

환단면 선형유도전자펌프의 유로 내 MHD 동특성 해석

김희령, 김용균, 이용범, 최석기, 남호윤
한국원자력연구소

대전광역시 유성구 덕진동 150

요 약

액체금속로 순환 냉각재인 전기전도성 나트륨 유체를 전자기적으로 구동시키는 선형유도 전자펌프의 유로내 자기유체역학적(MHD) 특성 분포를 해석적으로 계산하였다. 유로 내 반지름 방향의 좌표에 따라 유속, 점성력 및 전자기 구동력 등을 계산하여 하트만 수(H_a)에 따른 유체 특성의 변화를 그래프로 도시하였다. 하트만 수(H_a)가 증가할수록 도전성 나트륨 유체의 유속 분포는 점점 평탄해지고 점성력은 전자기력에 비해 무시할 정도로 작은 값을 가짐을 알 수 있었다. 따라서 적지 않은 자기장에 의해 구동되는 전자펌프에 있어서 금속 유체는 마치 일정 두께의 금속 고체로 취급될 수 있음을 예측할 수 있었다.

1. 서 론

전자펌프의 환단면 유로 내 자기유체역학적 변수들의 특성 분포를 알아보기 위해서 그림 1의 실제 전자펌프를 이상화시킨 이론 모형을 그림 2와 같이 설정하였다. 이 이론 모델에서는 실제 전자펌프에 등 간격으로 떨어져 축 방향으로 배치되어 있는 코일에 흐르는 3상 입력 전류를 환단면 외각 표면을 따라 축 방향으로 이동하면서 흐르는 등가 표면 전류로 이상화하였다.^[1] 나트륨 유체는 좁은 환단면 유로 내에서 안정된 층류 유동을 하는 것으로 가정되고, 밀도 ρ , 전기 전도도 σ , 점성 계수 μ , 자기 투자율 μ_0 의 물리적 특성값을 갖고 있다. 그림 2에서 펌프 외부 및 내부 코아는 그 투자율이 진공에서의 투자율 (μ_0) 보다 매우 큰 (실제적으로 5,000 ~ 15,000 배 이상) 값을 가지고 있으며, 환단면 유로의 바깥 원통면에 표면 전류가 원주 방향으로 흐르고 있다. 이와 같은 이론 해석 모델에서 MHD 특성 분포를 찾기 위해 채택한 가정을 정리해보면 다음과 같다.

- 실제의 전자 펌프는 3상 입력 전류에 대응되는 등가 표면 전류로 변환된 무한히 긴 동축 원통형 환단면 선형유도전자펌프이다.
- 모든 물리적 변수값들은 축대칭이며 ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$), 비압축성 ($\nabla \cdot V = 0$) 금속 유체의 유동은 반지름 좌표값에 따라 변화하는 축방향 유속 ($V = u(r) \hat{z}$)을 갖는다.
- 등가 표면 전류 밀도는 시간 및 축 방향 좌표에 대해 정현적으로 변하면서 축방향을 따라 이동하고 원주 방향으로 전류가 흐른다. 즉,

$$\begin{aligned} J_a(r_b, z, t) &= J_m \cos(\omega t - kz) \hat{\theta} \\ &= \text{Re}[J_m e^{j(\omega t - kz)}] \hat{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

$$J_m = 3\sqrt{2} k_w NI / p\tau$$

[ω : 각 주파수, k : 파수, Re : 복소수의 실수 부분,
 k_w : 권선 계수, N : 권선수/슬롯, I : 입력 전류,
 p : 자극쌍의 갯수, τ : 자극 피치]

- 등가 표면 전류 (식(1))에 의해 유로 내에 형성되는 전기장 E , 자기장 B 와 유도 전류 밀도 J 는 서로 위상 차를 가지고 있으며 시간과 축 방향 좌표에 따라 등가 표면 전류처럼 정현적으로 변한다.

$$\begin{aligned} E(r, z, t) &= Re[E(r) e^{j(\omega t - kz)}] \hat{\theta} \\ B(r, z, t) &= Re[\{ B_r(r) \hat{r} + B_z(r) \hat{z} \} e^{j(\omega t - kz)}] \\ J(r, z, t) &= Re[J(r) e^{j(\omega t - kz)}] \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

2. 유로내 유속, 점성력 및 전자기력의 분포

시변 자기장의 영향 아래 나타나는 비압축성 유동의 해석을 위한 지배 방정식은 다음과 같이 무차원화된 MHD 방정식으로 기술된다.

$$\nabla^* \cdot V^* = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + (V^* \cdot \nabla^*) V^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{R_e} \nabla^{*2} V^* + \frac{H_a^2}{R_e} J^* \times B^* \quad (4)$$

$$\nabla^* \times B^* = R_m J^* \quad (5)$$

$$\nabla^* \times E^* = -\frac{\partial B^*}{\partial t^*} \quad (6)$$

$$\nabla^* \cdot B^* = 0 \quad (7)$$

$$J^* = (E^* + V^* \times B^*) \quad (8)$$

여기서,

$$R_e = \frac{\rho R_0 V_s}{\mu}, \quad H_a = \sqrt{\frac{\sigma B_0^2 R_0^2}{\mu}}, \quad R_m = \mu_0 \sigma R_0 V_0$$

이고, 무차원화 과정에서 사용한 각 변수의 기준값들은

$$B_0 = \frac{\mu_0 J_m}{\sqrt{2} R_0 k}, \quad R_0 = r_b - r_a, \quad V_s = \frac{\omega}{k} \quad (9)$$

이다. 특히 길이의 무차원화에 있어서는 유로 폭 (R_0)을 기준값으로 하면 반지름 좌표에 따른 분포 특성을 알 수 있고, 각 물리적 변수의 축 방향 변화의 이동 속도인 동기 속도랑을 기준값으로 하면 유체 유동의 상대적인 속도 변화인 슬립 (s)을 쉽게 찾을 수 있다. 표현의 편의상 이후의 모든 무차원식에서 무차원 변수를 나타내는 상첨자 * 표기는 생략한다. 식 (3) - (8)을 각 성분별로 전개하기 위해 우선 식 (2)를 무차원화하여 맥스웰 (Maxwell)

방정식과 오옴 (Ohm)의 법칙인 식 (5) - (8)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \nabla \times (B_r \hat{r} + B_z \hat{z}) - jkR_0(B_r \hat{\theta}) &= R_m J \hat{\theta} \\ \nabla \times E \hat{\theta} + jkR_0 E \hat{r} &= -jkR_0(B_r \hat{r} + B_z \hat{z}) \\ \nabla \cdot (B_r \hat{r} + B_z \hat{z}) - jkR_0 B_z &= 0 \\ J &= E + uB_r \end{aligned} \quad (10)$$

을 얻는다. 다시 이 식들로부터 자기장 성분 (B_r 과 B_z), 전류 밀도 (J), 전기장 (E)들 사이의 관계를 표현하면 아래식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial r} + jkR_0 B_r &= -R_m J \\ E &= -B_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) - jkR_0 B_z &= 0 \\ J &= -(1-u)B_r \end{aligned} \quad (11)$$

유체 식 (3) - (4)와 전자기 식 (10) - (11)을 결합하면 유속과 자기장의 유로 내 공간 분포를 찾을 수 있는 무차원 방정식을 다음처럼 유도해 낼 수 있다.

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{R_e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{B_r B_z^c Ha^2}{2R_e} (1-u) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_r}{\partial r} \right) - \left\{ \frac{1}{r^2} + (kR_0)^2 + jkR_0 R_m (1-u) \right\} B_r = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) - jkR_0 B_z = 0 \quad (14)$$

여기서, B_z^c 은 B_z 의 켈레 복소수이고, 그림 2의 이론 모형에 따라 위 식들에 적용할 경계 조건은 아래와 같다.

$$u(r_a) = u(r_b) = 0, \quad B_z(r_a) = \sqrt{2}kR_0, \quad B_z(r_b) = 0 \quad (15)$$

유체 유동에 대해서는 환단면 벽면에서 점성 마찰에 의한 고정 유속 (no slip) 조건을 적용하였고, 축 방향 자기장은 동가 표면 전류에 의해 양 경계면에서 생성된 값으로 표현하였다.

식 (12)와 (13)은 u 및 B_r 의 비선형 항을 포함하므로 직접적으로 결합시켜 풀 수는 없다. 그러나 일반적으로 선형유도펌프의 경우에 유속 (u)이 동기 속도 (V_s)에 비해 무척 작아 $u \ll 1$ 이므로, 식 (13)에 포함되어 있는 항들이 다음의 조건,

$$|\delta^2| \equiv |(kR_0)^2 + jkR_0 R_m (1-u)| \approx |(kR_0)^2 + jkR_0 R_m| \ll 1$$

을 만족하게 되면 (13)의 일반 해는 수정된 제 1종 및 2종의 1계 Bessel 함수, $I_1(\delta r)$ 와 $K_1(\delta r)$ 로 얻을 수 있고, 이들 값은 유로 내에서 거의 변화가 없어서 자기장 $B_r \approx$ 상수로

취급할 수 있다.^[2] 따라서 식 (12)의 $\frac{B_r B_r^c}{2}$ 항을 살펴보게 되면, 표면 효과가 아주 작은 경우에 결과적으로 좁은 환단면 유로 폭을 가로 질러 나타나는 자기장 값은 거의 일정하다고 가정할 수 있으므로, 자기장에 관한 항을 $\frac{B_r B_r^c}{2} \equiv \beta^2 \approx$ 상수로 취급하면 u 에 대한 선형 방정식이 되어 쉽게 해를 구할 수 있다. 실제로 $|\delta|$ 값은 일반적인 소형 선형유도전자 펌프의 경우, 그 값이 0.1 이하이므로 식 (12)를 u 에 대한 선형 방정식으로 취급하는데 큰 무리가 없을 것으로 판단된다. 그리고 식 (14)의 경우, 수송항 ($jkR_o R_m u$)의 값 또한 확산항 ($\nabla^2 - (kR_o)^2 - jkR_o R_m$)의 값보다 유로 내 모든 반지름 좌표에 대해서 매우 작으므로 무시할 수 있다.^[3] 한편 β^2 의 값을 식 (11)과 식(15)를 이용하여 구해 보면

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_m s}{kR_o}\right)^2} \quad (16)$$

을 얻는데 $s \equiv \int_{r_a}^{r_b} (1-u) dr$ 는 유로 내에서 평균 슬립을 나타낸다.

이상과 같은 근사를 식 (12) - (14)에 적용하여 경계 조건 (15)를 만족시키는 해를 구해서 결과적으로 유속, 자기장, 전류 밀도 및 전자기력 분포를 찾으면 1종 및 2종의 Bessel 함수의 조합으로 다음과 같이 표현된다.

$$u = \gamma \left\{ 1 - \frac{1}{I_o(ar_a)K_o(ar_b) - K_o(ar_a)I_o(ar_b)} \right\} \quad (17)$$

$$\times [(K_o(ar_b) - K_o(ar_a))I_o(ar) + (I_o(ar_a) - I_o(ar_b))K_o(ar)]$$

$$f_z = (1-u) \frac{B_r B_r^c}{2} \frac{H_a^2}{R_e} \approx (1-u) \beta^2 \frac{H_a^2}{R_e} \quad (18)$$

여기서,

$$\alpha = \beta H_a \quad (19)$$

$$\gamma = -\frac{R_e}{\alpha^2} \frac{\partial P}{\partial z} + 1 = -\frac{R_e}{\alpha^2} \frac{\eta(1-s)^2}{4} + 1$$

이며, η 는 마찰 계수이다.

위에서 구한 해석적인 해 (17 - 18)은 하트만 수 (H_a)를 변화시키면서 유로 내 반지름 방향에 따른 분포로 계산해 낼 수 있다. 그림 3은 유로 내에서 유속 분포를 도시하고 있는데, 일반적으로 하트만 수가 커질수록 유속은 점점 평탄한 모양을 나타내어 벽면 근처를 제외한 영역에서 일정 속도를 유지하려는 경향이 있다. 이런 현상은 그림 4에서 볼 수 있듯이 자기장이 증가할수록 중심 영역보다 벽 근처에서 상대적으로 큰 전자기력이 작용하여 유속 분포가 더욱 평탄하게 되는 것으로 생각된다. 그러나 그림 5처럼 나타나는 점성력 f_o 에 의해 결과적으로 전자기력과 중첩되어 나타나는 펌프의 구동력 f_e 는 그림 6에서와 같이 자기장이 증가하면 벽면에서는 거의 힘이 나타나지 않는 반면, 대부분의 영역에서 일정한 구동력을 보여 주어 유속 분포도 이의 영향을 받은 것으로 생각된다. 그림 4의 전자기력은 하트만 수

와 함께 증가하고 있으며, 벽면 근처를 제외한 전체 유로 폭의 80 % 영역에서 최대, 최소 값의 차이가 수 %미만으로 대체적으로 일정하다고 볼 수 있다. 한편 반지름 방향 자기장과 유도 전류 밀도의 곱으로 생성되는 전자기력을 나타내는 그림 4와 점성에 의한 압력 손실을 계산하여 얻은 그림 5를 비교해 보면, 벽 부분을 제외하고는 대부분의 유로 영역에서 자기장의 증가(하트만 수의 증가)에 따라 점성력이 전자기력에 비해 상대적으로 현저히 작아지며 중심부에서는 그 값이 거의 나타나지 않음을 알 수 있다. 그림 6에서 보인 전자기력 및 점성력의 증첩에 의한 유로내 구동력은 벽 부근을 제외한 대부분의 영역에서 일정하게 발생되고 있으며, 이의 대부분이 전자기력에 의한 것임을 알 수 있다.

이때 식 (18)의 전자기력 계산식을 유로 폭에 대한 평균값으로 취하면

$$\begin{aligned} \bar{f}_z &= \int_{r_0}^{r_1} (1-u) \beta^2 \frac{Ha^2}{R_c} dr \\ &= s \beta^2 \frac{Ha^2}{R_c} \end{aligned} \quad (20)$$

가 되고, 기하학적 및 전기적 변수들로서 정리하면 구동 압력에 대한 다음 식을 도출해 낼 수 있다.

$$\Delta P = \frac{36 \sigma s f \tau^2 (\mu_0 k_w N I)^2}{\rho R_0^2 \{ \pi^2 + (2 \mu_0 \sigma s f \tau^2)^2 \}} \quad (21)$$

이때 식 (21)에서 나타난 구동 압력 관계식은 선형유도기기에 흔히 쓰이는 전기적 등가회로 해석에 의한 구동압력식^[4]과 동일하게 나타난다.

3. 결론

강한 자기장에 의해 구동되는 전자펌프의 경우에 점성력은 상대적으로 전자기력에 비해 작아 무시할 수 있는데, 이러한 사실은 전자펌프의 구동력 계산에 있어서 이송체인 유체를 유도 전동기에서처럼 고체로 취급하여 전기적 등가회로법에 의한 해석 과정을 그대로 적용할 수 있다는 것을 의미한다. 사실 전자기력과 점성력의 비의 제곱근으로 주어지는 무차원 매개 변수인 하트만 수가 백 수십임을 감안할 때, 실제로 점성력은 무시되고 발생하는 구동력은 결과적으로 전자기력과 동일시할 수 있음을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] Michel Poloujadoff, *The Theory of Linear Induction Machinery*, Oxford University press, New York (1980).
- [2] Lawson P. Harris, *Hydromagnetic Channel Flows*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1960).
- [3] W. F. Hughes and F. J. Young, *The Electromagnetodynamics of Fluids*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1966).
- [4] S. A. Nasar, *Linear Motion Electric Machines*, John Wiley & Sons, New York (1976).

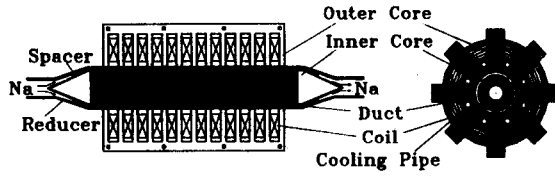


그림 1. 환단면 선형유도전자펌프의 단면도

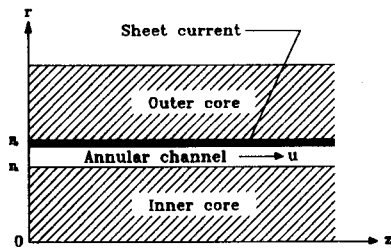


그림 2. 환단면 선형유도전자펌프의 이론 해석 모델

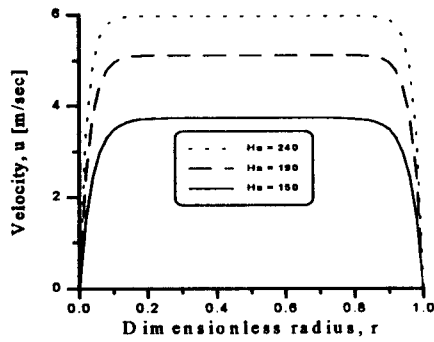


그림 3. 환단면 유로 내에서 하트만 수의 변화에 대한 유속 분포

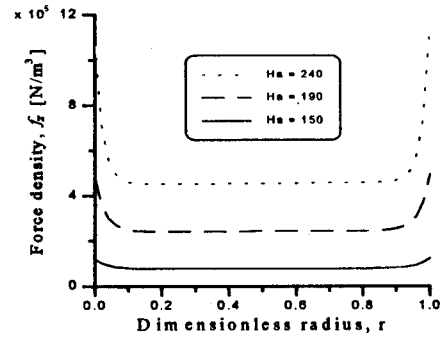


그림 4. 환단면 유로 내에서 하트만 수의 변화에 대한 전자기력 분포

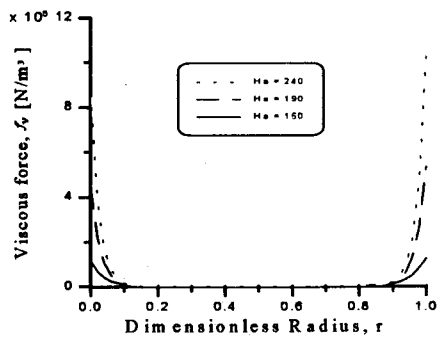


그림 5. 환단면 유로 내에서 하트만 수의 변화에 대한 점성력의 분포

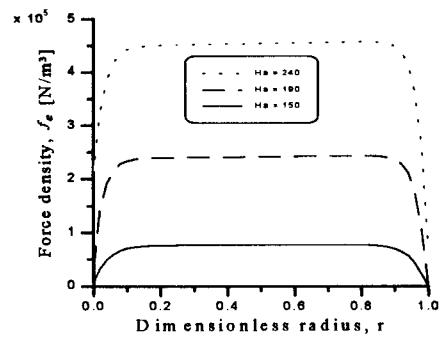


그림 6. 환단면 유로 내에서 하트만 수의 변화에 대한 구동력 분포