일 반 관 리 분 야

비방향성 그래프에서의 빠른 신뢰도계산에 관한 연구

이광원, 성대현, 김유탁
호서대학교 산업안전공학과

1. 서론

현대산업에서는 눈부신 기술의 발달로 모든 시스템이 대형화, 복잡화되고 있다. 이들 시스템의 고장은 사회적으로 커다란 문제를 야기할 수 있으며, 이에 이들 시스템의 신뢰도 계산은 필요하다. 이때 신뢰도계산을 목적으로 Network나 통신망 등의 시스템구조는 비방향성 graph로 아주 쉽게 표현될 수 있다. 지금까지는 시스템의 신뢰도 계산방법중 가장 빠른 것으로는 domination이론을 이용한 것들이 발표되었으나, 모두 방향성 graph(directed graph)에 대한 연구[1~8]이었다.

이에 본 연구에서는 non direct graph에서 domination성질을 관찰하여보고, 이의 결과를 기초로 하여 효과적인 신뢰도 계산방법과 식을 제시하여 본다.

2. 이론적 배경

2-1) 비방향성 그래프

Network이나 통신망 등은 절점의 집합 V와 방향성이 없는 선들의 집합 E로 구성되는 그래프 G=(V, E)로 시스템의 구조를 쉽게 표현된다.

이때 절점들은 기지국 등을 뜻하게 되고 선들은 선로(또는 지로)를 뜻하게 된다.

본 연구에는 절점의 신뢰도는 1이라 가정하고 선들은 이에 대응하는 선로의 신뢰도를 갖게 된다. 이때 임의의 두 점(source절점과 terminal절점)에서 시스템의 신뢰도는 두 점이 연결되는 확률이며, 이를 계산하기 위해서는 보통 minimal path또는 minimal cutset(m-path나 m-cutset)을 찾은 후 poincaré식으로 계산한다.

보통 시스템의 신뢰도 분석시 "어떤 경로로 정상인가"보다는 "어떻게 고장나는가"에 더 관심을 갖게 되며, 결국 m-cutset을 중심으로 관찰을 하는 경우가 많다.

본 연구에서는 m-cutset을 기초로한 domination의 성질을 고찰한다.

2-2) domination 이론

m-cutset을 기초로 한 domination값은 [1]에서 설명되어진 바와 같이 결국 poincaré식에 나타나는 같은 선들을 갖는 항들중 "+"와 "-"의 부호를 갖는 항들을 소거하고 남은 항의 계수의 합과 같다.

예1) 다리구조(bridge structure)

다리구조의 m-cutset들의 집합은

$$C(G) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\} = \{\{1,2\},\{4,5\},\{1,3,5\},\{2,3,4\}\}$$

이며 poincaré식에서는 시스템의 비신뢰도 Q(G)는

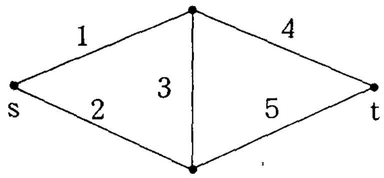


Fig.1 Bridge structure

$$\begin{aligned}
Q(G) &= \bigcup_{i=1}^{4} q(C_i) \\
&= q(C_1) + q(C_2) + q(C_3) + q(C_4) \\
&\quad - q(C_1 \cdot C_2) - q(C_1 \cdot C_3) - q(C_1 \cdot C_4) - q(C_2 \cdot C_3) \\
&\quad - q(C_2 \cdot C_4) - q(C_3 \cdot C_4) \\
&\quad + q(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3) + q(C_1 \cdot C_2 \cdot C_4) \\
&\quad + q(C_1 \cdot C_3 \cdot C_4) + q(C_2 \cdot C_3 \cdot C_4) \\
&\quad - q(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4) \\
&= q(1,2) + q(4,5) + q(1,3,5) + q(2,3,4) \\
&\quad - q(1,2,4,5) - q(1,2,3,5) - q(1,2,3,4) - q(1,3,4,5) \\
&\quad - q(2,3,4,5) - q(1,2,3,4,5) \\
&\quad + q(1,2,3,4,5) + q(1,2,3,4,5) + q(1,2,3,4,5) + q(1,2,3,4,5) \\
&\quad - q(1,2,3,4,5)
\end{aligned}$$

가 된다.

이때 선들의 집합{1, 2, 3, 4, 5}는 +항이 4번, -항이 2번 나타나며 결국 C(G)를 기초로 한 {1, 2, 3, 4, 5}의 domination값 d({1, 2, 3, 4, 5,},C(G))=2가 된다.

이는 {1, 2, 3, 4, 5}를 구성하는 formation(cutset들의 집합)들중 짝수개의 cutset들로 구성되는 짝수 formation수(F_e)는 2개(즉, $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4$와 $C_3 \cdot C_4$), 홀수 formation수(F_o)는 4개(즉 $C_1 \cdot C_3 \cdot C_4$, $C_2 \cdot C_3 \cdot C_4$, $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3$, $C_1 \cdot C_2 \cdot C_4$)이므로 [1]의 정의에서 d({1, 2, 3, 4, 5}, C(G))=F_o-F_e=2가 되는 것과 같다.

3. 비방향성 그래프에서의 domination 성질

본 장에서는 비방향성 그래프에서 m-cutset들의 성질을 관찰하여 얻은 몇 가지 신뢰도 계산에 필요한 식을 다음과 같이 얻었다.

Lemma 1

$$C(G-e) = \{C(G)-e\}^{\min}$$

Lemma 2

$$d(G-\underline{e}, C(G)) = d(G-\underline{e}, C(G*\underline{e}))$$

Lemma 3

$$d(G-e, C(G*e)) = d(G-e, C(G-e)) - d(G, C(G))$$

with C(G-e) : 선 e가 제거된(elimination) graph G-e에서의 m-cutset

$C(G)-e = \{C_1-e, C_2-e, C_3-e, \cdots, \cdots, C_l-e\}$

즉, G의 선 e를 포함한 모든 m-cutset에서 선 e를 제거한 것들의 집합

G*e : 선 e를 축약(contraction)시킨 graph G

즉, 선 e의 양끝 점을 하나의 절점으로 묶고 선 e를 제거한 graph.

예2) Fig. 1의 다리구조에서 선 3에 대한 elimination과 contraction후 변경된 graph는 다음과 같다.

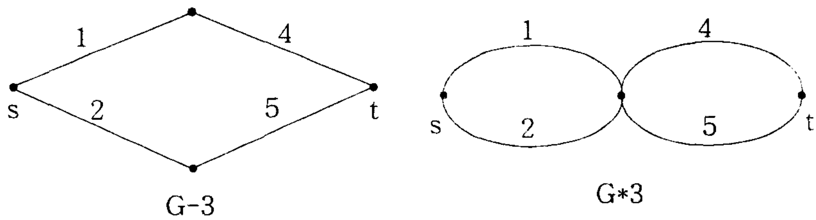


Fig. 2 elimination and contraction of bridge structure

어떤 graph G에서 모든 내부 절점이 서로 직접 하나의 선을 연결되어 있고 source절점과 terminal에서도 모든 내부 절점으로 직접 연결되어 있으면 perfect graph라 한다. 이러한 그래프G의 domination값은 다음과 같다.

Theorem 1

내부 절점이 n개인 perfect graph G_n에서 m-cutset을 기초로 한 domination 값은

$$d(G^n, C(G)) = -d(G^{n-1}, C(G^{n-1})) - \sum_{i=1}^{n} d(G^{n-i}, C(Gn-i) \cdot {}_{n-1}C_i$$

이 된다.

위의 Theorem 1 과 Lemma들은 perfect graph에서의 모든항들에 대한 domination값을 결정할 수 있게 하여준다. 이를 기초로 하여 일반적인 그래프G에 대하여 비신뢰도 Q(G)를 계산할 수 있는 다음식을 유도하였다.

Theorem 2

어떤 임의의 graph G=(V, E)의 내부 절점이 n개일 때 그래프 G의 비신뢰도 Q(G)는

$$Q(G) = \sum_{\forall A \subseteq E} Q_A$$

with $Q_A = 0$, 만약 source절점에서 A절점들로직접연결이 없는 경우,

$$Q_A = q(C_A) \cdot \left(1 - \sum_{\forall a \subset A} \frac{Q_a}{q(C_A \cap C_a)}\right), \quad \text{otherweise.}$$

위 식은 직접적으로 비신뢰도 계산을 위한 알고리즘을 제공하여 주며 다음 장에서 이에 대한 설명을 한다.

예3)

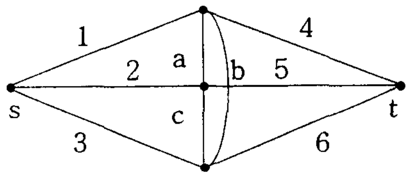


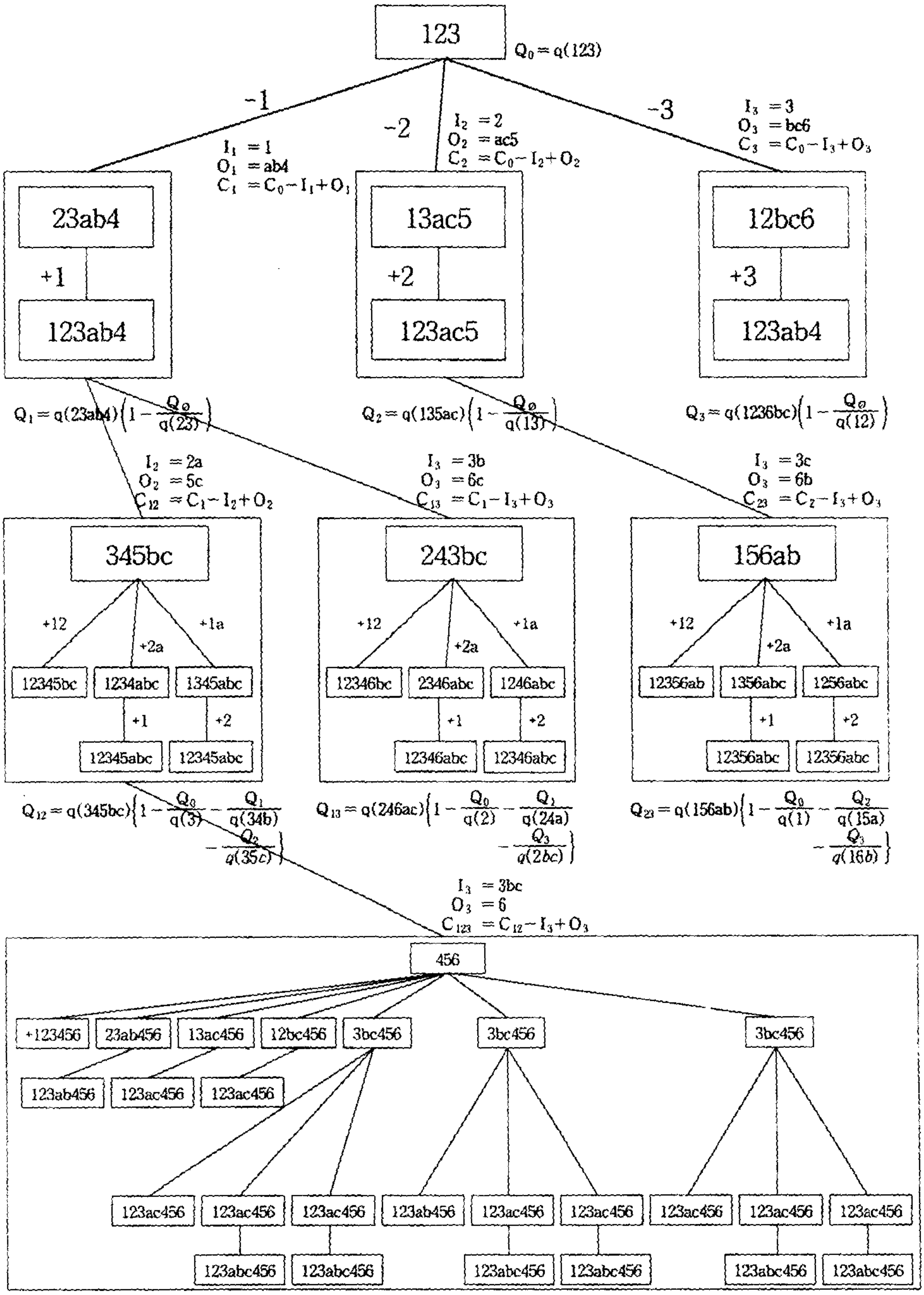
Fig.3 perfect graph with 3 innen node

내부 절점이 3개인 perfect graph G에서 m-cutset C(G)를 기초로 한 domination 값은

$$d(G, C(G)) = -d(G^2, C(G)^2) - \sum_{i=1}^{3} d(G^{3-i}, C(G^{3-i}) \cdot {}_2C_i$$

이고 계산하면, d(G,C(G))=6이 된다.

그래프 G이외에서 domination 값이 0이 아닌 모든 subgraph를 찾아보면 Fig. 4 과 같다.



$$Q_1 = q(23ab4)\left(1 - \frac{Q_\emptyset}{q(23)}\right) \qquad Q_2 = q(135ac)\left(1 - \frac{Q_\emptyset}{q(13)}\right) \qquad Q_3 = q(1236bc)\left(1 - \frac{Q_\emptyset}{q(12)}\right)$$

$$Q_{12} = q(345bc)\left\{1 - \frac{Q_0}{q(3)} - \frac{Q_1}{q(34b)} - \frac{Q_2}{q(35c)}\right\}$$

$$Q_{13} = q(246ac)\left\{1 - \frac{Q_0}{q(2)} - \frac{Q_1}{q(24a)} - \frac{Q_3}{q(2bc)}\right\}$$

$$Q_{23} = q(156ab)\left\{1 - \frac{Q_0}{q(1)} - \frac{Q_2}{q(15a)} - \frac{Q_3}{q(16b)}\right\}$$

$$Q_{123} = q(456)\left\{1 - Q_\emptyset - \frac{Q_1}{q(4)} - \frac{Q_2}{q(5)} - \frac{Q_3}{q(6)} - \frac{Q_{12}}{q(45)} - \frac{Q_{13}}{q(46)} - \frac{Q_{23}}{q(56)}\right\}$$

$$Q(G) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_{12} + Q_{13} + Q_{23} + Q_{123}$$

Fig. 4 A rooted tree for get all terms with their domination and reliability

4. 비방향성 그래프 G의 비신뢰도계산 알고리즘

주어진 그래프 G와 G의 두절점(source와 terminal절점)을 중심으로 제일먼저 직병렬구조가 있는 경우 이를 하나의 선으로 transformation시킨다. 신뢰도 계산에서 필요없는 선들은 제거 시킨후 Theorem 2의 식을 다음과 같이 적용시킨다.

i) 내부절점들을 임의의 경로에 따라 번호를 부여한다.

ii) source절점에서 출발하는 선들의 집합 O_s를 찾는다.

$C_o = O_s$, $Q_\varnothing = q(O_S)$

iii) O_s에 속한 모든 선들의 끝점 i 에 대하여

$A=\{i\}$, $C_i = C_o - I_i + O_i$

※ I_i는 source절점과 절점 i를 연결시키는 선들의 집합이고, O_i는 절점 i에 연결된 모든 선들 중 I_i를 제외한 선들의 집합이다.

$$Q_i = q(C_i)\left(1 - \frac{Q_\varnothing}{q(C_\varnothing \cap C_i)}\right)$$

iv) s와 A에서 직접 도달되는 모든 절점중 번호가 A에 속한 가장 큰 절점보다 큰 절점를 j에 대하여 oldA⇒A

$A = \{oldA,\ j\}$ $\quad C_A = C_{oldA} - I_j + O_j$

$$Q_A = q(C_A) \cdot \left(1 - \sum_{a \in A} \frac{Q_a}{q(C_a \cap C_A)}\right\}$$

v) 만약 $A \neq E$이면 iv)와 같이 계산하고 $A=E$이며 종료하다.

vi) 모든 Q_A값들을 더하면 $Q(G)$의 값이 계산된다.

5. 결론 및 고찰

본 연구에서는 비방향성 그래프에서 m-cutset들을 기초한 domination의 성질에 대하여 관찰하고 Lemma 1~3의 식을 증명할 수 있었다. 이를 기초로 하여 perfect graph에서 domination이 0이 아닌 모든 항들을 찾아내고 그들의 domination값을 계산할 수 있는 식을 Theorem 1에서 제시하였으며 이를 기초로 Theorem 2에서는 일반적인 비방향성 그래프에서 신뢰도를 "묶어서" 계산할수 있는 식을 제시하였다. Theorem 2의 식은 내부 절점이 n개일 때 가장 복잡한 구조를 갖는 perfect graph인 경우 3^n개의 항을 계산하여야 한다. 하지만 m-cutset의 수는 2^n개이며, poincaré식으로 계산하여야 하는 경우 $2^{2^n}-1$개의 항을 계산

하여야 하며 이에 비하여 매우 적은 항수를 계산해도 정확성 상실 없이 신뢰도 계산을 가능케 하여준다.
앞으로는 절점으로 표현되는 기지국등의 신뢰도를 고려한 연구도 유용하다 하겠다.

참고 문헌

1) 이광원, 이일재, 강신재, "Domination 이론에서의 새로운 식과 이의 신뢰성계산에 대한 적용", 한국산업안전학회지, Vol. 11, No. 1 1996.
2) 이광원, "Domination 이론을 이용한 acyclic digraph의 빠른 신뢰도 계산을 위한 연구", 한국산업안전학회지, Vol. 11, No. 1, 1996.
3) 이일재, 이광원, "FT에 빠른 신뢰도계산을 위한 연구", 한국산업안전학회지, Vol. 12, No. 3, 1997.
4) A. Satyanarayana, "A unified Formula for Analysis of Some network Reliability Problems", IEEE Trans, Reliability, vol R-31, No.1, April 1982
5) A. Satyanarayana and A. Prabhakar, "New Topological Formula and Rapid algorithm for Reliability Analysis of Complex network, "IEEE Trans. Reliability, R-27, pp.82-100, June 1978.
6) A. Agrawal and R. E. Barlow, " A Survey of network Reliability and domination Theory", *Operations Research*, vol.32, No.3, May-June 1984.
7) J. A. Buzacott, "A Recursive Algorithm for Directed-Graph Reliability", *networks*, vol 13, 1983.
8) Kwang-won Rhie, Zur Domination und Zuverlaessigkeit linearer Graphen aufgrund ihrer Minimalschnitte, Dissertation, Technische Universitaet in Berlin, July 1994