

## 極座標 拋物形 波動方程式에 의한 變水深 点源波의 數值解析

郭文秀\* · 片宗根\*

### 1. 緒論

港内の波浪場을 구하는 것은 港灣設計上 중요하다. 요즈음에는 많은 경비와 노력을 요하는 水理模型實驗대신에 다양한 數值解析이 행하여 지고있다. 그러나 廻折 및 多重反射, 屈折등 복잡한 波의 變形을 표현할 수 있는 數值解析 방법으로 여러 가지가 제안되어 있지만 아직 충분한 수준은 아니라고 판단된다. 等水深에 대해서는 이미 확립되어져 있는 Green함수법을 變水深場에 응용하기 위해서 變水深場에 대한 点源波(source waves)의 基本解(unit solution)를 구하는 것이 본 연구의 목적이다.

平面波浪場의 가장 일반적인 緩傾斜方程式을 基礎方程式으로 하여 点源波가 圓環狀으로 전파하는 상황을 표현하기 위하여 이것을 極座標로 표시하고 進行性的 波를 간편하게 計算하기 위하여 分轄行列法(splitting matrix method ; Coronas, 1975)을 이용하여 拋物形方程式으로 근사화하였다. 유도된 拋物形 波動方程式을 差分化하여 變水深場에서의 点源波의 基本解를 數值的으로 구하였다.

### 2. 基礎方程式의 誘導

点源으로부터 나오는 波가 圓環狀으로 전파하는 것을 생각하면, 波浪場은 極座標로 표시하는 편이 편리하다. 또한, 많은 点源으로부터 나오는 圓環波를 해석해야하므로 基本解를 구하는 段階에서는 될 수 있는한 간편한 計算법을 採用하는 것이 바람직하다. Green함수법에서는 波廻折의 重要부분은 基本解의 重疊에 의해서 표현되므로, 개개의 基本解를 구하는 段階에서 廻折效果를 엄밀히 評價하는 것은 그렇게 중요하지는 않다. 따라서 平面波浪場에 대한 가장 일반적인 線形的 基礎方程式인 緩傾斜方程式을 極座標로 표기하고, 이것을 拋物形方程式으로 近似化시키는 것을 생각한다.

平面 2次元의 緩傾斜方程式은 다음식으로 주어진다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (1)$$

여기서,  $\phi$ 는 復素振幅포텐셜函數,  $k$ 는 波數,  $C$ 는 位相速度,  $C_g$ 는 群速度,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 이다. 이식을 극좌표로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial CC_g}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial CC_g}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + CC_g \left( k^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi = 0 \quad (2)$$

여기서,  $r$ 은 点源으로부터의 距離,  $\theta$ 는 方向角이다. 식(2)의 解  $\phi$ 가 湧出波成分  $\phi^+$  및 吸入波成分  $\phi^-$ 의 합으로 表示되는 것으로 한다. 즉

---

\* 명지대학교 토목·환경공학과(Department of Civil and Environmental Eng., Myongji Univ.)

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (3)$$

이다. 直交座標系에서는 入射波와 反射波로 구분하지만 極座標系의 点源波의 경우는 湧出되는 파와 吸入되는 파로 구분한다. 一般的으로  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ 도  $\phi^+$  및  $\phi^-$ 의 線形結合으로 表示되기 때문에 이것을

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = A \phi^+ + B \phi^- \quad (4)$$

로 놓는다. 여기서는 進行性的의 波만을 생각하므로, 식 (3) 및 (4)로부터  $\phi^-$ 를 消去하면

$$\phi^+ = \frac{B}{(B-A)} \phi^- - \frac{1}{(B-A)} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (5)$$

가 된다. 여기서는  $\phi^+$ 와  $\phi^-$ 에 대해서 近似的으로 다음과 같은 Hankel函數의 漸近展開式의 初項을 利用한다.

$$\phi^+ = a \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (6)$$

$$\phi^- = b \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (7)$$

進行波의 성분에 대해서 최종적으로 얻어진 拋物形 波動方程式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} = & \left\{ ik - \frac{i}{2r} + \frac{i}{8kr^2} - \frac{1}{2kCC_g} \frac{\partial}{\partial r} (kCC_g) - \frac{i}{4kr} \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial r} \right\} \phi \\ & + \frac{i}{2kr^2 CC_g} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( CC_g \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

等水深인 경우에는,  $k$ 와  $CC_g$ 가 일정하므로 식(8)은

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} \right) \phi + \frac{i}{2kr^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (9)$$

가 되어, Helmholtz方程式의 拋物形 近似式이 얻어진다.

### 3. 數值解析

數值計算法으로서 点波源을 중심으로  $r$ 방향의 格子番號를  $i$ ,  $\theta$ 방향의 格子番號를  $j$ 로 하는 計算格子를 취하고(Fig. 1), 基礎方程式(8)을 差分化하여 Crank-Nicolson法을 利用하여 点源波의 解를 구한다. 点波源 그 자체는 特異点이고 이것을 數值的으로 다루는 것은 不可能하다. 따라서,

波源近傍에 等水深의 微小圓領域을 想定하여, 그 外緣으로부터 外側을 향하여 marching scheme의 計算을 행한다.

誘導된 拋物形 波動方程式의 妥當性을 調査하기 위하여, 우선 等水深場의 点源波에 대한 位相變化和 振幅變化를 計算하여, 嚴密解인 Hankel函數値와 比較하였다. Fig. 2의 位相變化를 보면, 拋物形 近似式의 誘導과정에서 漸近展開式에 의한 近似을 包含하기 때문에 計算始点  $kr_0$ 를 点源에 가깝게 잡으면 잡을수록 位相의 差가 크다. 그러나 計算始点을  $kr_0 > 0.8$  로 잡으면 Hankel 函數値와 잘 一致하는 結果를 얻을 수 있었다. 또한 이 條件下에서는, Fig. 3의 振幅變化에 대해서도 充分한 精度가 얻어졌다.

다음으로는 水深이 變化하는 경우로서 平行等深線斜面上의 点源으로부터 나오는 波의 計算結果를 나타낸다. 특히 波速 C가 線形으로 變化하는 場合에 대해서는 屈折의 嚴密解를 얻을 수 있고 이것을 조합하여 波峰線의 양호한 近似解를 얻는다. Fig. 4는 이 경우에 대하여 計算値와 理論解를 比較한 것이다. 極淺海域에서 兩者간에 有義한 差가 인정되지만 여기서는  $r$ 方向의 距離간격을 일정하게 하였기 때문에 波速의 減小과 동시에 精度의 상대적인 저하가 생기는 것으로 생각된다. 그 이외의 영역에서는 아주 좋은 일치를 볼 수 있다.

#### 4. 結 論

緩傾斜方程式으로부터 출발하여 極座標系에 있어서의 拋物形 近似式을 誘導하였다. 또한 얻어진 拋物形 波動方程式을 數值的으로 풀으로써, 点源 근방의 小領域을 제외하면 高精度의 數值解가 얻어지는 것을 確認하였다. 本 研究에서 얻어진 拋物形 波動方程式의 基本解를 Hankel函數 대신에 点源波로서 組合하는 것에 의해, Green函數法의 一般化가 기대된다.

단, 여기서 얻어진 拋物形 近似式으로는 点源으로부터  $1/8$  波長까지의 領域( $kr < 0.8$ )에서 精度가 나쁘고 이 範圍에서 等水深으로 假定하여 Hankel函數를 그대로 이용하는 配慮가 必要하다.

#### 參考文獻

- Barailler, L. and Gaillard, P., 1967. Evolution recent des modeles mathematiques dagitation due a la houl : Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, *La Houille Blanche*, 22(8), pp. 861-869
- Berkhoff, J. C. W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng.*, ASCE, pp. 471-490.
- Corones, J., 1975. Bremmer series that correct parabolic approximation, *J. Math. Anal. and Appl.*, 50, pp.361-372.
- Lee, J. J., 1969. Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Report No. KH-R-20, Div. of Eng. and Applied Science, Calif. Inst. of Tech., Pasadena, Calif.
- Radder, A. C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 95(1), pp. 159-176.
- 日本土木學會, 1994. 海岸波動 - 波・構造物・地盤の相互作用の解析法.

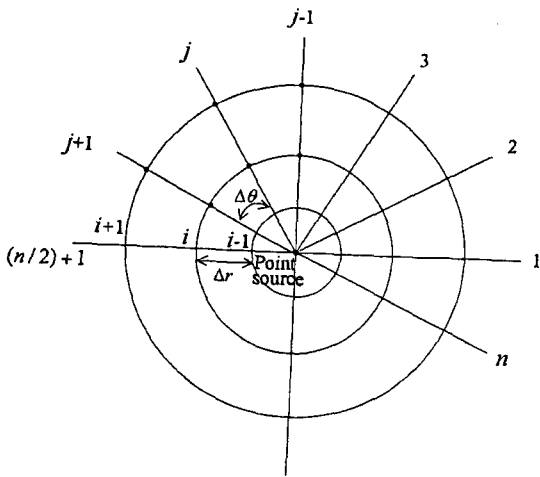


Fig. 1. Grid system for the Crank-Nicolson method.

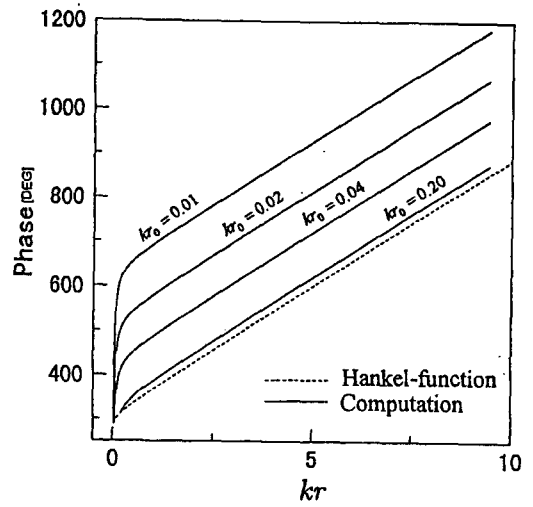


Fig. 2. Comparison of numerical and analytical solutions with wave phase ( $k$ : wave number,  $r$ : distance from the wave source).

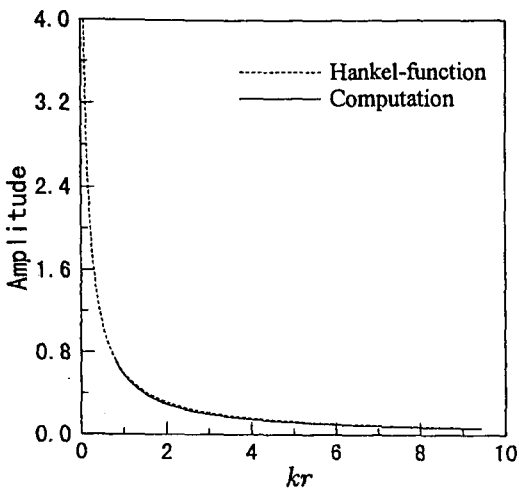


Fig. 3. Comparison of numerical and analytical solutions with wave amplitude.

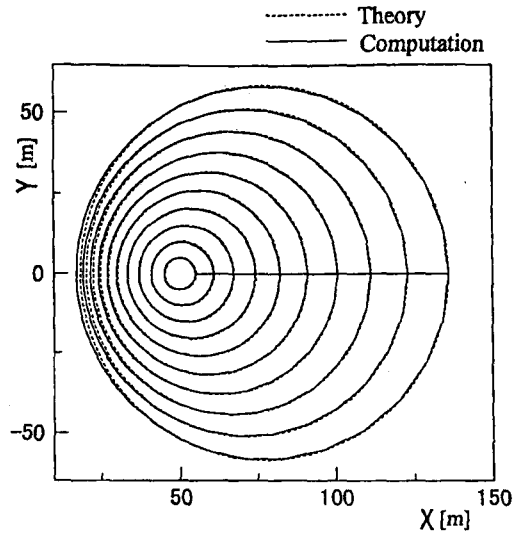


Fig. 4. Propagation of a point source waves over a uniform slope.