

# 단순한 형태의 계층 퍼지 제어기

주 문갑†, 이 진수‡

†포항산업과학연구원

‡포항공과대학교

## A Simple Hierarchical Fuzzy Controller

Moon G. Joo†, and Jin S. Lee‡

†Research Institute of Industrial Science and Technology

‡Pohang University of Science and Technology

**Abstract** In this paper, a simple hierarchical fuzzy inference system using structured Takagi-Sugeno type fuzzy inference units(SFIUs) is proposed. The number of fuzzy rules of the proposed HFIS is minimum in the sense of that only the number of partitions of each system variables, not of intermediate outputs of layered fuzzy controllers, are concerned. And resulted number of fuzzy rules is a summation of partition in each system variables. Gradient descent algorithm is used for adaptation of fuzzy rules. The ball and beam control is performed in computer simulation to illustrate the performance of the proposed controller.

### 1. 서론

퍼지 제어 분야의 최근 관심 분야 중 하나는 퍼지 규칙의 수를 줄이는 것이다. 일반적으로  $m$ 개의 소속 함수를 가지는  $n$ 개의 입력 변수로 이루어진 단일 출력 퍼지 시스템은  $m^n$ 개의 퍼지 규칙을 필요로 한다. 이러한 제어 규칙의 수는 입력 변수의 갯수에 따라 지수 함수적으로 증가한다. 제어 규칙의 폭발적인 증가는 많은 입력 변수를 가진 실제 적용에 있어서는 주요한 문제가 된다. 많은 제어 규칙은 큰 메모리 용량과 더 많은 계산 시간을 요구하게 되며, 경우에 따라서는 성능의 저하로까지 이어지기 때문에 적절하게 제어 규칙의 수를 줄이는 것이 반드시 필요하게 된다.

이 문제를 해결하기 위하여 계층 퍼지 시스템(Hierarchical fuzzy inference system(HFIS))[1]이 제안되었다. 이 구조에서는 몇 개의 입력 변수들로만 구성된 퍼지 제어 유닛들(Fuzzy inference units(FIUs))이 다음 계층의 퍼지 제어 유닛들의 입력으로 수직적으로 연결되는 구조를 가지며 보통 2,3개의 입력 변수들로 하나의 퍼지 제어 유닛이 구성된다.

보통 이러한 구조는 모든 입력 변수가 하나의 퍼지 제어 유닛에 연결되는 이전의 구조보다 적은 수의 제어 규칙을 가지게 되며, GA [2]나 gradient descent [3]등의 방법을 이용한 제어 규칙의 자동 조정 방법들도 제시되었다. 또한 특

정한 방식의 계층 퍼지 제어기는 universal approximator가 될 수 있음을 보이기에 이르렀다. [4].

본 논문에서는 구조화된 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 유닛을 이용한 단순한 형태의 계층 퍼지 제어기를 제시한다. 학습 방법으로 gradient descent 방법을 이용하고 공과 막대 시스템의 시뮬레이션을 통하여 성능을 확인한다.

### 2. SFIU

구조화된 Sugeno-Takagi 타입의 퍼지 제어 유닛(SFIU)[5]은 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

- 제어 규칙 구성 :

$$\text{Rule}^i : \quad \text{IF } C_1 \text{ is } \Omega_{c_1}^i \text{ and } C_2 \text{ is } \Omega_{c_2}^i \dots \text{ and } C_L \text{ is } \Omega_{c_L}^i \\ \text{THEN } y^i \text{ is } \sum_p (a_p^i x_p) + \sum_q (b_p^i Y(k-1)_q) + r$$

$$l \quad \in \{1 \dots L\}$$

$$p \quad \in \{1 \dots P\}$$

$$q \quad \in \{1 \dots Q\}$$

$$L : \quad \text{number of condition variables}$$

$$P : \quad \text{number of input variables}$$

$$Q : \quad \text{number of outputs of previous level controller}$$

- 소속 함수 :

$$\omega_{c_l^n}(x) = \exp\left(\frac{-(m_{c_l^n} - x)^2}{2\sigma_{c_l^n}^2}\right)$$

$$n \quad \in \{1 \dots N\}$$

$$N : \quad \text{number of membership functions} \\ \text{in each linguistic variable}$$

- Product inference

$$\mu^i = \prod_{l=1}^L \omega_{c_l^n}$$

- single-tone fuzzifier
- center average defuzzifier

$$y = \frac{\sum_{i=1}^I \mu^i Y^i}{\sum_{i=1}^I \mu^i}$$

$$\begin{aligned} i &\in \{1 \dots I\} \\ I &: \text{number of fuzzy rules} \end{aligned}$$

여기에서 결론부는 입력 변수 및 이전 계층의 퍼지 제어 유닛의 결과값들의 합수이다. 그러나 조건부에서 쓰이는 조건 변수는 결론부에서는 참조되지 않아도 된다. 다시 말해, 조건 변수와 입력 변수가 서로 다른 그룹으로 나뉘어지는 데, 조건 변수들은 물리적인 의미를 가지고 있는 것들이어야 한다. 이러한 제약은 계층 퍼지 제어기에 향상된 가독성(readability)를 제공할 수 있다. 그림. 1은 SFIU의 볼록도를 나타낸다.

"구조화된 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 유닛"이라는 말은 다음 이유에서 연유되었다. 즉, SFIU를 이전의 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 유닛으로 표현하기 위하여, 조건부에서 입력 변수와 이전 계층 결과값들의 소속 합수값을 모두 1로 두고, 결론부에서는 조건 변수들의 계수들을 모두 0으로 정의하면 같은 결과를 가질 수 있다.

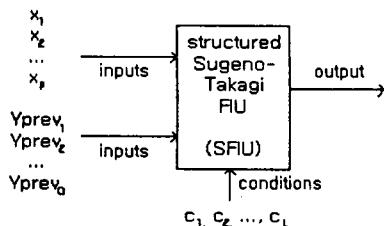


그림 1: 구조화된 Takagi-Sugeno FIU

### 3. 단순한 형태의 계층 퍼지 제어기

#### 3.1. 제어기의 구조

그림. 2은 제안된 단순한 형태의 계층 퍼지 제어기의 볼록도를 나타낸다. 이 그림에서 이전 계층 퍼지 제어 유닛의 출력은 다음 계층 퍼지 제어 유닛에 입력 변수로서 연결되는데, 이것은 기존의 계층 퍼지 제어기에서와 같다. 조건 변수로서  $x$ 가 입력 변수와 함께 다음 계층에 연결되는 구조를 가진다. 특이한 것은 단지  $x$ 만이 조건 변수로서 조건부에서 고려되고, 이전 계층 퍼지 제어 유닛의 결과값은 조건부에서 고려되지 않는다는 것이다.

번째 제어 규칙은  $k$  계층에서 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \text{Rule}^i : \quad & \text{IF } x_k \text{ is } \Omega_{x_k}^i \\ & \text{THEN } y^i \text{ is } a_k^i x_k + b_k^i Y_{k-1} + r_k^i \end{aligned}$$

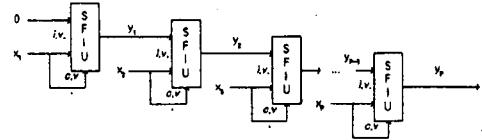


그림 2: 제어기의 구조

즉,  $k$  계층의 SFIU에서 이전 계층의 결과값인  $Y_{k-1}$ 는  $x_k$ 의 상태에 따라 수정 보완되는 구조를 가진다. 이것은  $Y_{k-1}$ 와  $x_k$ 의 선형합처럼 보이지만, 퍼지 추론을 통하여  $Y_{k-1}$ 와  $x_k$ 의 비선형 함수로 변형된다.

다음과 같이 정의하자.

$$\alpha(k) \equiv \frac{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_k) a_k^i}{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_k)} \quad (1)$$

$$\beta(k) \equiv \frac{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_k) b_k^i}{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_k)} \quad (2)$$

여기에서  $\alpha(k)$ 는  $k$  계층에서  $x_k$ 에 대한 적합도를 나타내고,  $\beta(k)$ 는  $k$  계층에서 이전 계층 퍼지 제어 유닛의 결과값에 대한 적합도를 나타낸다.

단순한 형태의 계층 퍼지 제어기의 출력값들은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_1) a_1^i x_1}{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_1)} \\ &= x_1 \alpha(1) \\ y_2 &= \frac{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_2) (a_1^i x_1 + b_1^i y_1)}{\sum_{i=1}^I \mu^i(x_2)} \\ &= x_2 \alpha(2) + y_1 \beta(2) \\ &= x_1 \alpha(1) \beta(2) + x_2 \alpha(2) \\ &\dots \\ y_P &= x_1 \alpha(1) \beta(2) \beta(3) \beta(4) \dots \beta(P) \\ &+ x_2 \alpha(2) \beta(3) \beta(4) \dots \beta(P) \\ &+ x_3 \alpha(3) \beta(4) \dots \beta(P) \\ &+ \dots \\ &+ x_{P-1} \alpha(P-1) \beta(P) \\ &+ x_P \alpha(P) \end{aligned}$$

퍼지 규칙의 개수는  $\sum_{p=1}^P D_p$ 개인데, 여기서  $D_p$ 는 조건 변수  $x_p$ 의 소속 합수의 개수를 의미한다. 제안된 계층 퍼지 제어기의 제어 규칙수는 중간 계층에 위치한 퍼지 제어 유닛의 결과값들을 추론의 조건부에 포함시키지 않아, 각  $x$ 들의 소속 합수 개수에만 비례한다는 의미에서 계층 퍼지 제어기에서는 최소라고 할 수 있다.

#### 3.2. 학습 방법

제안된 제어기의 학습 파라메터는 조건부에서는 각

조건 변수들의 중간값( $m$ )과 폭( $\sigma$ )이고 결론부에서는 각각의  $y_i$ 에서의 계수( $a, b, r$ )들이다. 이러한 파라메터들을 학습시키기 위하여 gradient descent 알고리듬을 적용하였다. 만약  $P$ 개의 조건 변수들에 각각  $D$ 개씩의 소속 함수를 정의하면, 조건부에  $2 * D * P$ 개의 파라메터와 결론부에  $3 * D * P$ 개의 파라메터를 가지게 된다.

#### 4. 시뮬레이션

공과 막대(ball and beam) 시스템을 그림. 3에 나타내었다. 제어의 목적은 정해진 어떤 범위내의 모든 초기 조건에서도 공이 막대의 중간에 위치하도록 하는 것이다. 이 시스

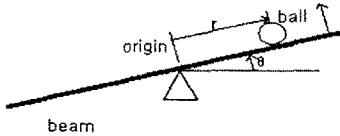


그림 3: 공과 막대 시스템

템은 Hauser, Sastry, and Kokotovic에 의하면 다음과 같은 상태 방정식으로 서술될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ B(x_1 x_4^2 - G \sin x_3) \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

여기에서  $y = x_1, B = 1.2, G = 9.81$  이다.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Hauser, Sastry, and Kokotovic의 입출력 선형화에 의한 제어 법칙  $u(x)$ 은  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 4$ 의 상수 값을 이용하여 결정되었고, 이것이 퍼지 제어기가 학습하여야 할 모델이다.

시스템 변수들의 변위는  $x_1, x_2, x_3, x_4$  각각에 대하여  $[-5, 5], [-2, 2], [-\pi/4, \pi/4], [-0.8, 0.8]$ 으로 정의되었다. 폭( $\sigma$ )의 초기값은 변위값 자체로 설정하였는데, 예를 들어  $x_1$ 의  $\sigma$ 는 10이 된다. 초기 제어 규칙의 계수들은 -1과 1 사이에서 임의로 설정되었고, 학습 계수 ( $\eta$ )는 0.1, 샘플링 주기는 0.01초이다. 학습 샘플들은 4개의 서로 다른 초기 변수들에서 제어된  $4 \times 3000$ 개의 입출력값들로 구성되었다. 7개씩의 소속 함수들을 가진 조건 변수들로 이루어진 단순한 형태의 계층 퍼지 제어기는 1000번 학습후의 결과를 그림.4에 보였다. 그림.5은 학습과정중의 RMS 오차값을 나타낸다.

#### 5. 결론

계층 퍼지 제어기는 제어 규칙의 폭발적 증가를 억제하기 위하여 연구되어 왔다. 기존의 Takagi-Sugeno 계층 퍼지 제어기는 이전 계층 퍼지 제어 유닛의 결과값 및 현재 입

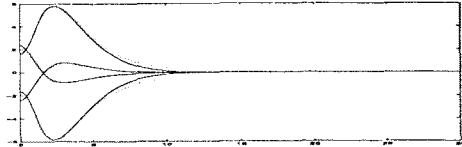


그림 4: Outputs  $r(t)$  of the closed loop ball and beam system using the proposed HFIS and four initial conditions after 1000 epochs learning with 7 divisions in each condition variables, solid : desired, dashed : control result

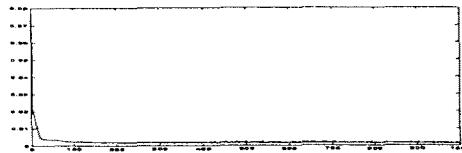


그림 5: RMS error

력 변수들을 조건부로 구성하고 결론부에서 그것들의 선형 합으로 나타내어지는 형태를 가지고 있다. 본 논문에서는 구조화된 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 유닛을 이용하여 현재의 입력 변수로만 조건부를 구성한 더 적은 개수의 제어 규칙을 가지는 제어기를 제시하였다. 학습 방법으로 gradient descent 방법을 이용하였고 공과 막대 시스템의 시뮬레이션을 통하여 성능을 확인하였다.

#### 참고 서적

- [1] G.V.S.Raju, J. Zhou, and R.A.Kisner, "Hierarchical Fuzzy Control," *Int. J. Contr.*, vol. 54, no. 5, pp. 1201-1216, 1991.
- [2] Derek A. Linkens and H.Okola Nyongesa, "A Hierarchical multi-variable fuzzy controller for learning with genetic algorithms," *Int. J. Contr.*, vol. 63, no. 5, pp. 855-883, 1996.
- [3] Ronald R. Yager, "On the Construction of Hierarchical Fuzzy Systems Models," *IEEE trans. on systems, man, and cybernetics*, vol. 28, no. 1, pp. 55-66, Feb. 1998.
- [4] Li-Xin Wang, "Universal approximation by hierarchical fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 93, pp. 223-230, 1998.
- [5] Moon G. Joo and Jin S.Lee, "A hierarchical fuzzy controller using structured Takagi-Sugeno type fuzzy inference engine," *Proc. of the 13th KACC*, pp. 179-184, 1998.