

# 고속전철 객차를 위한 유한요소모델링 및 모드합성기법의 개발

## The Development of a Finite-Element Modelling and Component Mode Synthesis Method for High-Speed Railway Passenger Cars

장경진\*

김홍준\*

이상민\*

박영필\*\*

Chang, Kyoung-Jin

Kim, Hong-Jun

Lee, Sang-Min

Park, Young-Pil

### ABSTRACT

In the design of the high-speed railway vehicles of low noise and vibration characteristics, it is desirable to develop efficient and systematic procedures for analyzing large structures. In this paper, some finite-element modelling techniques and an efficient analytical method are proposed for this purpose. The analytical method is based on substructuring approach such as a free-interface method and a generalized synthesis algorithm. In final, the proposed approaches are applied to the finite-element modelling, modal analysis and subsequent model updating procedures of the high-speed railway intermediate trailers.

### 1. 서론

자동차의 물결에 밀려서 한동안 그 빛을 잃어가던 철도산업은 20세기 후반에 들어와 철도관련 기술이 고도로 발전함에 따라 다시금 첨단 대량교통수단으로 급부상하고 있다. 이러한 상황은 선진각국이 공통적으로 겪고 있는 극심한 교통체증, 에너지효율, 환경문제 등에 대한 새로운 인식이 큰 영향을 준 결과라고 할 수 있다. 이를 계기로 선진 각국에서는 고속전철에 대한 대규모투자를 단행하고 있고, 국내에서도 이에 관련된 기술의 개발을 서두르고 있는 실정이다. 특히, 고속전철 기술에 관련된 여러 분야 중에서도, 안정성, 성능개선 및 승차감 향상에 대한 소비자의 욕구가 더욱 증가하면서 저진동 저소음 철도차량의 개발은 부가가치가 높은 사업으로 주목받게 되었다. 그런데, 수치해석적인 접근방법을 통해 철도차량의 진동특성을 개선하기 위해서는 먼저 대형구조물에 효율적으로 적용할 수 있는 모델링기법과 감도해석(sensitivity analysis)을 이용한 모델개선(model updating)기법을 연구하고, 이를 이용하여 실험모델의 동적인 특성과 부합하는 유한요소모델을 개발하는 연구가 선행되어야 한다. 이 같은 과정을 통해 유한요소모델이 얻어지면, 이를 바탕으로 차량 각 부위의 개별적인 진동특성 및 상호간의 연성에 대한 파악, 진동 전달경로의 규명, 승차감 해석, 구조동특성변경(structural dynamic modification, SDM)등의 연구를 통해 최적화된 저진동차량을 설계할 수가 있다.

\* 연세대학교 대학원, 학생회원

\*\* 연세대학교 기계공학과 교수, 정회원

본 연구에서는 먼저 고속전철과 같은 대형구조물의 유한요소모델을 얻기 위한 효과적인 모델링 기법을 연구하고, 이로부터 실험에서 얻어진 동적인 특성과 부합하는 고속전철 객차의 유한요소모델을 확보하고자 한다. 아울러 대형구조물의 동특성 해석을 효율적으로 수행하게 해 주는 부분구조합성법<sup>(1~4)</sup>을 연구하여 본 연구의 모델에 적용함으로써 그 효율성을 검증하고자 한다.

## 2. 대형구조물을 위한 유한요소모델링 기법

고속전철과 같은 대형구조물의 유한요소모델을 만들기 위해서는 간편한 모델링 과정과 정확한 해석 결과를 얻기 위해 효율적인 모델링기법을 개발할 필요가 있다. 따라서, 본 연구에서는 ANSYS R5.3 소프트웨어를 이용하여 고속전철 객차의 유한요소모델링 과정을 수행하는 과정에서 다음과 같은 점들을 고려하였다.

### 2.1 계산효율 증대를 위한 모델링 요소(element)의 선정

판재를 모델링하기 위한 모델링 요소로서 4-노드 혹은 8-노드의 셸요소(shell element)를 사용하는 것이 일반적이지만 이를 보요소(beam element)로 대체할 경우, 1/2 내지 1/4배의 자유도를 사용함으로써 계산용량을 절약할 수 있다. 고속전철 객차에서 보요소로 모델링하는 것이 가능한 부분을 그룹별로 도표 1에 나타내었고, 그림 1에는 보요소로 모델링한 유한요소모델을 그룹별로 분할하여 나타내었다. 보요소의 물성치는 대상 부재의 단면형상에 대한 2차 관성모멘트 및 단면적을 계산하여 입력하였다.

도표 1. 고속전철 객차에 그룹별로 사용된 모델링 요소

| 그룹                               | 모델링 요소 |
|----------------------------------|--------|
| Roof, Cantrail, Side Post, Floor | 셸      |
| Carline, Underframe, Compartment | 보      |
| Side, Front/Back Bulky Part      | 셸/보    |

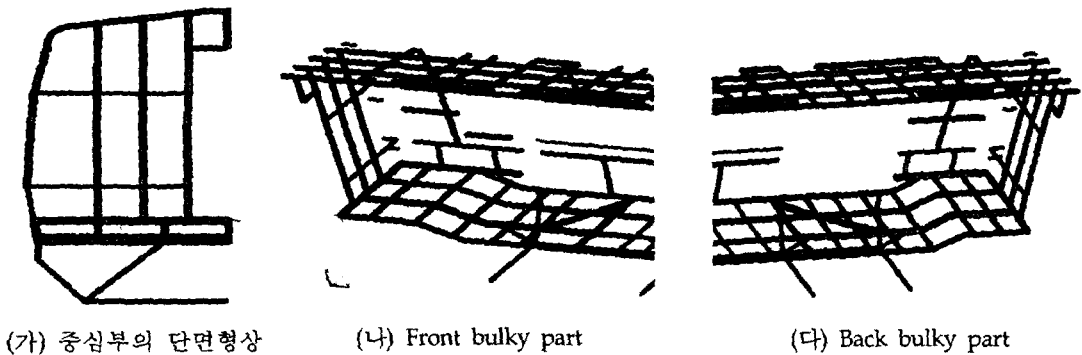


그림 1. 그룹별 보요소모델의 형상

### 2.2 지도화된 요소분할(mapped meshing) 방법

적은 자유도를 사용하면서도 계산의 정확도를 증대하기 위해 요소생성은 지도화된 요소분할 방법을 사용하였다. 또한 각 구역별로 그룹을 지어 외곽형상치수와 요소간격, 노드번호의 정렬규칙등을 입력받으면 자동으로 노드위치를 계산해 주는 매크로 프로그램을 mathematic 소프트웨어에서 구현하여 이를 객차의 세부모델링의 전단계 모델을 만드는 과정에 이용하였다. 본 방법은 임의의 외곽형상이 주어진 경우에 유한요소모델링을 위한 입력데이터를 계산함으로써 철도차량에 대한 초기모델을 만드는데 도움

을 주며 구조가 변경되어도 재모델의 구성이 용이하다는 장점을 갖는다. 그림 2에는 본 방법을 통해 구역별로 생성된 노드를 보여주고 있다.

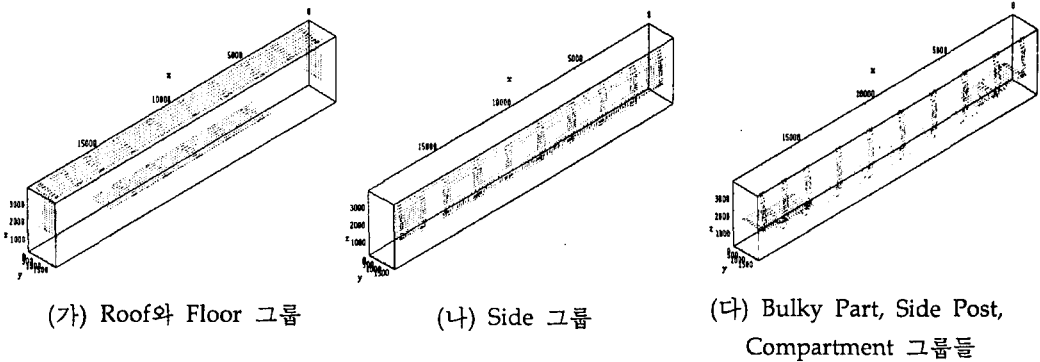


그림 2. 그룹별로 생성된 노드집합

### 2.3 그룹별 질량분포의 조정

유한요소모델이 실제모델의 설계치수 및 물성치에 근거하여 만들어졌다 하더라도 모델링과정에서 불확실한 변수가 많이 존재하는 관계로 동적인 특성에 큰 영향을 미치는 질량분포는 실제모델과 차이가 크게 나타날 수가 있다. 따라서 본 연구에서는 유한요소모델이 실제모델의 설계치를 토대로 계산된 각 부재별 중량이 일치하게끔 질량분포를 조정하였다. 도표 2에는 본 유한요소모델의 질량분포를 조정하는 과정에서 사용된 객차(R7 car)의 bodyshell의 부재별 중량을 나타내고 있다.

도표 2. 객차 Bodyshell의 각 부재별 중량

| 객차의 부재명칭                     | 중량 (Kg) | 객차의 부재명칭               | 중량 (Kg) |
|------------------------------|---------|------------------------|---------|
| Body                         | 2246    | Carrying End           | 201     |
| Underframe                   | 2556    | Roof                   | 544     |
| Floor Plate                  | 375     | Underframe Compartment | 348     |
| Sidewall on EC Side          | 1170    | Brackets               | 325     |
| Sidewall on Side Opposite EC | 1187    | Weld                   | 200     |
| Fixed End with Ring          | 593     | Total                  | 9745    |

### 2.4 경계조건 모델링

객차의 Carbody가 대차(bogie)와 연결되는 지지점은 3개가 있으나, 본 연구에서는 1/2 모델이 사용되었으므로, 2개의 지지점만을 사용하였다. 각 지지부의 모델링은 3-병진방향 스프링요소를 사용하였으며 그 강성값은 높이방향은  $1000 N/m$ 을, 나머지 두 방향은  $290 N/m$ 의 값으로서 프랑스의 유한요소 모델에 사용된 값을 그대로 사용하였다. 또한, 1/2 모델을 사용하였기 때문에 절단면에 만나는 노드들에 대하여 절단면에 수직인 병진자유도와 나머지 두방향의 회전자유도를 구속하였다.

### 2.5 동특성 해석 알고리즘의 선택

ANSYS 소프트웨어에서 모드해석시에 사용되는 알고리즘은 Subspace iteration 방법, Block Lanczos 방법, Reduced 방법등이 있다. 계산속도는 후자로 갈수록 더 빠르지만 Reduced 방법의 정확도는 주자유도(Master DOFs)의 선택에 크게 의존한다. 반면, Block Lanczos방법은 전체행렬을 한꺼번에 이용하

므로 정확도도 높고 수렴속도도 빠른 편이므로 대형구조물의 해석에 많이 사용이 된다. 따라서, 본 연구에서는 고속전철의 유한요소모델을 해석하기 위해 Block Lanczos방법을 사용하였다. 아울러, 그 결과를 대형구조물의 동특성해석을 위해 본 연구에서 제안한 일반화구분모드합성방법의 결과와 함께 4절에서 비교하였다.

### 3. 구분모드합성법의 이론<sup>(1-4)</sup>

구분모드합성법(component mode synthesis, CMS)은 복잡하고 대형인 구조물의 동적인 특성을 해석하는데 큰 장점을 갖고 있다. 구분모드합성법은 전체구조물을 여러 부분으로 나누어 실험이나 유한요소법으로 해석한 후 저차로부터 몇 개의 모드를 합성하여 전체의 모드특성을 얻는 방법으로서, 대형구조물의 동적특성을 해석하는데 많이 활용되고 있다. 이 방법을 이용하면, 구조물의 해석시 방대한 계산용량 및 시간을 단축시킬 수 있고, 구조물의 일부나 경계조건을 변화시키는 경우에 전체구조물을 다시 해석하지 않고 변경된 분계만 해석해도 전체 결과를 얻어낼 수 있으며, 분계별로 실험 및 유한요소데이터를 각기 사용하여 합성하는 것이 가능하다. 구분모드합성법은 결합영역의 구속여부에 따라 크게 고정경계법(fixed-interface method)<sup>(1)</sup>과 자유경계법(free-interface method)<sup>(2-4)</sup>으로 나누어지는데, 후자는 전자에 비하여 소수의 모드만을 채용해도 높은 정확성을 얻는 것이 가능하고 실험데이터를 적용하는 것이 용이하며, 또한 일반화합성알고리즘을 사용하면 복잡한 결합형태를 갖는 대형구조물에도 쉽게 적용할 수 있는 장점을 갖고 있다. 따라서, 본 연구에서는 자유경계법과 일반화합성법에 바탕을 둔 일반화구분모드합성법(generalized component mode synthesis method)을 개발하여 고속전철의 동특성을 해석하는데 적용하고자 한다.

#### 3.1 자유경계법<sup>(2,3)</sup>

먼저 이산계의 비감쇠 다자유도로 모델링한 대상구조물을 2개의 분계로 분할하고, 각기 고유치 해석한 후, 모드좌표  $\{q\}$ 를 이용하여 비연성화 및 정규화한다. 그리고나서, 물리좌표를 다음과 같이 채용한 저차모드  $\Phi_L$ 과 고차모드  $\Phi_H$ 로 분리시킨다.

$$\{x\} = [\Phi_L \ \Phi_H] \begin{Bmatrix} q_L \\ q_H \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 하첨자 L은 채용된 저차의 모드를 나타내고, H는 생략된 고차의 모드를 나타낸다. 식(1)에 의해 비연성화된 운동방정식을 저차와 고차가 분리된 형태로 나타내면

$$\begin{bmatrix} \lambda_L - \omega^2 I & 0 \\ 0 & \lambda_H - \omega^2 I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_L \\ q_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_L^T \\ \Phi_H^T \end{bmatrix} \{f\} \quad (2)$$

이 되며, 다시 정리하면,

$$\begin{Bmatrix} q_L \\ q_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_L - \omega^2 I \\ \lambda_H - \omega^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_L^T \\ \Phi_H^T \end{bmatrix} \{f\} \quad (3)$$

$$\{q_H\} = [\lambda_H - \omega^2 I]^{-1} [\Phi_H^T]^T \{f\} \quad (4)$$

이 된다. 이때 저차로부터 선택된  $m$ 개의 고유벡터만으로 분계를 합성할 경우에는 해석주파수보다 높은 주파수영역의 고차모드항이 삭제되어 정확도가 떨어지게 된다. 따라서, 다음과 같이 정적근사(static approximation)방법을 사용하여 잉여부가모드(residual attachment mode)를 계산하고, 이로부터 누락된 고차모드에 의한 오차를 보정한다.

$$[\lambda_H - \omega^2 I]^{-1} \cong [\lambda_H]^{-1} \quad (5)$$

식(5)을 이용하여 식(4)을 근사하면

$$\{q_H\} \approx [\lambda_H]^{-1} [\Phi_H]^T \{f\} \quad (6)$$

가 되며, 식(1)에 식(6)을 대입하면 응답변위  $\{x\}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\{x\} = [\Phi_L]\{q_L\} + [\hat{G}]\{f\} \quad (7)$$

$$\text{여기서, } [\hat{G}] = [\Phi_H] [\lambda_H]^{-1} [\Phi_H]^T \quad (8)$$

위의  $[\hat{G}]$ 는 정적근사로 계산한 정적잉여연성행렬(static residual flexibility matrix)이고, 이를 다시 해석주파수영역 안의 저차모드로부터 다음과 같이 계산할 수 있다<sup>(2)</sup>.

$$[\hat{G}] = [G_s] - [\Phi_{le}] [\lambda_{le}]^{-1} [\Phi_{le}]^T \quad (9)$$

여기서,  $[\Phi_{le}]$ 는 강제모드를 제외하고 구성된 저차항의 탄성모드이고,  $[G_s]$ 는 강제모드가 제외된 전체항의 정적연성(full static flexibility)행렬로서 역행렬계산의 특이(singular)문제를 제거하기 위해 분계의 경계조건(boundary condition)에 따라 달리 계산되어야 한다.

만약, 분계가 어딘가에 구속이 되어 강제모드가 없을 때,  $[G_s]$ 는 다음과 같다.

$$[G_s] = [K]^{-1} \quad (10)$$

한편, 분계가 자유상태로 강제모드가 포함되어 있을 때는, 강성행렬의 역행렬을 직접 구할 수 없으므로,  $[G_s]$ 는 다음과 같이 연성행렬로부터 강제모드항  $[\Phi_r]$ 을 제거하여 유도한다<sup>(3)</sup>.

$$[G_s] = [S]^T [G_c] [S] \quad (11)$$

$$\text{여기서, } [S] = [I] - [M][\Phi_r][\Phi_r]^T \quad (12)$$

식(12)에서  $[G_c]$ 는 임의적인 정적구속으로 구한 정적잉여행렬이며, 이는 강성행렬에서 강제모드의 개수에 해당하는 만큼 임의의 열과 행을 제거하여 역행렬을 취하고 누락된 열과 행에 0을 넣어 구성한다. 분계가 자유진동일 때, 식(7)에서 힘은 결합영역에만 존재하므로, 이를 나타내면,

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_B \end{bmatrix} \{f_B\} = [\beta]\{f_B\} \quad (13)$$

가 된다. 여기서, 하첨자  $B$ 는 결합영역을 표시하고,  $\{f_B\}$ 는 결합영역에 해당하는 힘이며,  $[\beta]$ 는 결합영역에서 전체영역의 좌표로의 변환행렬이다. 식(13)을 이용하여 식(7)을 다시 쓰면,

$$\{x\} = [\Phi_L]\{q_L\} + [\Psi]\{f_B\} \quad (14)$$

$$\text{여기서, } [\Psi] = [\hat{G}][\beta] \quad (15)$$

이 된다. 식(15)에서  $[\Psi]$ 는, 정적잉여연성행렬  $[\hat{G}]$  중 결합영역의 힘에 의해 발생하는 잉여변위를 표현하므로, 1차근사방법으로 구한 잉여부가모드(residual attachment mode)라고 한다. 위의 식을 다음절의 일반화 합성식에 적용하면, 합성된 전체의 최종식을 구할 수 있다.

### 3.2 일반화 합성법<sup>(4)</sup>

본 연구에서는 복잡한 결합형태를 갖는 대형구조물에도 보편성을 잃지 않고 적용할 수 있는 일반화합성법을 도입하였다. 이 일반화합성법과 앞 절에서 1차근사방법으로 구한 잉여부가모드를 이용하면, 합성된 전체구조물의 최종 방정식을 다음과 같이 대칭인 양한정(symmetric positive-definite) 고유치방정식으로 정리할 수 있다<sup>(4)</sup>.

$$[\bar{K} - \omega^2 I] \{ \bar{q}_L \} = \{ 0 \} \quad (16)$$

여기서,

$$[\bar{K}] = [\bar{A}_L] + [\bar{\Phi}_{BL}]^T [A] ([A]^T [\bar{\Psi}_B] [A])^{-1} [A]^T [\bar{\Phi}_{BL}] \quad (17)$$

위 식의  $[A]$  는 결합영역에서의 힙핑형 조건식으로부터 결정되는 변환행렬이며, 하첨자  $B$ 는 결합영역을, 문자위의 줄(bar)은 전체 분계를 순차적으로 합하여 구성하는 것을 표시한다. 식(16)을 고유치 해석하면, 전체구조물의 고유진동수와 고유모드를 구할 수 있으며, 이로부터 전체구조물의 변위를 다음과 같이 표현할 수 있다.

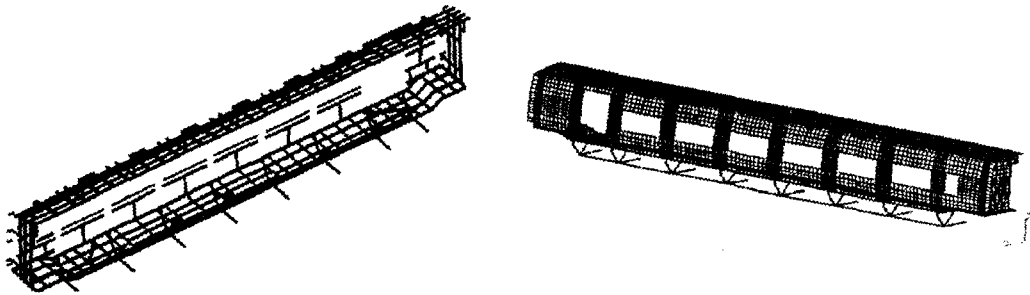
$$\{ \bar{x} \} = [T_s] \{ \bar{q}_L \} \quad (18)$$

여기서,

$$[T_s] = [\bar{\Phi}_L] - [\bar{\Psi}] [A] ([A]^T [\bar{\Psi}_B] [A])^{-1} [A]^T [\bar{\Phi}_{BL}] \quad (19)$$

#### 4. 고속전철 객차의 유한요소 모델링 및 모델개선<sup>(5)</sup>

제2장에서 제시된 모델링기법을 바탕으로 고속전철 객차의 1/2 유한요소모델을 만들고, 이 초기모델을 기초로 실제모델의 진동특성과 부합하도록 모델개선(model updating)을 수행하였다<sup>(5)</sup>. 모델개선 과정에서 설계변수(design variable)는 보의 단면형상치수 및 부가질량으로 표현한 내장재의 물성치등으로 선정하였고 가장 중요한 저차 4개의 탄성모드의 고유진동수 오차를 감소시키는 것을 목표로 하였다. 그림 3에는 본 연구를 통하여 얻은 객차 유한요소모델의 보요소형상 및 전체형상을 도시하였고, 모델링에 사용된 노드 및 요소의 개수와 전체 하중을 프랑스에서 제작한 객차 유한요소모델의 사양과 함께 도표3에서 비교하였다. 도표4에는 W1하중조건하에서 모델개선 전후의 유한요소모델에 대한 고유진동수를 프랑스 모델의 결과와 함께 비교하였고, 모델개선시 목표로 선정한 4개모드를 굵게 표시하였다. 본 연구모델은 1/2모델이기 때문에 도표4에서 \*로 표시한 비대칭모드들은 나타나지 않았다. 결과를 보면, 초기모델에서는 프랑스모델 해석결과와 꽤 큰 오차를 보였던 저차 주요 4개 모드들이 모델개선을 통해 각기 1.9, 1.1, 1.2 및 1.4%의 상대오차 이내로 접근한 것을 확인할 수 있었다. 그림 4에는 프랑스 및 본 연구 모델에 대한 1차 bodyshell 굽힘모드의 형상을 비교하였다.



(가) 보요소의 형상

(나) 전체형상

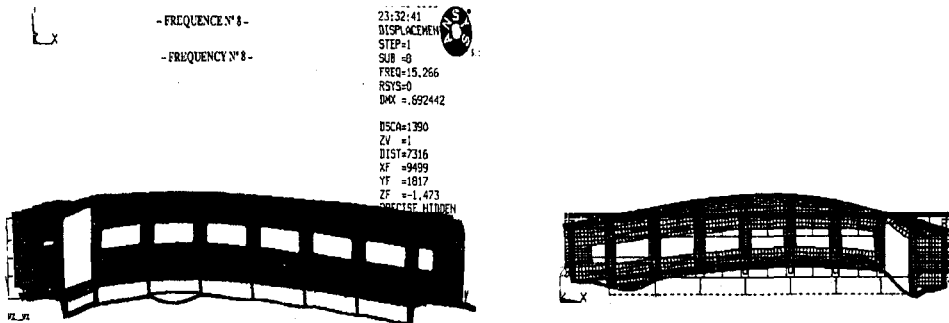
그림 3. 고속전철 객차 유한요소모델의 형상

도표 3. 본 연구 및 프랑스 유한요소모델간의 사양비교

| 모델                   | 노드개수  | 요소개수  | 자유도개수  | 전체질량 (W1 조건) |
|----------------------|-------|-------|--------|--------------|
| 본 연구 모델 (Half model) | 5845  | 13044 | 34164  | 10920Kg      |
| 프랑스 모델 (Full Model)  | 67542 | 95042 | 391294 | 22437Kg      |

도표 4. 유한요소모델의 고유진동수 비교 (\*: 비대칭 모드)

| 모드 | 프랑스모델 | 본 연구모델 |       | 모드형상  |
|----|-------|--------|-------|---|
|    |       | 개선전    | 개선후   |   |
| 1  | 0.97  | -      | -     | *Rolling                                      |
| 2  | 1.03  | 1.16   | 1.15  | Pumping                                       |
| 3  | 1.08  | 2.11   | 2.11  | Longitudinal bouncing                         |
| 4  | 1.46  | -      | -     | *Nosing                                       |
| 5  | 1.69  | 3.16   | 3.23  | Pitching                                      |
| 6  | 1.72  | -      | -     | *Hunting                                      |
| 7  | 11.91 | -      | -     | *Sides shearing                               |
| 8  | 15.27 | 15.15  | 15.55 | 1st bodyshell vertical bending                |
| 9  | 17.10 | 11.55  | 17.29 | 1st roof bending                              |
| 10 | 19.13 | 14.51  | 19.36 | 2nd roof bending                              |
| 11 | 20.42 | -      | -     | *1st body shell torsion + transversal bending |
| 12 | 21.18 | -      | -     | *Body shell torsion + transversal torsion     |
| 13 | -     | 18.47  | 20.26 | Local roof + floor bending                    |
| 14 | 21.65 | 20.16  | 21.35 | Local mode of compartment floor               |



(가) 프랑스모델 (15.27 Hz)

(나) 본 연구모델 (15.55 Hz)

그림 4. 고속전철 객차모델의 1차 bodyshell 굽힘모드형상 비교

### 5. 일반화구분모드합성법의 적용

앞서 유한요소 모델링 및 모델개선을 수행했던 고속전철 객차모델에 대하여 3장에서 소개한 일반화 구분모드합성법을 적용하였다. 이를 위해 전체 대상계를 두 개의 분계로 구분을 하였는데, 분계 1은 보요소로 모델링한 compartment assembly로서 노드 185개, 요소 369개가 사용되었고, 분계2는 분계1을 제외한 carbody로서 노드 5676개, 요소 12675개가 사용되었으며, 결합부의 노드는 18개이다. 도표 5에는 각 분계에서 채용한 모드개수를 10개 및 15개로 변화시켜 가며 모드합성이론을 적용하여 해석한 고유진동수결과를 보여주고 있으며, 여기서 DOFs는 고유치해석시 사용된 전체 운동방정식의 총자유도 크기이다. 모드합성법은 고유치해석을 위한 전체구조물의 운동방정식을, 각 분계의 저주파수에서 채용한 모드개수의 합에 해당하는 크기로 축소시켜 주기 때문에 계산효율이 매우 높다는 장점을 갖고 있다. 도표 5의 모드합성 결과를 보면, 전체 해석자유도크기는 대폭 줄어든 반면 정확도는 전체크기의 유한요소 해석결과에 꽤 근접한 결과를 보여 주었는데, 모드합성의 이론에서 제시되듯이 각 분계에서 채용한

모드가 속한 저주파수 대역까지는 정확한 결과를 보여주는 것을 알 수 있다.

도표 5. 모드합성에 의한 객차 고유진동수 결과 (Hz)

| 모드   | 전체 FEM | 일반화구분모드합성  |            |
|------|--------|------------|------------|
|      |        | 모드 10개씩 채용 | 모드 15개씩 채용 |
| 1    | 1.15   | 1.15       | 1.15       |
| 2    | 2.10   | 2.11       | 2.11       |
| 3    | 3.23   | 3.23       | 3.23       |
| 4    | 15.55  | 15.56      | 15.55      |
| 5    | 17.29  | 17.30      | 17.29      |
| 6    | 19.36  | 19.39      | 19.38      |
| 7    | 20.26  | 20.33      | 20.29      |
| 8    | 21.35  | 21.47      | 21.39      |
| 9    | 21.95  | 22.31      | 22.01      |
| 10   | 22.22  | 25.14      | 22.38      |
| DOFs | 34164  | 20         | 30         |

## 6. 결론

본 연구를 통하여 고속전철 객차의 지진동설계를 위한 효율적인 유한요소모델링 및 해석기법을 개발하고 이를 프랑스에서 만든 유한요소모델의 해석결과와 비교함으로써 그 타당성을 입증하였다.

## 후기

본 연구는 구 건설교통부와 통상산업부 및 과학기술처에서 시행한 선도기술개발사업(II-I-5)의 기술개발의 결과임을 밝힌다.

## 참고문헌

1. W. C. Hurty (1960), "Vibration of Structural Systems by Component Mode Synthesis," ASME Journal of Engineering Mechanics, Vol. 85, pp. 51~69.
2. A. P. V. Urgueira and D. J. Ewins (1989), "A Refined Modal Coupling Techniques for Including Residual Effects of Out-of-Range Modes," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, pp. 299~306.
3. R. R. Craig Jr. and C. J. Chang (1976), "Free-Interface Methods of Substructure Coupling for Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 14, No. 11, pp. 1633~1635.
4. M. J. Smith and S. G. Hutton (1992), "A General Substructure Synthesis Method for a Free-Interface Component Mode Representation," Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 900~906.
5. 장경진, 송영래, 박영필 (1997년), "개선된 모드합성법을 이용한 구조물의 동특성변경," 한국소음진동 공학회 춘계학술대회논문집, pp. 176~183.