한 슬라이딩 초기 평면 조건은 $t \rightarrow 0$ 일 때 모든 상태 변수가 안정한 값으로 수렴한다. 그리고, 강인성 문제를 고려할 때, 원래의 비선형 시스템 모델과 선형화된 모델 사이의 오차를 고려하거나 주어진 시스템 모델의 파라미터값의 오차등과 같은 불확실성이 존재 할 때 (16), (17)식에 대하여 주어진 케이스 선형화 시스템은 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\dot{z} = (A + \Delta A(t, z))z + Bu \quad (25)$$

그리고, $\Delta A(t)$ 가 matching 조건을 만족한다고 할 때 $\Delta A(t)$ 를 $1 \times n$ 의 벡터 $d(t, z)$ 가 존재하는 (26)식으로 가정한다.

$$\Delta A(t, z) = Bd(t, z) \quad (26)$$

따라서, $d(t, z)z = w(t, z)$ 라고 정의하면 (25)식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{z} = Az + B(v + w(t, z)) \quad (27)$$

그리고, $w(t, z)$ 는 다음과 같이 노음이 제한되어 있다고 가정한다.

$$\|w(t, z)\| < M \quad (28)$$

여기서 M 이 알려져 있다고 가정하면, (22)식의 따라 제안된 슬라이딩 모드 제어 규칙은 다음과 같이 $\Delta A(t, z)$ 에 대하여 강인성을 가질수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= s(GAz + GB(v + w)) \\
&= s(GAz + GBv_{eq} - (GB)^{-1}Ksign(s) + GBw) \\
&= -K|s| + sw \quad (GB = 1) \\
&\leftarrow -K|s| + |s|M
\end{aligned} \quad (29)$$

$K > M$ 이면 $\dot{s} < 0$ 을 만족하고 $s \rightarrow 0$ 이 된다.

그러므로, (21)의 제어 입력은 크레인 시스템에서 비선형 항 $\dot{\theta}^2$ 와 로프길이의 변화 같은 불확실성 요소에 대하여 강인성을 갖을수 있다. 케이스 선형화에 의한 (21)식의 제어입력에 의하여 (15)식의 실제 시스템에 인가되는 제어량은 다음과 같다.

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} (v_{eq} - (GB)^{-1}Ksign(s) - L_f^2 h) \quad (29)$$

그리고, (16), (17)식의 케이스 선형화 모델에서 나타나지 않는 이송 거리와 이송 속도의 내부 동특성을 살펴보면 (30)식과 같다.

$$\ddot{x}_1 = gy + K(GB)^{-1}(GAz + Ksign(s)) \quad (30)$$

(38)식에서 $y, z, Ksign(s)$ 은 유계함으로 따라서, 다음과 같이 임의 상수 D 라 할 때

$$|gy + K(GB)^{-1}(GAz + Ksign(s))| \approx D$$

x_1 은 유계이므로, 내부 동특성은 안정하다. 그러므로, (37)식의 제어입력에 의한 이송물의 진동각은 트롤리의 움직임, 줄길이의 변화에 관계없이 무진동의 특성을 갖는다.

4. 컴퓨터 모의 실험

천정 크레인의 혼들림과 목표위치 제어를 위한 천정 크레인의 매개변수들은 표1과 같다.

표 1] 천정 크레인 매개변수 특성값

트롤리 질량	3 kg	이송물 질량	3 kg
로프 길이	0.455 m	점성 마찰계수	2 Nsec/m

비선형 슬라이딩 모드 제어기의 슬라이드 초기평면의 계수벡터를 $G = [1.5, 10]$ 로 설정하였고, 샘플링주기를 $T = 0.05$ 로 하였다.

1) 줄길이 변화를 고려치 않은 경우

그림 2와 그림3은 표1에서 설정된 일정길이의 로프에서 제안된 비선형 슬라이딩 모드 제어에의한 트롤리 위치이동과 진동각 변위, 그리고, 트롤리 속도변위를 나타낸 것이다.

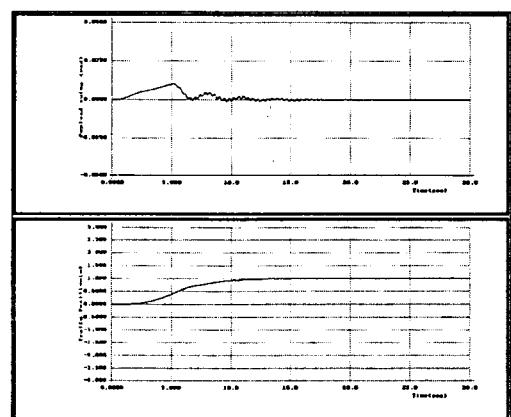


그림 2 (a) 이송물 진동각 변위
(b) 트롤리 위치

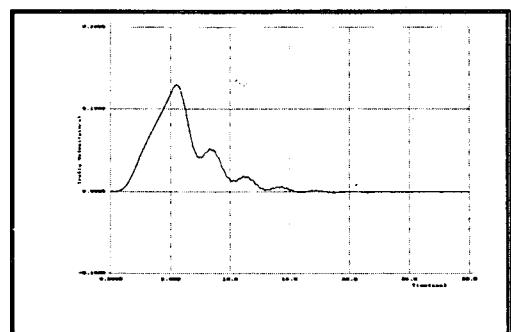


그림 3 트롤리 속도 변위

2) 줄길이 변화를 고려한 경우

그림 4는 그림2와 3과 동일한 트롤리 이동시 2초에서 9초 동안 초기 로프길이의 2배의 변화를 주었을 때 제안된 비선형 슬라이딩 모드 제어에 의한 진동각 변위 나타낸 것이다.

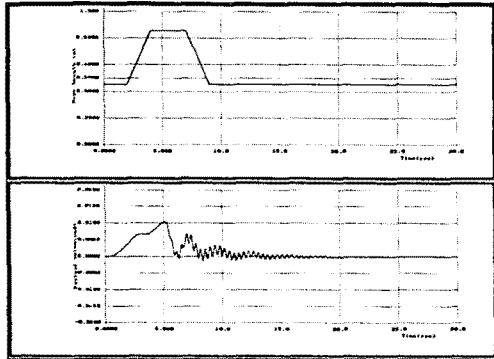


그림 4 (a) 로프 길이 변위
(b) 로프 길이 변위에 따른 이송물 진동각

그림5와 6.7은 그림 4와 같이 줄길이 변화와 이송물의 질량 변화를 주면서 트롤리의 위치를 50초동안 트롤리의 방향을 정방향과 역방향으로 이동시킬 시 트롤리 위치와 진동각 변위 그리고, 제안된 비선형 슬라이딩 모드 제어 입력을 나타낸 그림이다.

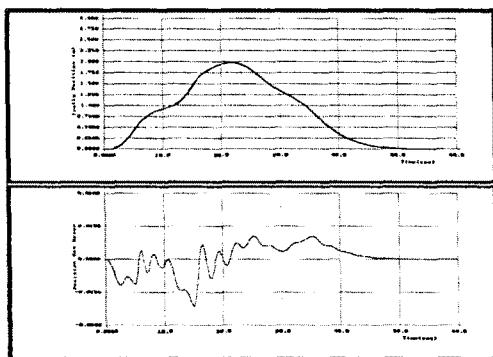


그림 5 (a) 로프길이 변화를 고려한 트롤리의 기준 위치 추정
(b) 기준위치 추정 오차

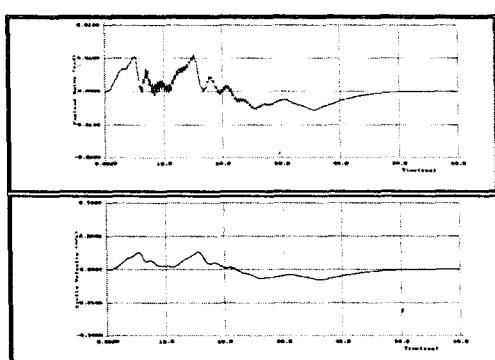


그림 6 (a) 로프길이 변화에 대한 로프의 진동각 변위
(b) 로프길이 변화에 대한 트롤리 이동속도 변위

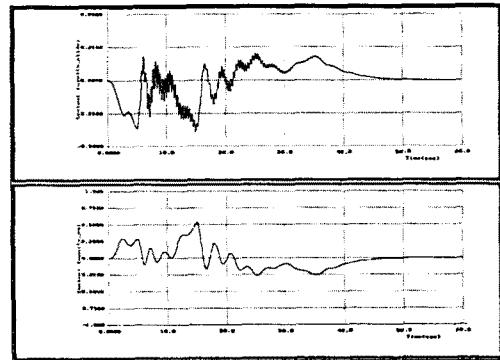


그림 7 (a) 로프길이 변화에 대한 비선형 슬라이딩 모드
제어입력 (u)
(b) 로프길이 변화에 대한 슬라이딩 모드 등가
제어입력 (v_{eq})

5. 결 론

본 연구에서는 로프 길이 변동과 같은 매개변수 변동과 같은 비선형 천정 크레인 시스템을 입출력 채환선형을 통하여 선형화하고 로프의 진동각이 매우 작은 평형점에서 출력변수인 이송물의 진동각인 6의 진동각을 조정하여 크레인의 이송물 이동시에 줄길이 변화와 같이 진동각에 영향을 주는 파라메터 변동에 대해서 진동변위와 트롤리 위치에 대해 강인성과 안정성을 갖는 비선형 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였고, 제안된 제어기를 통하여 트롤리가 목표위치를 추종하면서, 진동각 조정에 있어 외부적 외란에 대하여 강인성과 안정성이 있음을 모의실험으로 살펴보았다. 따라서, 제안된 제어기를 실제 로프길이 변화를 갖는 3차원 크레인으로 확대 적용함으로서 하드웨어적으로 타당성을 연구하고자 한다.

(참 고 문 헌)

- [1] T. Mita, T. Kanai, "Optimal control of the Crane system Using the maximum speed of the Trolley" 計測自動制御學會論文集, pp125-130, 1979.
- [2] Kamal A.F.Moustafa and Taher G. Abou-El-Yazid, "Load Sway Control of Overhead Cranes with Load Hoisting Via Stability Analysis" JSAM International Journal, Series C, Vol.39, No.1 1996
- [3] J.W.Auerning and H.Troger, "Time Optimal Control of Overhead Cranes with Hoisting of load" Automatica, Vol. 2, No.4, pp37-447, 1987.
- [4] Y. Sakawa and Y. Sindo, "Optimal Control of Container Cranes". Automatica, vol.18, No.3, pp.257-266, 1982.
- [5] T.Burg, D.Dawson, C.Rahn, and W.Rhodes, "Nonlinear Control of an Overhead Crane via the Saturating control Approach of Teel" Proceedings of the IEEE, Int.Conf.Robotics and Automation, 1996.
- [6] V.I.Utkin, "Sliding modes and their application in variable structure systems", MIR, 1978.
- [7] J.-J.E. Slotine, "Sliding controller conditions in variable structure systems", International Journal of Control, Vol.40, No. 2 pp.421-434, 1984
- [8] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems: An Introduction", Springer Verlag, 1989.