

철도차량의 비선형 임계속도 예측연구

Study on the Prediction of the Nonlinear Critical Speed of a Train

정우진* 오일근** 허만선*** 김성원**** 서정희***** 조광수*****
W. J. Chung I. G. O M. S. Huh S. Kim J. H. Seo K. S. Jo

ABSTRACT

The critical speed of a train running on the straight railway track is investigated by in-house program. The program is developed to find out nonlinear critical speed and it bases on the bifurcation theory. As a result, it is found that nonlinear critical speed exists on the lower speed band than linear critical speed and this fact imply a possibility of induction of a big accident.

1. 서론

철도차량의 주행속도가 일정한 속도 이상으로 높아지면 차량의 횡방향 안정성은 급격하게 악화된다. 불안정해진 차량은 진행방향으로 S자 운동을 하게되고 마침내는 탈선한다. 이런 S자 운동은 사행동이라 불리며 사행동이 발생하는 주행속도를 임계속도 또는 사행동 발생속도라 한다. 이런 임계속도는 궤도의 불규칙성과 같은 외란에 기인한 것이 아닌 차량 자체의 여러 메카니즘들에 의해 발생하므로 최고 주행속도를 스스로 제한한다는 의미를 가진다. 또한 같은 이유로 임계속도는 차종간의 안정성을 비교할 수 있는 기준이 되기도 한다. 차량의 사행동 발생속도를 정확하게 예측하고자 하는 연구는 오래 전부터 국내외에서 진행되어 온 바 있으며 수치적 또는 해석적 방법을 사용한 비교적 정확한 예측방법들이 많이 보고되고 있다. 그러나 이들 대부분의 연구는 선형해석에 기반을 둔 것이었다. 선형해석은 사행동이 발생하고 마감되는 속도를 차량의 물성치 및 차륜/궤도 형상에 따라 한 속도로 정해지는 것으로 파악하지만 실제로 그렇지 못하다. 기관사가 운전 중 횡방향 진동을 감지하고 제동을 시작했을 경우 이것이 발생되었던 속도보다 더 낮은 속도에서 사행동이 마감되는 것이 그 좋은 예이다. 이런 차이에도 불구하고 지금까지 국내에서 임계속도에 대한 정확한 규명이 이루어지고 있던 것은 화차를 제외한 다른 차량들이 영업 주행속도와 임계속도간에 많은 차이를 가짐으로 인해 예측치의 정확도가 현장에서 그다지 중요하게 여겨지지 않았기 때문이었다. 현재 국내에서 가장 빠른 영업속도를 가지고 있는 새마을호의 경우 최고속도는 150km/h 이지만 이것의 임계속도는 200~300km/h 대역에 존재한다. 그러나 기존선

* 한국철도기술연구원 차량연구부 주임연구원
** 한국철도기술연구원 차량연구부 책임연구원
*** 한국철도기술연구원 차량연구부 선임연구원
**** 고려대학교 교수
***** 철도청

의 빠른 속도향상 추세와 한국형 고속전철이 몇 년 후 본격적으로 영업을 시작하게되는 상황 등을 종합해볼 때 임계속도 근처를 주행하는 차량의 정확한 안정성 판별에 관한 연구가 더 이상 비현실적인 영역의 문제로 남아있을 것 같지는 않을 것으로 사료된다. 본 연구에서는 철도차량이 가지고 있는 임계속도의 비선형성을 분기이론을 사용하여 해석해 보았으며 분기이론에 바탕을 둔 전용 프로그램을 개발하여 직선선로를 주행하는 차량이 어느 속도대역에서 2개 이상의 해를 가질 수 있음을 증명하였다. 해석결과로 얻어진 결과는 주행속도 변화에 따른 분기선도로 표시되었고 그 물리적 의미를 시간응답선도와 위상선도 등을 통해 설명하였다. 마지막으로 선형 임계속도를 상용 프로그램인 ADAMS를 사용해 구해보았으며 이것으로 본 연구에 대한 결과를 간접적으로 검증하였다.

2. 분기현상 기초이론

2.1 분기현상

분기 현상은 안정도가 변할 때 생기는 비선형 시스템의 특수한 현상으로서 기존의 안정도 해석으로는 설명할 수 없었던 안정도의 히스테리시스나 민감한 운동 변화 등의 원인이 된다. 분기현상을 완벽하게 파악하기 위해서는 많은 양의 계산과정과 시간이 필요하며 시스템이 복잡해질수록 수렴해를 구하기가 어려워진다는 난점을 갖는다.

2.2 분기현상의 종류

여러 종류의 분기현상 중에서 철도차량의 임계속도 결정에 가장 큰 영향을 미치는 분기는 subcritical Hopf 분기와 cyclic-fold 분기이다.

(가) Cyclic-fold 분기

분기현상은 고정해(stationary solution)와 함께 주기해(periodic solution) 상태에서도 발생된다. 주기해의 안정도 판별은 고정해와는 다르게 Floquet 이론과 Poincare의 도표(map) 등의 새로운 개념의 도입을 통해 이루어진다. 주기해 상태에서 분기가 발생하는 것은 Poincare 행렬의 고유치가 단위원을 넘는지의 여부로 구분할 수 있으며 이때 고유치가 실수축 +1 방향으로 벗어난다면 이것은 cyclic-fold 분기일 가능성이 있다.

(나) Hopf 분기

시스템이 2차원 이상으로 이루어져 있을 때 자코비안 행렬의 고유치 중 2개의 켈레 복소수근이 동시에 허근만을 가지게 되면 Hopf 분기가 발생한다. 이 분기는 분기후의 물리적 현상에 따라 supercritical 과 subcritical 의 두가지 분기로 나뉘어 질 수 있다.

Subcritical Hopf 분기가 발생되면 고정해로 수렴하던 위상선(trajecory)들은 다른 흡입인자(attractor)들 즉 고정해, 극한주기궤도 또는 혼돈 흡입인자(chaotic attractor)들에게로 갑자기 끌려가게 되어 시스템은 극도로 불안정하게 된다. 시스템이 매개변수의 변화에 따라 히스테리시스 현상을 보인다면 이것은 subcritical Hopf 분기의 영향일 가능성이 크다.

3. 해석

3.1 해석 프로그램

본 연구에서는 민감한 비선형 시스템의 분기 현상을 보다 효과적으로 분석하기 위해 전용 프로그램을 개발하여 사용한다. 해석 모델의 수렴해와 발산해는 프로그램 내에서 LSODA라는 부 프로그램을 이용하여 구하였다. 이 부 프로그램은 수렴해와 발산해를 정확하고 신속하게 구할 수

있다는 장점을 가진다. LSODA를 해석 solver로 사용한 철도차량의 동특성 해석 논문들이 최근 세계적으로 많이 발표되고 있으며 이미 많은 신뢰도 검증작업이 선행된바있다. 본 해석 프로그램은 자기 미분방정식과 주기적 가진을 받는 미분방정식의 해를 구할 수 있으며 주기해의 주기를 구할 수 있게 하였다. 시스템의 분기 현상 해석을 수행하면서 수렴해 및 주기해의 안정성을 자코비안 행렬과 Poincare 행렬의 고유치를 사용하여 상시 확인하므로 사용자가 일일이 안정성을 비교해줄 필요가 없게 하였다. 또한 매개 변수의 변화에 따라 분기 발생 위치와 종류 등을 쉽게 확인할 수 있게 함으로서 시스템의 전체적인 동특성 변화를 사용자가 파악할 수 있게 하였다. 해석 결과에 대한 확인과 시간응답 해석을 위해 6차 Runge-Kutta 방법을 이용한 부 프로그램이 별도로 사용된다. 본 연구에서는 철도차량의 대차 시스템 운동을 개발된 프로그램을 사용하여 해석하고 해석의 결과로 파악된 분기 발생 위치 및 종류 등을 통하여 선형 임계속도와 비선형 임계속도를 구하고자 한다.

3.2 운동방정식

임계속도를 결정하는 차량의 사행동 현상은 차체의 운동보다는 대차의 독자적인 운동에 지배를 받으므로 본 연구에서는 해석 모델을 대차로 국한 시켰다. 차륜 및 레일은 차량운동에 가장 큰 영향을 미치는 부분으로서 그림 1과 같이 현재 국내에서 사용중인 KS B 8106-83 레일과 PMC차량의 차륜을 사용하였다. 차량은 직선 선로를 속도 V_n 로 주행하고 있는 것으로 가정한다.

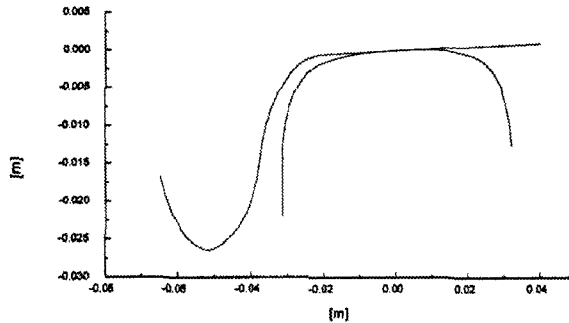


그림 1. 사용된 차륜과 레일 형상

운동방정식은 앞 차륜의 측면 변위와 yaw 변위, 뒤 차륜의 측면 변위와 yaw 변위, 대차의 측면 변위, yaw 변위, roll 변위를 고려하여 7자유도로 구성된다. 7개의 변수들은 14개의 위상공간 차원을 형성하며 시간함수로 표현될 수 있다. 본 연구에서는 차륜과 레일사이에서 작용하는 크립력을 Vermeulen과 Johnson 이론을 사용하여 구한다. 이 이론은 레일과 차륜간의 상대회전 운동을 무시한다. 그러므로 직선주요이고 적은 yaw각이 발생할 때만 유효하다. 크립력에 대한 보다 정확한 이론은 Kaller에 의해 공식화되어진 것이 있지만 본 연구에서 관심을 두고있는 임계속도는 직선 선로에서만 의미를 가지므로 전산오류를 줄이고 계산질차를 간소화 하기 위하여 Vermeulen과 Johnson의 이론을 채용하였다. 곡선부의 경우 진행속도는 탈선계수나 승차감과 같은 부차적인 요소에 의하여 제한을 받게된다. 크립력은 다음과 같이 측면과 길이 방향으로 주어진다.

$$F_x = -\frac{\xi_x}{\Psi_1} \frac{F_R}{\xi_R} \quad F_y = \frac{\xi_y}{\Phi} \frac{F_R}{\xi_R} \quad (1)$$

$$\dot{\xi}_x = \frac{\dot{q}_1}{v_{rr}} - q_2 \quad \dot{\xi}_y = a \frac{\dot{q}_2}{v_{rr}} - \lambda \frac{\dot{q}_1}{r_0} \quad (2)$$

$$\frac{F_R}{\mu N} = u - \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{27}u^3 \quad u < 3$$

$$= 1 \quad u \geq 3 \quad (3)$$

$$u = \frac{G\pi ab}{\mu N} \sqrt{\left(\frac{\xi_x}{\Psi_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{\Phi}\right)^2} \quad (4)$$

μ 는 마찰계수이며 N 은 접촉면에 작용하는 수직력이다. a , b 는 크립 계수이다. 플렌지의 거동은 강성이 높은 선형 스프링에 의해서 표현된다.

$$F_T(x) = k_0(x - \delta) \quad \delta < x$$

$$0 \quad -\delta \leq x \leq \delta$$

$$k_0(x - \delta) \quad x < \delta \quad (5)$$

여기서 δ 는 측면 허용치이다. 스프링력은 상대변위에 선형함수이고 댐핑력은 상대 속도에 선형함수이다. 많은 다른 변수들은 기하학적인 형상, 질량분포와 모델의 기계학적 물성치를 완벽히 특성화 하기 위해서 필요하다. 이러한 변수들을 일정한 상수로 취급하게 된다. 운동방정식과 사용된 모델 사양은 다음과 같이 주어진다.

$$m_w \ddot{q}_1 + A_1 + 2F_{xf} + F_T(q_1) = 0$$

$$I_{wy} \ddot{q}_2 + A_3 + 2aF_{yf} = 0$$

$$m_w \ddot{q}_3 + A_2 + 2F_{xr} + F_T(q_3) = 0$$

$$I_{wy} \ddot{q}_4 + A_4 + 2aF_{yr} = 0 \quad (6)$$

$$m_f \ddot{q}_5 - A_1 - A_2 - A_5 = 0$$

$$I_{fy} \ddot{q}_6 - bA_2 - A_3 - A_4 + A_6 = 0$$

$$I_{fr} \ddot{q}_7 - h_1A_1 - h_1A_2 - h_2A_5 + A_7 = 0$$

$$A_1 = 2k_1(q_1 - q_5 - bq_6 - h_1q_7)$$

$$A_2 = 2k_1(q_3 - q_5 - bq_6 - h_1q_7)$$

$$A_3 = 2k_2d_1^2(q_2 - q_6)$$

$$A_4 = 2k_2d_1^2(q_4 - q_6)$$

$$A_5 = 2D_2(\dot{q}_5 - h_2\dot{q}_7) + 2k_4(q_5 - h_2q_7)$$

$$A_6 = k_6q_6 \quad (7)$$

$$A_7 = 2D_1d_2^2\dot{q}_7 + 2k_5d_2^2q_7 + 4k_3d_1^2q_7$$

위 식들에서 F_{xf} , F_{yf} 는 앞축의 크립력, F_{xr} , F_{yr} 은 뒤축의 크립력을 나타내고 F_T 는 플렌지 접촉력이다. m_w 는 휠축의 질량, m_f 는 대차 프레임의 질량을 나타내고 I_{wy} , I_{fy} 그리고 I_{fr} 는 각각 휠축의 yaw 운동 질량관성 모멘트, 대차 프레임의 yaw 운동 질량관성 모멘트 그리고 대차 프레임의 roll 운동 질량관성 모멘트를 나타낸다.

도표 1. 해석에 사용된 모델 사양

차축질량(m_w)	1922 kg
대차질량(m_f)	2918 kg
차축 Yaw 방향 관성모멘트(I_{wy})	678 kg m ²
대차 Yaw 방향 관성모멘트(I_{fy})	6780 kg m ²
대차 Roll 방향 관성모멘트(I_{fx})	6780 kg m ²
높이(h_1), 높이(h_2)	0.0762, 0.6584 m
길이(d_1), 길이(d_2)	0.6200, 0.6800 m
탄성계수(k_0)	14.600 MN/m
탄성계수(k_1)	1.8230 MN/m
탄성계수(k_2)	3.6460 MN/m
탄성계수(k_3)	3.6460 MN/m
탄성계수(k_4)	0.1823 MN/m
탄성계수(k_5)	0.3333 MN/m
탄성계수(k_6)	2.7100 MN/m
점성계수(D_1)	20.0 kN s/m
점성계수(D_2)	29.2 kN s/m
마찰계수(μ)	0.15
접촉면에서의 수직하중(N)	66670 N

3.3 임계속도의 결정

철도차량의 임계속도를 찾기 위해서는 흡인인자를 매개변수인 속도의 변화에 따라 구해야만 한다. 점착계수, 열차간의 거리 또는 바퀴와 레일간의 접촉변수들이 변함에 따라 시스템은 다른 해를 가지게 될 것이고 그에 따른 최소의 임계속도가 결정되어 질 것이다. 이전까지의 고전적인 안정성 판별법만으로는 비선형 시스템에 대한 정확한 임계속도를 찾는 것이 어렵고 이것은 비선형 시스템이 선형 시스템과 다른 수학적인 결과를 보이는 주요 원인이 된다.

비선형 동역학문제의 안정해는 이제까지 임계속도라고 정의해왔던 선형 임계속도 보다 작은 속도에서 점근적으로 안정한 해를 가질 수 있다. 임계속도를 결정하기 위해서는 정확한 모델을 만드는 것이 무엇보다 중요하다. 점근적으로 안정된 해가 하나 이상일 때 각각의 해는 초기값에 관련되게 된다. 흡입영역을 지나는 모든 과도적인 값들은 시간이 무한대로 갈 때 안정된 해를 가지게 된다. 선형 임계속도가 비선형 임계속도와 같을 경우도 있을 수 있으나

다음의 본 연구 결과에서 볼 수 있듯이 일반적으로 비선형 임계속도가 선형 임계속도 작은 속도대역에 존재하므로 선형 임계속도를 차량의 실제 임계속도라고 정의하는 것은 잘못된 것이라 판단된다.

4. 해석결과

4.1 비선형 해석 결과

차량의 임계속도를 알기 위해 주행속도를 정지상태에서부터 서서히 증가시켜 보았다. 첫 번째 분

기현상은 그림 2에서 보듯이 104 m/s에서 발생된다. 첫 번째 분기점은 선형해석에서의 임계속도이다. 첫 번째 분기점에서 Jacobian 행렬의 고유치들이 동시에 2개의 허근을 가지게 되며 시스템이 갑자기 불안정 해지므로 이것은 subcritical Hopf 분기이다.

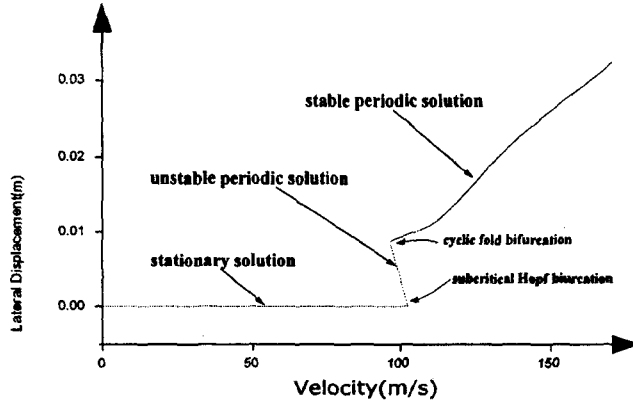


그림 2. 분기선도

이 분기는 불안정 주기해와 불안정 고정해를 동시에 가지게 되며 다른 분기가 발생하기 전까지 불안정성은 계속된다. 불안정 주기해는 98 m/s에서 다시 안정된 주기해로 바뀌는 분기현상을 거치게 된다. 이때 Poincare 행렬의 고유치가 +1 쪽으로 단위원을 벗어나므로 이것은 cyclic fold 분기이다.

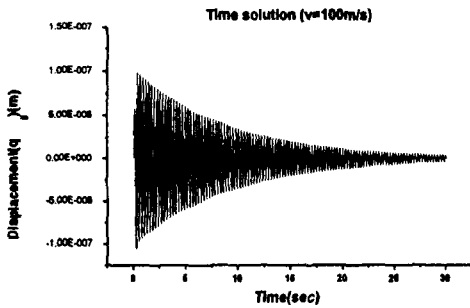


그림 3. 시간응답(100m/s)

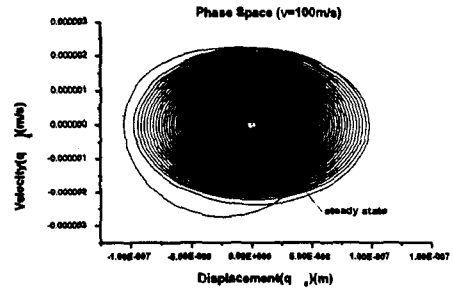


그림 4. 위상선도(100m/s)

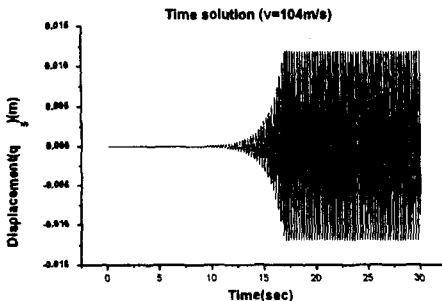


그림 5. 시간응답(104m/s)

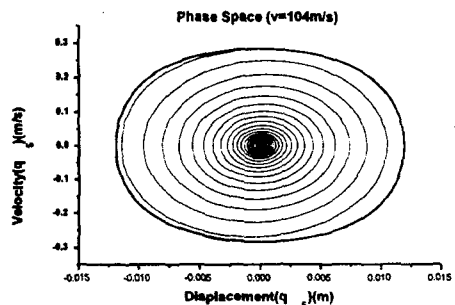


그림 6. 위상선도(104m/s)

위의 결과를 보고 알 수 있듯이 철도차량의 임계속도는 선형해석에서 예측한 1번째 임계속도 이외에 시스템의 안정성이 급격하게 변하는 2번째 임계속도가 있을 수 있게되며 이 분기점 위치를 비선형 임계속도라고 한다. 98 m/s~104 m/s 사이의 대역에서 해는 2개가 존재하게 된다. 이것을 통해 철도차량이 보이는 임계속도의 히스테리시스 현상을 설명할 수 있다. 그림 3, 4에서는 외란이 충분하지 않았을 때 횡방향 진동이 고정해로 수렴하는 모습을 보여주고 있다. 그림 5, 6에서는 속도가 104 m/s일 때 대차의 운동이 시간이 지남에 따라 일정한 진폭과 주기를 가지는 운동으로 변함을 보여주고 있다.

4.2 해석결과 검증

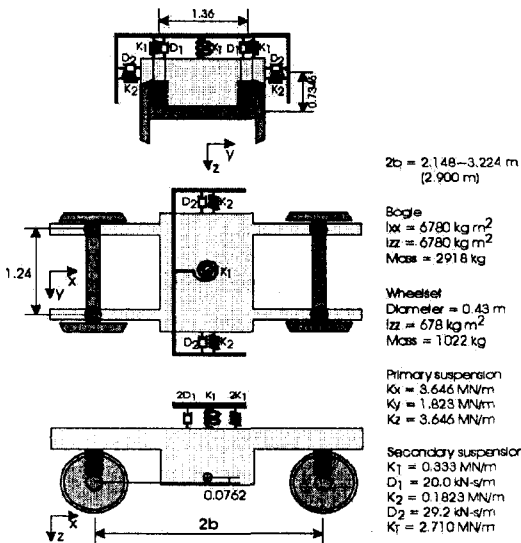


그림 7. 해석모델

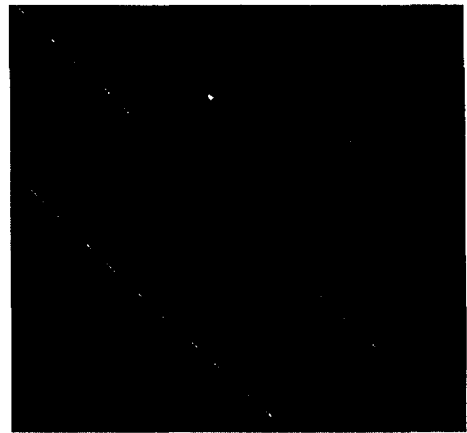


그림 8. ADAMS에서 구현한 대차 모델

본 연구에서 얻은 해석결과를 간접적으로 검증하기 위해 상용 프로그램인 ADAMS의 결과와 비교해 보았다. 차량의 안전성을 해석할 때 ADAMS는 선형적 방법을 사용하므로 본 연구에서 구한 선형 임계속도와 ADAMS의 결과와는 같아야 할 것이다.

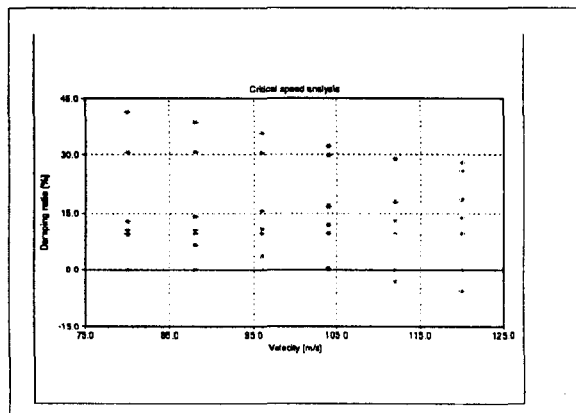


그림 9. 안정도 해석결과(ADAMS)

그림 9에는 ADAMS에 의한 차량의 안정도 해석결과가 도시되어 있다. ADAMS는 차량의 임계속도를 약 104.7 m/s로 예측하고 있으며 이것은 본 연구에서 예측한 104 m/s와 거의 일치하는 결과이다.

5. 결론

분기 이론에 기반을 둔 전용 프로그램을 개발하였으며 이를 직선 선로를 주행하는 철도차량의 안정성 해석에 적용시켜 보았다. 해석의 결과로서 그간의 선형해석 결과로는 알 수 없었던 비선형 임계속도의 존재를 확인할 수 있었으며 이것이 선형 임계속도보다 더 낮은 속도 대역에 존재할 수 있음을 분기이론을 이용하여 구현해보았다. 만일 선형 임계속도를 차량의 주행 최고속도로 인식하고 주행에 적용하려 한다면 자칫 대형 사고로 이어질 수 있음을 본 연구를 통해 알 수 있었다. 지금까지는 선형 임계속도를 주행속도에서 멀리 떨어지게 하는 것에 설계의 초점을 맞추어 왔으나 이후 설계될 철도차량이나 한국형 고속전철에서는 비선형 임계속도도 또한 주행 안전성 설계에 중요한 설계지표로 삼아야 할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 1998년도 철도청 과제인 "철도차량의 비선형 주행 동특성에 관한 기초연구"의 연구 결과 중 일부이다.

참고문헌

- (1) Kaller, J. J., 1991, "Wheel-rail rolling contact theory," *Wear* 144, pp 243~261
- (2) Knudsen, C., Fildberg, R. & True, H., 1992, "Bifurcations and chaos in a rolling railway wheelset," *Phil. Trans. R. Soc. London A338*, pp 455~469
- (3) Hans True, 1993, "Dynamics of a rolling wheelset," *ASME*, pp 438~444
- (4) Vijay K. Garg & Rao V. Dukkipati, 1984, "Dynamics of railway vehicle systems," *Academic Press*, pp 103~176
- (5) 한국철도기술연구원, 1996, "철도차량의 진동방지에 관한 연구," *철도청*, pp 246~260
- (6) Gasch R., Moelle D. & Knothe K., 1984, "The effect of nonlinearities on the limit cycles of railway vehicles," in *Proc. 8th IAVSD Symposium on Vehicle Systems Dynamics in the Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks*, Swets & Zeitlinger, pp 207~224
- (7) U. Galvanetto & L. Briseghella, 1997, "Optimal Axle Distance of a Railway Bogie," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 7, No. 3, pp 721~732
- (8) 임진수, 1993, "철차 운동의 이론해석 동향," *고속철도 Symposium 논문집*, 한국고속철도 건설공단, pp 317~341
- (9) 정우진, 오일근, 민현진, 김성원, 1998, "분기이론을 사용한 철도차량의 임계속도 해석," *대한기계학회 추계학술대회*
- (10) 정우진, 허만선, 오일근, 이희윤, 1998, "철도차량의 비선형 사행동 발생속도 예측에 관한 연구," *한국소음진동공학회 추계학술대회*