

## 파라미터 불확실성, 모델 불확실성, 한계 잡음에 대한 $H^\infty$ 적응제어기 설계

백남석\* 양원영\*\*

중앙대학교 전기공학과(박사과정), 중앙대학교 전기공학과 교수

### **$H^\infty$ robust adaptive controller design with parameter uncertainty, unmodeled dynamics and bounded noise**

Nam-seok Baek\* Won-young Yang\*\*

\*Graduate student, \*\*Professor, Dept of Electrical engineering, Chung-Ang university

**Abstract** - Traditional adaptive control algorithms are not robust to dynamic uncertainties. The adaptive control algorithms developed previously to deal with dynamic uncertainties do not facilitate quantitative design. We proposed a new robust adaptive control algorithms consists of an  $H^\infty$  suboptimal control law and a robust parameter estimator. Numerical examples showing the effectiveness of the  $H^\infty$  adaptive scheme are provided.

### 1. 서 론

G.Zames에 의해 개발된  $H^\infty$  제어이론은 파라미터변동에 따른 모델링오차에 대하여도 제어시스템의 안정성을 보장하며 만족스러운 명령추종성을 가지는 강인한 제어기기를 설계하는 것이다. 최근에는 불확실한 시스템(uncertain system)에 대한  $H^\infty$  제어문제들이 다루어지고 있다. 모델 불확실성을 가지는 페루프시스템의 안정성과 외란에 대하여 성능을 보장하는 견실제어이론이 연구되고 있으며, 파라미터 불확실성에 대한 견실안정도 및 외란 감쇄문제등도 Lyapunov접근법을 이용하여 상태공간에서 적절고려하고 또한 비선형시스템에도 확장시켜오고 있으며 센서잡음에 대한 저감도, 제어입력의 크기 제한, 명령추종등의 문제를 표준설계방법을 이용하여  $H^\infty$  최적화문제등으로 설계되고 있다. (1)(2) 일반적인 적응제어기는 파라미터 추정기와 제어법칙의 2부분으로 구성되며, 대부분의 견실 적응제어기법은 특정한 파라미터 추정기를 사용하여 견실성능을 얻지만 여전히 모델추종제어, LQG제어, 극배치제어와 같은 비견실 제어법칙을 사용하는 한계를 지닌다. (3)-(5) 본 논문에서는 dead-zone과 투영을 갖는 반복 자승오차 알고리즘(RLS)에 의한 파라미터 추정기와 coprime 요소 불확실성에 대한  $H^\infty$  견실 제어법칙으로 제어기를 구성하여 파라미터, 모델 불확실성 및 잡음에 대한 견실성능을 수치예제를 통하여 검증하고자 한다.

### 2. 본 론

#### 2.1 견실성에 대한 고찰

적응제어기의 견실성을 향상시키기 위한 가장 일반적인 방법들은 다음과 같다.

##### 1. 한계외란에 대한 견실성

선형시불변시스템(SISO)에 한계외란  $d_1(t)$ 이 인가되었을 때

$$M_o y(t) = N_o u(t) + d_1(t) \quad (1)$$

여기서  $N_o(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$

$$M_o(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$\theta_p$ 와  $\phi(t)$ 를 아래와 같이 정의하면

$$\theta_p = [-a_1, \dots, -a_n, b_1, \dots, b_m]^T$$

$$\phi(t) = [y(t-1), \dots, y(k-n), u(t-1), \dots, u(k-m)]^T$$

적응시스템의 출력방정식은

$$y(t) = \phi^T(t) \theta_p + d_1(t) \quad (2)$$

한계외란에 대한 견실성을 얻기위한 방법으로는 persistent excitation, projection, dead-zone modification 등이 사용된다.

2. 모델 불확실성에 대한 견실성  
선형시불변 시스템(SISO)이 다음과 같이 모델링될 때

$$(M_o + \Delta_M) y(t) = (N_o + \Delta_N) u(t) \quad (3)$$

$$N_o(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$M_o(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$\Delta_M$ 과  $\Delta_N$ 은 고주파 모델불확실성이다.  $\theta_p$ 와  $\phi(t)$ 를 1과 같이 놓고 외란  $d_2(t) = -\Delta_M(t) + \Delta_N u(t)$ 이면 출력방정식은 식(4)로 된다.

$$y(t) = \phi^T(t) \theta_p + d_2(t) \quad (4)$$

모델불확실성이 시스템에 존재할 때 적응시스템의 오차방정식은 식(5)가 된다.

$$e(t) = \phi^T(t) \theta_p + d_2(t) \quad (5)$$

#### 2.2 불확실성을 갖는 시스템의 견실안정도

선형 시불변 시스템의 입.출력 관계가 식(6)으로 표시될 때

$$(M_o + \Delta_M) y(t) = (N_o + \Delta_N) u(t) + d_1(t) \quad (6)$$

여기서  $M_o$ 와  $N_o$ 는  $z^{-1}$ 의 Hurwitz다항식으로 다음과 같고,  $d_1$ 은 잡음항이다.

$$N_o(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$M_o(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

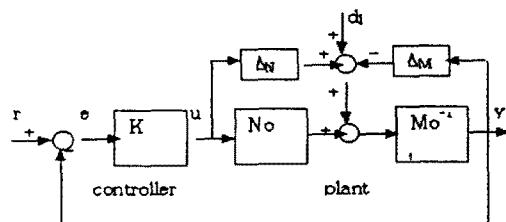


그림 1 견실안정도의 블록선도

공칭플랜트를  $P_o(z^{-1}) = M_o^{-1} N_o$ 로 정의하면 파라미터는

$$\frac{\| \Delta_N \|}{\| \Delta_M \|_{H^\infty}} \leq \frac{1}{\gamma} \text{ 이 된다.}$$

그림 1의 페루프 시스템이 안정하도록 제어기 K를 구하는 것이 목적이다. 이 문제는 small gain 정리에 의해

식(7)을 만족하는 제어기를 찾는 것과 등가이다.

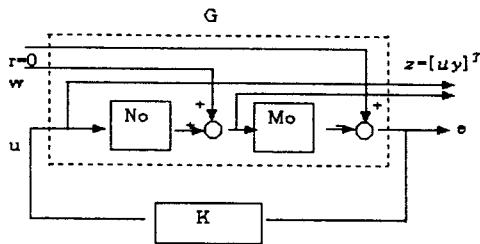


그림 2 표준형으로 표현된 견실안정도

$$\left\| \begin{bmatrix} K(1+P_oK)^{-1}M_o^{-1} \\ (1+P_oK)^{-1}M_o^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{H^\infty} < \gamma \quad (7)$$

이 문제는 그림2와 같이 표준제어기 구성문제로 재구성 할 수 있으며 일반화 플랜트의 전달행렬G는

$$G = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M_o^{-1} \\ M_o^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ P_o \\ P_o \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8)$$

견실 안정도 문제에서  $w = \Delta_N u - \Delta_M y + d_2 = [u y]^T$  라 하고 w에서 z로 가는 감도함수  $T_{zw}$ 를

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} K(1+P_oK)^{-1}M_o^{-1} \\ (1+P_oK)^{-1}M_o^{-1} \end{bmatrix} \text{라 하면 식(7)의 제어}$$

문제는  $\|T_{zw}\|_{H^\infty} < \gamma$ 를 만족하는 제어기 K를 구하는 것이 된다.

### 2.3 적응 견실 제어

적응 견실 제어문제는 파라미터 불확실성 모델 불확실성을 갖는 플랜트가 안정화되도록 적응제어기를 구하는

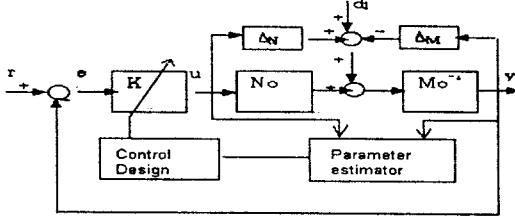


그림 3 적응제어 시스템의 블록선도

것으로 정의된다.

그림3에서 폐루프시스템의 모든 신호가 한계(bounded)를 가질 때 식(6)으로 표현된 플랜트의 적응제어기를 설계하는 것이 목적임을 나타낸 것이다.

#### 2.3.1 견실 파라미터 추정기

식(6)에서 입.출력 관계를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} M_o(t) &= N_o u(t) + \Delta_N u(t) - \Delta_M y(t) + d_1(t) \\ \Rightarrow y(t) &= (1 - M_o) y(t) + N_o u(t) + \Delta_N u(t) - \Delta_M y(t) + d_1(t) \\ \Rightarrow y(t) &= \phi(t-1)^T \theta_p + d_2(t) + d_1(t) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} d_2(t) &= \Delta_N u(t) - \Delta_M y(t) \\ \phi(t-1) &= [y(t-1), \dots, y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-n)]^T \end{aligned}$$

$d_1$ 과  $d_2$ 를 묶어  $\eta$ 로 놓으면

$$\eta(t) = d_1(t) + d_2(t) \quad (9)$$

따라서

$$y(t) = \phi(t)^T \theta_p + \eta(t) \quad (10)$$

$\hat{\theta}(t) = [-\hat{a}_1(t), \dots, -\hat{a}_n(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_m(t)]^T$  정의하면  $\hat{\theta}(t)$ 는 시간 t에서  $\theta_p$ 의 추정값이다.

$\hat{y}(t) = \phi^T(t-1) \hat{\theta}(t-1)$ 은 시간 t-1에서 y(t)의 추정 값이 된다.

$\hat{\theta}(t) = \theta_p - \hat{\theta}(t)$  라 하면  $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ 는 예측오차가 된다.

$$d_2(t) = \begin{bmatrix} \Delta_N \\ -\Delta_M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \left\| \begin{bmatrix} \Delta_N \\ -\Delta_M \end{bmatrix} \right\|_B \leq D_3$$

$$D_2(t) \equiv D_3 \max_{0 \leq t \leq t} |u(t)|, |y(t)| \text{ 이면}$$

$|d_2(t)| \leq D_2(t), \forall 0 \leq t \leq t$  되고.  $D_2$ 는  $|d_2|$ 의 구속함수가 된다.  $\hat{\theta}$ 의 추정은 dead-zone과 projection을 갖는 수정된 반복자승 알고리즘을 이용한다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \text{Proj}_{\mathcal{D}}[\hat{\theta}(t-1) + \frac{\nu(t)P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} e(t)] \\ P(t-1) &= P(t-2) - \frac{\nu(t)P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \\ P(-1) &= P(-1)^T > 0 \end{aligned}$$

여기서

$$v(t) = \frac{\alpha f(\beta(D_2(t) + D_1), e(t))}{|e(t)|} \quad (11)$$

$f$ 는 다음과 같이 정의되는 dead-zone 함수이다.

$$f(x, y) = \begin{cases} |y| - |x| & \text{if } |y| > |x| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

#### 2.3.2 견실 $H^\infty$ 적응 제어기

제어법칙으로는 컴퓨터상에서 온라인으로 계산될수 있도록 2개의 대수 리카티 방정식을 푸는  $H^\infty$  준최적제어기를 이용하고자 한다. 알고리즘은 다음과 같이 요약된다.

1. 설계규격  $\theta_p, D_1, D_3, n$
2. 파라미터  $\alpha, \sigma$ 의 설정
3. 추정된 모델  $\hat{M}_t, \hat{N}_t$ 을 얻기 위한 파라미터 추정
4. 가판축 표준형의 구성

$$\hat{N}(t) = \begin{bmatrix} A_N & B_N \\ - & - \\ C_N & D_N \end{bmatrix}, \quad \hat{M}(t) = \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ - & - \\ C_M & D_M \end{bmatrix}$$

5.  $\hat{M}_t, \hat{N}_t$ 에 대응하는 A,B,C,D,L 구하기

$$\begin{aligned} A &= A_M - L C_M, B = B_N, C = C_N \\ D &= 0, L = B_M \end{aligned}$$

6. 일반화된 플랜트의 구성

$$G = \begin{bmatrix} A_G & B_G \\ - & - \\ C_G & D_G \end{bmatrix}$$

7.  $\|T_{zw}\|_{H^\infty} < \gamma$ 를 만족하는  $K_\sigma$  찾기

$$K_\sigma = \begin{bmatrix} A_{K_\sigma} & B_{K_\sigma} \\ - & - \\ C_{K_\sigma} & D_{K_\sigma} \end{bmatrix} \text{ 단 } \gamma = \frac{1}{x_\sigma \beta D_3}$$

8. K구하기

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K/\sigma & B_K/\sigma \\ C_K/\sigma & D_K/\sigma \end{bmatrix}$$

9. 출력  $y(t)$ 를 구하기 위한 제어  $u(t) = -Ky(t-1)$ 의 적용  
10. 시간  $t+1$  까지 단계 3 - 9의 적용

## 2.4 수치예제

본 논문에서 구성한 파라미터 추정기 및 제어기의 유효성을 검증하고자 3계 및 4계 플랜트에 적용하고자 한다.  
1. 이산치 시스템이 3계로 다음과 같고 샘플링은 0.1초이며 한계잡음  $d_1=0.01\sin(0.2t)$ 라 가정한다.

$$(1-0.8z^{-1}+0.016z^{-2}-0.014z^{-3})y(t) = (0.7z^{-1}+0.018z^{-2}+0.012z^{-3})u(t) + d_1(t)$$

실제 공정 플랜트는 1계 모델로

$$(M_o + \Delta_M)y(t) = (N_o + \Delta_N)u(t) + d_1(t) \quad \text{이며, 공정모델의 구조는 } P_o(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

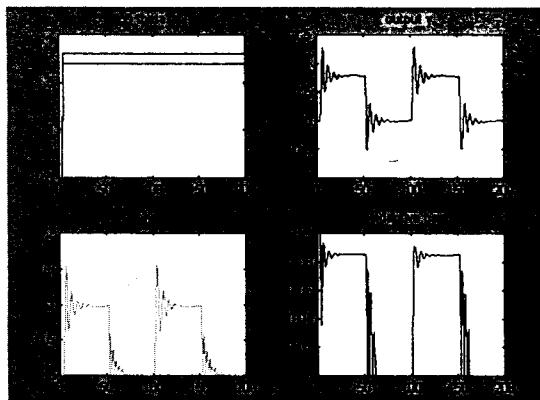


그림 4 3계 플랜트의 스텝응답(1계모델)

모델 파라미터는  $(a_1, b_1) = (-0.8, 0.7)$ , coprime 요소  $M_o(z^{-1}) = 1 - 0.8z^{-1}$ ,  $N_o(z^{-1}) = 0.7z^{-1}$ 이고, 불확실성 항은 아래와 같다.

$$\Delta_M = 0.016z^{-2} - 0.014z^{-3}, \Delta_N = 0.018z^{-2} + 0.012z^{-3}$$

그림4는 초기 파라미터  $(a_1, b_1) = (-0.5, 0.5)$ 일 때  $H^\infty$  적응 제어기의 스텝응답을 나타낸 것이다. x축상의 값은 스텝

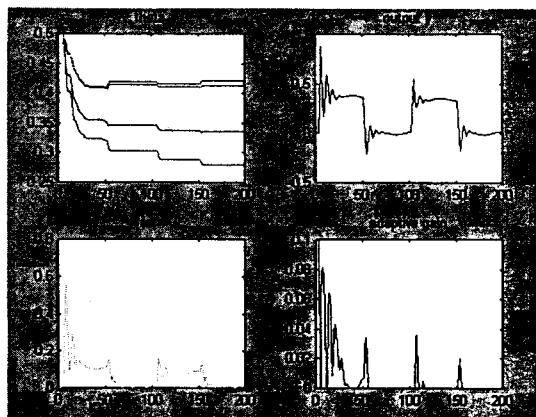


그림 5 4계 플랜트의 스텝응답(2계모델)

수이며, 다른 값의 초기 파라미터의 선정시 시스템의 과도응답에만 영향을 주며 정상상태에서는 성능차이가 없다.

2. 이산치 시스템이 4계로 다음과 같고 샘플링은 0.1초이며 한계잡음  $d_1=0.01\sin(0.2t)$ 라 가정한다.

$$(1-0.8z^{-1}+0.4z^{-2}-0.0244z^{-3}-0.015z^{-4})y(t) = (0.5z^{-1}+0.2z^{-2}+0.0182z^{-3}-0.0122z^{-4})u(t) + d_1(t)$$

공칭모델의 구조는  $P_o(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$  이다.

공칭 모델의 파라미터가  $a_1 = -0.8, a_2 = 0.4,$

$b_1 = 0.5, b_2 = 0.2$ 으로 가정하면 다음을 얻는다.

$$\Delta_M = -0.0244z^{-3} - 0.015z^{-4}$$

$$\Delta_N = 0.0182z^{-3} - 0.0122z^{-4}$$

그림5는 이 시스템에 대한 스텝응답을 나타낸 것으로 출력응답에서 sinusoidal 변화를 보이는 것은 폐루프 시스템의 불안정 때문이 아니라 외란항에 기인한 것이다.

## 3. 결 론

$H^\infty$ 연설 제어법칙과 견실 파라미터 추정기로 구성된 새로운 견실 적용 제어기를 제안하였다. 불확실성을 갖는 시스템의 견실안정도 성질에 대하여 고찰하였으며, 3계(공칭모델 1계)와 4계(공칭모델 2계)의 이산시스템에 대하여 본 제어기를 적용하여 그 유효성을 입증하였고 설계절차는 체계적인 특징을 갖는다. 공칭 플랜트의 파라미터, 모델 불확실성의 크기, 한계 외란의 크기등이 주어지면 이 제어기법은 외부입력이 제한될 때 적응시스템의 모든 신호가 제한됨을 보장하는  $H^\infty$  적용 제어기를 설계하는데 사용될 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] M.J.Grimble," $H^\infty$  robust controller for self-tuning applications part I. controller design", International J control, vol.46 No.4 ,pp1429-1444, 1987
- [2] J.C.Doyle,K.Glover,B.A.Francis,"State space solutions to standard H2 and  $H^\infty$  control problems", IEEE transactions on Automatic control, Vol.34 ,pp 831-846, 1989
- [3] P.A.Ioannou and J.Sun, "Theory and design for direct and indirect adaptive control schemes", Inter Journal of control, vol.47 no.3, pp775-813, 1988
- [4] C.E.Rohrs,L.Valavani,M.Athans, and G.Stein, "Robustness of continuous time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics", IEEE transactions on Automatic control, Vol.AC-30 No. pp 881-888, 1985
- [5] K.S.Narendar and A.M.Annavaswamy, Stable Adaptive System, Prentice-Hall, 1989
- [6] Chujen Lin," $H^\infty$  Robust Adaptive Control", Ph. University of Maryland,Harvard University, 1996
- [7] 심덕선, "견실제어 및  $H^\infty$  제어", 강의노트(중앙대 제어계 측과), 1998
- [8] 이갈래, 오도창, 박홍배, "파라미터 불확실성 및 모델 불확실성에 대한  $H^\infty$  견실성능 제어기 설계", 제어, 자동화, 시스템공학 논문지, 3권1호, 1997.2
- [9] 서원기, 이진수, "적용제어 시스템의 과도상태 성능개선을 위한 제어기 설계", 3권2호, 1997.4