1998년도 대한전기학회 정기총회 및 추계학술대회 논문집 1998. 11. 28

H_2 제어 기법을 이용한 Decoupling 제어기 설계

최군호*, 조용석**, 박기헌**
* 성균관대학교 전기·전자 및 컴퓨터 공학부, **건양대학교 정보·전자·통신 공학부

H_2 controller Design of Decoupled Multivariable Feedback Control Systems

Goonho Choi*, Yong-Suk Cho**, Kiheon Park*
*SungKyunKwan Univ. Division of E.C.E., **Konyang Univ. Division of E.I.T.C.

Abstract - In this study, we deal with a multivariable system which its input and output are coupled. This study presents a method for designing a controller which allows a coupled system to be transformed to a decoupled system in a standard model adopting 2DOF controller. And Wiener-Hopf(H_2) approach is used so that the designed controller can minimize given cost function.

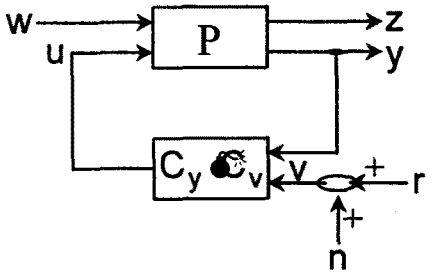
1. 서 론

대개의 다변수 시스템은 주어진 입력과 출력 사이의 관계가 상호 독립적이지 못하고 하나의 입력이 두 개 이상의 서로 다른 출력에 영향을 주는 경우가 많다. 이런 시스템을 coupling 시스템이라고 하는 데, 이런 시스템은 제어기 설계시 많은 어려움을 가져온다. 따라서 이런 종류의 시스템을 제어하는 데 있어서 제어기가 각각의 입출력 상호간에 독립성을 보장하도록 하는 것을 decoupling 문제 또는 decoupling제어기 설계라고 한다. 이에 관한 연구는 [1]등의 논문에서 진행되었으며 특히 [1]의 경우 제어기가 decoupling 요건과 함께 주파수 영역에서 최적 설계를 가능하게 하는 위너-호프 제어기를 제시한 바 있다. 그러나, 이는 기존의 모델을 이용한 결과이어서, 최근의 시스템에서 보여주는 제어기를 포함한 여러 부 시스템들이 서로 직, 병렬로 매우 복잡하게 연결되어 있는 경우, 설계시 어려움이 따르게 된다. 최근에 이런 복잡한 시스템을 정형화된 신호군으로 묶어서 처리하는표준모델(Generalized Plant 모델, 이하 GP 모델)형태가 제시되었는 데, 이 경우는 구조의 단순화로 수식의 간략화는 성공하였지만 물리적으로 성격이 다른 신호들을 하나의 신호군으로 처리함으로써 실제적이지 못하고 추상적이며 아울러 기준 입력 추종 문제를 처리하기 어렵게 되어 앞에서 보인 decoupling 문제를 해결하기 어렵게 된다. 따라서, GP 모델에서 decoupling문제를 해결하기 위해서 새로운 모델 제시가 필요한 데 본 논문에서는 [2]에서 제시한 2DOF 제어기 구조를 갖는 변형된 GP 모델을 사용하고자 한다. 이 구조는 기존의 입력 신호군에서 기준 입력만을 따로 분리하여 제어기에 독립적으로 공급함으로써 제어기를 기존 모델에서 처럼 2DOF 형태로 분리해 설계할 수 있는 장점을 가지고 있다.

2. Decoupling 요건을 갖는 위너-호프 제어기 설계 - R_v가 정방행렬인 경우

2.1 기본 개념

본 논문에서 논의하고자 하는 decoupling 문제는 기준 입력 추종 문제와 관련이 있으므로 외부 입력 신호에서 기준 입력 $r(s)$를 분리하여 처리할 수 있는 구조가 필요한 데 이를 가능케 하는 구조가 다음[그림1]의 표준 모델의 2자유도 구조이다[2]. 개선된 구조에서는 제어기를 기준 입력과 그외의 외부 신호를 분리해서 고려하여 이에 따른 각각의 독립적인 제어기를 설계할 수 있도록



[그림1] 기준 입력항이 고려된 2자유도 형태의 표준 모델 시스템

한다.

[그림1]에서 제어기 전달 행렬 $T_c(s)$는

$$T_c(s)=[C_y(s) \vdots C_v(s)]$$

의 2자유도 제어기 구조이고, 시스템 전달 함수를

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s)\begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

와 같이 나타내면, 조정 변수 $z(s)$는

$$z(s) = T_{zw}(s)w(s) + T_{zv}(s)v(s) \tag{1}$$

이다. 여기에서

$$T_{zw}(s) = P_{11} + P_{12}R_yP_{21} \tag{2}$$

$$R_y = (I - C_yP_{22})^{-1}C_y$$

$$T_{zv}(s) = P_{12}R_v \tag{3}$$

$$R_v = (I - C_yP_{22})^{-1}C_v$$

로 나타낼 수 있는데, 이 식들에서 제어기 부분만을 따로 생각하면

$$[R_y \vdots R_v] = (I - C_yP_{22})^{-1}[C_y \vdots C_v]$$

$$[C_y \vdots C_v] = (I + R_yP_{22})^{-1}[R_y \vdots R_v]$$

의 관계가 있으므로 (R_y, R_v)와 (C_y, C_v)는 1:1 대응관계가 있다. 여기에서 전달함수 (C_y, C_v)는 제어기를 실제로 구현할 때 필요한 표현인데 비해 (R_y, R_v)는 폐루프 제어계의 물리적 성질을 나타내기 때문에 제어기를 설계하는 관점에서는 더 큰 의미가 있다. 그러므로 우리는 앞으로 전달함수 (R_y, R_v)를 제어기로 부르기로 한다. 식(1)와 식(2)(3)에서 기준 입력 및 입력 잡음을 조정하는 항은 전적으로 R_v이고 측정잡음 및 외란을 조정하는 항은 R_y임을 쉽게 알 수 있다. 결국 두 제어기 R_v , R_y는 입력 추종 성능과 피이드백 루프 조정

두 가지 역할을 서로 분담하게 되며 이 특성을 이용하면 각각의 두 설계과정을 완전히 분리시킬 수 있다. 이에 따라, 본 논문에서 고려하고자 하는 decoupling 문제가 기준 입력 추종 문제와 관계있음을 생각한다면 결국 우리가 원하는 조건을 갖는 R_v를 구하는 문제라고 생각할 수 있다. 즉, 우선 R_y는 임의의 제어 기법을 이용하여 안정한 제어기 형태를 구했다고 가정하고, 본 논문에서는 decoupling 요건을 갖는 R_v를 구하고자 한다. z_v는 $w=0$일 경우의 s를 의미하는 데, 이때 일반적으로 z_v신호는 플랜트 입력(혹은 제어기 출력)과 플랜트 출력 등으로 구성이 되며 대개 플랜트 출력중에 기준 입력을 추종하는 변수가 포함된다. decoupling 문제에서는 기준 입력에만 추종하는 신호들을 분리해낼 필요가 있으므로 이 신호를 z_1이라고 하고 이를 위한 행렬 T_m을 고려하면 식(1)는

$$z_1 = T_m z_v = T_m T_{zv} v$$

가 되며 여기에서 식(3)를 이용해 새로운 전달함수

$$T_{z_1 v} = T_m T_{zv} = T_m P_{12} R_v \qquad (4)$$

를 정의하자. 이제 decoupling 제어의 내용은 기준입력 $r(s)$에서 기준 입력에 추종하는 변수 $z_1(s)$까지의 전달함수 $T_{z_1 v}$를 대각행렬로 만드는 제어기를 구하는 것이다. 따라서, Δ를 폐우평면에서 해석적인 임의의 안정한 유리 행렬이라고 할 때 $T_{z_1 v}$가 decpupling 요건을 가지려면

$$T_{z_1 v} = T_m P_{12} R_v = \Delta \qquad (5)$$

단, Δ는 안정한 실유리 대각행렬

이어야 한다. 결국 주어진 decoupling 요건을 만족하는 제어기 C_v의 설계는 식(5)를 만족하는 R_v를 구하는 문제로 생각할 수 있다. 그리고, 다음은 [그림1]의 플랜트 P가 안정화 가능을 보장하는 조건이다.

가정 2.1 플랜트 P는 우반평면에서의 잠복 극점이 없으며,

$$\Psi^+_{P_{22}} = \Psi^+_P$$

이다. 여기서 $\Psi_{P_{22}}$와 Ψ_P는 각각 P_{22}와 P의 특성 분모식이고, Ψ^+와 Ψ^-는 각각 다항식 Ψ의 폐우평면과 개좌평면에 위치한 영점만을 갖는 다항식이다.

2.2 문제 설정 및 제어기 설계

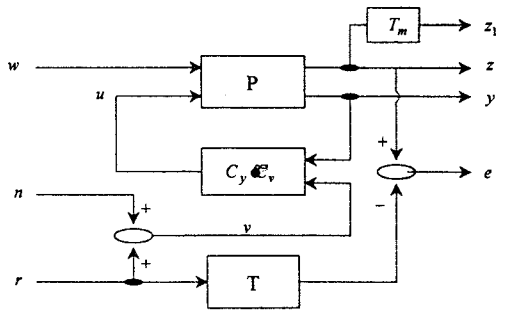
우선 앞 절에서 서술한 바와 같이 제어입력 u와 입력 신호 v의 차원은 일반적으로 서로 같지 않다. 그러나, 본 장에서는 특수한 경우로 다음과 같은 가정을 생각하자.

가정 2.2 제어 입력 신호와 기준 입력 신호의 차원은 같다.

[가정2.2]이 만족할 경우, $r_2 = q$가 되고 따라서 R_v는 정방행렬이 된다. 본 논문에서 제시하는 위너-호프 제어기 설계는 폐루프 시스템을 내부적으로 안정시키고 제곱형 평가함수를 최소화하는 제어기를 찾는 것이다. 이 평가함수를 다음 오차항(error)

$$e = z_v - T \cdot r$$

의 평균 전역으로 생각한다. 단, z_1은 출력변수 z_v에서 식(4)에 따라 분리해낸 신호이고 T는 폐우평면에서 해석적($Re\ s \geq 0$)인 분수적 함수라고 할 수 있다. 이제 $(T_m P_{12}) = B_{p1} A_{p1}$의 우 다항식 서로소 쌍을 생각하고, 식(4)의 허용가능한 R_v가 decoupling 요건을 갖도록 하기 위해 먼저 다음과 같은 행렬을 정의한다.



[그림2] 2 자유도 구조의 decoupling 제어기 설계

정의 2.2 Δ_L과 Δ_R은 같은 크기의 차원을 갖는 대각행렬이며 그 각각의 원소의 형태는 다음과 같다.

$$\cdot\ \Delta_L = diag\{\Delta_{L1}, \Delta_{L2}, \cdots, \Delta_{Lr_2}\}$$

단, Δ_{Li}는 B_{p1}의 i 번째 열에 있는 폐우평면 원소들의 최대 공약 다항식이며 최고차항의 계수는 1이다. 따라서, $B_{p1} = \Delta_L \tilde{B}_{p1}$의 식을 만족한다.

$$\cdot\ \Delta_R = diag\{\Delta_{R1}, \Delta_{R2}, \cdots, \Delta_{Rr_2}\}$$

Δ_{Rj}는 $A_1^{-1} A_{p1} \tilde{B}_{p1}^{-1}$의 j번째 행에 있는 원소의 분모들의 폐우평면 영점항들의 최소 공배다항식이며 최고차항의 계수는 1이다. }

가정 2.3 ($T_m P_{12}$)행렬은 역행렬이 존재한다.

정리 2.1 [가정 2.1, 2.2, 2.3]들이 모두 만족할 때 허용가능하고 decoupling 요건을 갖춘 R_v의 형태는

$$R_v = (T_{m1} P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R Đ$$

단, Đ는 폐우평면에서 해석적인 임의의 실유리 대각행렬이다. 증명) [3] 참조

이제 구해진 허용 가능하고 decoupling 요건을 갖춘 R_v의 집합에서 주어진 평가함수를 최소화 시키는 $\tilde{R}_v$를 구하기 위해 먼저 다음과 같은 가정들을 생각한다.

가정 2.4 T는 분수적 행렬이고, spectral density인 $G_r(s)\ (\leq 0(s^{-2}))$과 G_o는 full rank를 갖는다.

가정 2.5 G_n과 G_0는 허수축상의 극점을 갖지 않는다.

가정 2.6 $(\Delta_L \Delta_R)$은 허수축상의 영점을 갖지 않는다.

정리 2.2 [가정2.4, 2.5, 2.6]이 모두 만족할 때, Λ와 Ω_0가

$$\Delta_{R*} \Delta_{L*} (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} P_{12} (T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R = \Lambda_* \Lambda$$

$$\Lambda_* \Lambda \triangleq G_\lambda, \qquad G_r + G_n = \Omega_o \Omega_{o*} \triangleq G_o$$

방정식의 위너-호프 spectral 해이고, Ω는

$$\Gamma = G_\lambda \cdot G'_0 = \Omega_* \Omega$$

방정식의 위너-호프 Spectral 해라고 하면(즉, Ω, Ω^{-1}는 모두 개우평면에서 해석적이다)주어진 평가 함수를 최소화시키고 시스템을 decoupling시키는 허용가능한 $\tilde{R}_v$의 형태는

$$\tilde{R}_v = (T_{m1} P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R Đ_o$$

이다. 단,

$$Đ_o = diag\{d_{o1}, d_{o2}, \cdots, d_{oq}\}$$

$$d_o=[d_{o1}\ d_{o2}\ \cdots\ d_{oq}]'=\Omega^{-1}\{\Omega_*^{-1}v\}_+$$

$$v=[v_1\ v_2\ \cdots\ v_q]' \qquad \text{단}, v_i=x_{ii}\Delta_{Ri*}\Delta_{Li*}$$

$$X=[x_{ij}]=(T_{m1}P_{12})_*^{-1}P_{12*}TG_r$$

이다. 증명) [3] 참조

3. Decoupling 요건을 갖는 워너-호프 제어기 설계 - R_v가 비정방행렬인 경우

3.1 기본 개념

2.2절에서 구한 제어기 R_v의 경우 [가정2.2]에 의하여 정방행렬의 형태를 갖는다. 이는 일반적인 형태가 아니므로 이 절에서는 이 가정이 만족하지 않는 경우, 즉 비정방행렬 형태의 R_v를 구하고자 한다. 이 경우 입력 신호에 추종하는 전달함수 T_{z_1v}의 형태는 식(4)와 같이

$$T_{z_1v}=(T_mP_{12})R_t$$

로 나타나지만 이 행렬들의 차원은 앞에서와는 달리 (T_mP_{12})의 차원은 $q\times r_2$이고, R_v의 차원은 $r_2\times q$가 된다. 앞 절에서와 마찬가지로 이 시스템이 decoupling 요건을 갖추려면 T_{z_1t}가 안정한 실유리 대각행렬 형태를 가져야만 하므로, 우선 이 요건을 만족하는 허용가능한 형태 R_v를 찾아 보자. 단, 이 경우에도 시스템의 안정화 조건으로 [가정2.1]을 만족해야 한다.

3.2 문제 설정 및 제어기 설계

주어진 시스템에서 허용 가능한 모든 R_v의 형태는 H_1이 폐우평면에서 해석적인 함수일 때,

$$R_v=A_1H_1$$

라고 알려져 있다. 그러므로, 이 식을 식(11)에 대입하여 다시쓰면

$$T_{z_1v}=(T_mP_{12})R_v=(T_{m1}P_{12})A_1H_1$$

가 되는 데, 여기서 decoupling 요건을 만족하는 T_{z_1v}는 $q\times q$차원의 안정한 실 유리 대각 행렬이어야 하므로 $rank(T_{z_1v})=q$이어야 한다. 따라서 다음의 가정이 필요하다.

가정 3.1 $rank(T_mP_{12})=q$이다.

(B_{P1},A_{P1})을 $T_{m1}P_{12}=B_{P1}A_{P1}^{-1}$을 만족하는 우 다항식 서로소 쌍이고, $p=\widetilde{B}_{p1}A_{p1}^{-1}A_1$이고 d_p는 이 행렬의 분모항의 최소 공배 다항식이다. V는 p를 $pV=[\tilde{p}\,\vdots\,0]$의 Hermitian 형식으로 만들어 주는 Unimodular행렬이고, $M=\tilde{p}/d_p$이다.

정의 3.1 $B_{P1}=\Delta_L\widetilde{B}_{P1}$이고, 이때 Δ_L은

$$\Delta_L=diag\{\Delta_{L1},\Delta_{L2},\cdots\Delta_{Ln}\}$$

단, Δ_{Li}는 B_{P1}의 i번째 열의 모든 폐우평면 원소들의 최소공배수이다.

정의 3.2 Δ_{Rj}는 M^{-1}의 j번째 행의 폐우평면 원소들의 최소공배수이고 그 최고차항의 계수가 1이라고 할때, Δ_R은

$$\Delta_R=diag\{\Delta_{R1},\Delta_{R2},\cdots\Delta_{Rn}\}$$

이다.

정리 3.1 $rank(P_{22})=q$를 만족할 때, 시스템의 decoupling요건을 만족시키는 허용가능한 제어기 R_v의 형태는

$$R_v=A_1V\begin{bmatrix}M^{-1}\Delta_R\text{Đ}\\ \hat{H}_{21}\end{bmatrix}$$

이다. 단, Đ는 폐우평면에서 해석적인 임의의 안정한 실유리 대각행렬이며 $\hat{H}_{21}$은 폐우평면에서 해석적인 임의의 안정한 실유리 행렬이다. 증명) [3] 참조

이제 구해진 decoupling 요건을 갖춘 허용가능한 R_v의 집합에서 주어진 평가함수를 최소화시키는 $\hat{R}_v$를 구하기 위해 먼저 다음과 같은 가정들을 생각한다.

가정 3.2 T는 분수적 행렬이고, spectral density인 $G_r(s)(\le 0(s^{-2}))$을 만족하고 G_r과 G_o는 full rank를 갖는다.

가정 3.3 G_n과 G_0는 유한 허수축 상에서 극점을 갖지 않는다.

정리 3.2 Λ와 Ω_0는 각각

$$\left(\begin{bmatrix}\Delta_{R*}M_*^{-1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}V_*A_{1*}P_{12*}\right)\left(P_{12}A_1V\begin{bmatrix}M^{-1}\Delta_R & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right)$$
$$=\Lambda_*\Lambda\triangleq G_\lambda$$

$$G_r+G_n=\Omega_0\Omega_{0*}\triangleq G_0$$

방정식의 워너-호프 spectral 해이고,

$$\Lambda=[\Lambda_1\ \vdots\ \Lambda_2],\quad G_\lambda=\begin{bmatrix}G_{\lambda11} & G_{\lambda12}\\ G_{\lambda21} & G_{\lambda22}\end{bmatrix}$$

일 때, Ω가

$$\Gamma=G_{\lambda11}\cdot G'_0+G_{\lambda22}\otimes G'_0=\Omega_*\Omega$$

방정식의 워너-호프 spectral해이면, 주어진 평가함수를 최소화시키고 시스템을 decoupling 시키는 허용가능한 $\hat{R}_v$의 형태는

$$\hat{R}_v=A_1V\begin{bmatrix}M^{-1}\Delta_R\text{Đ}_o\\ \hat{H}_{21o}\end{bmatrix}$$

이다. 단,

$$\text{Đ}_o=diag\{d_{o1},d_{o2},\cdots,d_{oq}\}$$

$$\hat{H}_{21o}=\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n}\end{bmatrix}$$

$$d_o=[d_{o1}\ d_{o2}\ \cdots\ d_{oq}]'$$

$$\hat{h}_{21o}=[h_{11}\ h_{12}\ \cdots\ h_{1n}\ h_{21}\ h_{22}\ \cdots h_{2n}]'$$

$$q=[d'_o\ \hat{h}'_{21o}]'=\Omega^{-1}\{\Omega_*^{-1}[v'\ w']'\}_+$$

$$v=[v_1\ v_2\ \cdots\ v_q]' \text{ 단, } v_i=\hat{t}_{0ii}\Delta_{Ri*},\qquad \hat{T}_0=[\hat{t}_{0ij}]$$

$$w=[w_1\ w_2\ \cdots\ w_n]' \text{ 단, } w_i=vec(T'_0)_{2q+i}$$

$$T'_0=\hat{T}_0\Delta_{R*}=\left(\begin{bmatrix}M^{-1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}V_*A_{1*}P_{12*}TG_r\right)'\Delta_{R*}$$

이다. 증명) [3] 참조

[참고문헌]

[1] Lee. Hai-Ping.,"Wiener-Hopf design of decoupled multivariable feedback systems", Polytechnic Univ. Ph.D Thesis.1992.

[2] 조용석, " 표준모델의 2자유도 워너-호프 제어기 설계에 관한 연구", 성균관대학교 박사학위 논문, 1997.

[3] 최군호, " H_2 제어 기법을 이용한 Decoupling 제어기 설계(가제)", 성균관대학교 박사학위논문. 1999년 발표예정.