

비압축성 이상 유동에서 기포의 동적 안정성 연구

이 성재\*, 이 원재  
한국 원자력 연구소  
대전 유성구 덕진동 150 번지

요 약

이상 유동 지배 방정식에 두 상의 경계면 두께 개념을 도입하여 액체 내부에서의 기포 거동에 대한 동적 안정성을 이론적으로 해석하였다. 현재까지 기포의 안정성은 실험과 거시적인 물리적 이론에 의하여만 정성적으로 연구되어 왔으나, 상간의 압력 불연속성을 표면장력 모델링을 이용하여 해석적으로 해결 함으로서 기포 안정성에 대한 정량적인 분석을 가능하게 하였다. 그 결과 기포의 안정성은 기존의 무차원 Weber 수 이외에 Reynolds 수 그리고 유체의 점성력과 Capillary 파와 관련된 무차원 수에 의해서도 영향을 받는 것으로 밝혀졌다.

1. 서 론

이상 유동의 물리적 안정성은 단상 유동의 경우와는 다르게 액체 속의 기포의 거동에 의하여 지배된다. 기포가 발생하고 성장하여 bubbly 유동에서 Slug 유동으로 변화하거나 또는 기포의 성장과 더불어 기포의 속도가 증가될 경우에는 Separated 유동으로 변화된다. 이러한 천이 과정들은 근본적으로 액체 내부의 기포의 안정성과 직접적으로 관련이 되며[1,2] 이에 대한 연구는 1960년대 초반부터 물리적인 이론으로부터 시작되어, 이후 다양한 실험과 이론적인 연구에 의하여 많은 부분이 정립되었다[3,4,5]. 매질의 물리적 특성이 다른 두 유체의 경계면에서 발생하는 불안정성에 대해서는 물리적으로 Helmholtz 불안정성으로 정의되어 많은 연구가 진행되었으나, 이는 주로 두 유체가 분리되어 흐르는 경우에 대해서 수행되었다. 이상유동의 기포 유동에 대한 연구는 거시적인 물리 이론에 근거한 Weber 수에 실험을 보강하여 기포의 안정성을 관계식의 형태로 도출하는 방식으로 이루어져 왔다. 이로 인하여 대부분의 관계식은 실험적인 자료에 전적으로 의존하고있다. 또한 기포 안정성의 현상학적 복잡성 및 계측상의 어려움으로 인하여 다양한 이상 유동 조건에서의 기포 안정성과 관련한 이론 및 실험 자료는 미미한 상태이다. 특히 기포가 발생하는 순간이나 동시 다발적으로 발생한 기포의 수, 크기에 대한 연구는 아직도 물리.화학 분야에서는 중요한 관심거리가 되고있다[6,7].

기포 안정성의 물리적 정량화는 이상 유체가 가지고있는 운동량( $\tau$ )과 기포 표면에 작용하는 표면장력( $\sigma$ )의 비로써 나타내지며, 이것은 임계 Weber 수로 정의하여 일반적으로 사용되고 있다.

$$We_{crit} = \frac{\tau}{\sigma/R} \quad (1)$$

여기서  $R$ 은 기포의 반경을 나타낸다. 임계 Weber 수는 물리적으로 안정된 구형의 기포가 불안정해지면서 두개 또는 그 이상으로 갈라지는 상태를 나타내는 무차원 수로써 정의된다. 본 연구에서는 두 유체의 경계면에 존재하는 표면 두께 개념을 새로이 도입하여 기존의 이상 유동 방정식으로부터 기포의 안정성을 이론적으로 해석하였다.

2. 이상 유동 방정식의 Ill-posedness

이상 유동의 Two-fluid 모델의 지배 방정식은 각상에 대한 질량, 운동량 및 에너지 보존식으로 구성된다. 본 연구는 기포의 동적 안정성에 초점을 맞추므로 에너지 보존식은 고려하지 않았다.

질량 보존 방정식

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial x} = \phi_{c,k} \quad (2)$$

운동량 보존 방정식

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k^2)}{\partial x} + \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x} + (p_k - p_i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \phi_{m,k} \quad (3)$$

여기서 하 첨자  $k$  는 각각의 상을 나타내고,  $i$  는 경계면 그리고  $\alpha, \rho, v$  는 기포율, 밀도, 속도를 각각 나타낸다. Source 항에서의  $\phi_{c,k}$  와  $\phi_{m,k}$  는 경계면에서의 질량과 운동량 교환을 나타내는 관계식으로 이루어져 있다. 본 연구에서는 이들 항은 문제의 단순화를 위하여 경계면에서의 질량 교환을 고려하지 않으므로 이들 항은 모두 무시하였다. 위의 이상유동 연립 방정식은 방정식의 수 보다 미지수가 하나 더 많음을 알 수 있다. 이들 연립 미분방정식의 Closure law 를 만족시키기 위하여 여러 방법들이 사용되어왔으나 아직도 정확한 물리 모델은 확립되어있지 않은 상태이다. 이로 인하여 이들 방정식의 고유방정식 解는 허수(Complex variable)를 포함하게 되므로, Ill-posed 초기치 문제가 되어 해석이 까다롭고 유동 형태에 따라 해석이 불가능한 경우도 발생한다[8,9]. 이러한 Ill-posed 초기치 문제는 공액 복소수 고유치(Complex conjugate eigenvalues)로 인하여 작은 교란이 무제한적으로 증가될 수 있으므로 이상 유동의 정확한 물리적 안정성의 해석을 불가능하게 한다. 이는 액체, 기체의 압력을 동일시 하고 속도를 불연속적으로 처리하기 때문에 발생하는 것으로 알려져 있다. 이것을 해결하기 위한 다양한 노력이 수행되었으나, 현재까지는 물리적 모델이 확립되지 않았다.

이상 유동 해석을 위한 물리적인 모델링에는 두 가지의 대표적인 방법이 있다. 우선 첫째로 액체, 기체 각각의 압력을 각각 정의하는 Two-pressure model [10,11]과 단일 압력에서 Virtual mass (Added mass : 기포가 물속에서 가속될 때 기포 주위에 생기는 압력으로 인하여 Drag force 가 작용하게 되는데 이 힘의 양을 질량으로 환산한 것) 효과를 고려하는 방법 두 가지로 구분된다 [12]. Two-pressure 모델은 각 상이 분리되어 흐르는 二相 유동에서 표면 곡률에 따른 표면장력(Surface tension) 효과를 고려하여 상간의 압력이 차이를 모델하여 실수의 고유치를 얻을 수 있으나, 그 고유 값이 물리적 모델링 과정에서의 가정과 일치하지 않는 모순이 발견 되었다. Virtual mass 방법은 기포가 항상 구형을 유지할 수 있을 정도로 작은 경우, 그리고 상간의 가속도 차이가 큰 경우에만 물리적 의미가 있다. 기포가 커질 경우에는 곡률 반경이 커지므로 표면장력이 상대적으로 점성력에 비해 작아져 기포가 원형을 유지하지 않고 단지 자유 표면(Free surface) 역할만 하므로 압력 분포가 사라지게 되고, Virtual mass 효과 또한 사라지게 되어 물리적 의미가 사라지게 된다. 그럼에도 불구하고 이들 방법이 지금까지 二相 유동 해석에 주로 사용되어 왔던 것은 별다른 대안이 없었기 때문이다.

이러한 Two fluid 모델에 대한 Ill-posedness 에 대한 근본적인 문제점을 해결하기 위해서 표면 두께라는 새로운 개념[13-15]을 도입하였고 이를 이용하여 이상 유동에서의 기포 안정성 해석을 수행할 수 있게 되었다.

**3. 표면장력의 두께 이론을 이용한 기포의 안정성**

일차원 비압축성 Newtonian 유체에 대한 기포의 안정성 해석을 위하여 이상유동 지배 방정식에 표면 두께 이론[16-18]을 적용하고, 응축이나 비등을 무시하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

질량 보존 방정식:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \alpha_l \frac{\partial v_l}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

운동량 보존 방정식:

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{T_g}{\alpha \rho_g} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\mu_g}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{T_l}{\alpha_l \rho_l} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\mu_l}{\rho_l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \quad (7)$$

여기서 액체의 기포율은  $\alpha_l = 1 - \alpha$  이고,  $T_g$ ,  $T_l$  은 각상의 Bulk Modulus 와 기포율에 의하여 정해지는 함수이다. 위의 방정식 군에 작은 진폭을 가지는 주기적인 외부 교란을 가하면(주기:  $\omega$ , wave number :  $k$ ) 교란되는 독립변수는 아래와 같이 나타난다.

$$\phi = \phi_0 + \phi' \exp i(\omega t - kx) \quad (8)$$

여기서  $\phi$  는  $\alpha$ ,  $p$ ,  $v_g$ ,  $v_l$  로 정의 되고, 고차의 교란은 무시하였다. 위식(8)을 방정식에 대입하여 각 운동 변수의 교란 형태로 나타내면 아래와 같은 방정식 군이 된다.

$$\begin{bmatrix} i(kv_g - \omega) & 0 & ik\alpha & 0 \\ -i(kv_l - \omega) & 0 & 0 & ik\alpha_l \\ i\frac{T_g}{\alpha\rho_g} & i\frac{k}{\rho_g} & i(kv_g - \omega) + \frac{\mu_g}{\rho_g} k^2 \alpha & 0 \\ i\frac{T_l}{\alpha_l\rho_l} & i\frac{k}{\rho_l} & 0 & i(kv_l - \omega) + \frac{\mu_l}{\rho_l} k^2 \alpha_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ p' \\ v_g' \\ v_l' \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

위식의 계수 Matrix 의 고유방정식의 형태는 주기  $\omega$  에 대하여 이차 방정식으로 나타내어지며 이것에 대한 고유값은 아래와 같은 다음과 같이 복잡한 형태로 나타난다.

$$\omega = \frac{k}{\rho_m} \left( f_{gl} - \frac{\mu_m}{2} ki \right) \pm \frac{k}{\rho_m} \sqrt{\alpha_{gl} k \Delta \mu \Delta v_{gl} i + T_m \rho_m - \alpha_{gl} \rho_{gl} \Delta v_{gl}^2 - \frac{k^2 \mu_m^2}{4}} \quad (10)$$

여기서,  $\rho_m \equiv \alpha \rho_l + (1 - \alpha) \rho_g$ ,  $f_{gl} \equiv \alpha \rho_l v_l + (1 - \alpha) \rho_g v_g$ ,  $\mu_m \equiv \alpha(1 - \alpha)(\mu_g + \mu_l)$ ,  $\alpha_{gl} \equiv \alpha(1 - \alpha)$ ,  $\Delta \mu \equiv \alpha \rho_l \mu_g - (1 - \alpha) \rho_g \mu_l$ ,  $\Delta v_{gl} \equiv v_g - v_l$ ,  $T_m \equiv \alpha T_l + (1 - \alpha) T_g$ ,  $\rho_{gl} \equiv \rho_l \rho_g$  이다. 식(9)의 방정식군이 외부의 교란에 안정되려면 위식에서 알 수 있듯이 식(10) 등식의 허수 부분이 음수이어야 한다. 즉  $\text{Im}(\omega) \leq 0$  조건을 만족하여야 한다.

비점성 유동의 경우, 이상 유동의 안정성 즉 기포의 안정성은 다음의 조건이 만족될 경우 보장된다.

$$\alpha_g T_l + \alpha_l T_g \geq \frac{\alpha_{gl} \rho_{gl}}{\rho_m} \Delta v_{gl}^2 \quad (11)$$

식(11)의  $T_g$ ,  $T_l$  에 표면장력에 의한 압력의 불연속성 관계식을 이용하여 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{1}{R} \geq \frac{1+f}{2\sigma(f\alpha_g + \alpha_l)} \frac{\alpha_{gl}\rho_{gl}}{\rho_m} \Delta v_{gl}^2 \quad (12)$$

여기서  $f$ 는 유동의 형태에 따른 변수이며 고유방정식 해의 특성을 결정하는 요소로서 액체의 Effective Bulk Modulus( $B_l$ )와 기포의 Effective Bulk Modulus( $B_g$ )의 비,  $B_l/B_g$ , 로 나타내어진다. 점성 유동의 경우는 기포의 안정성은 다음과 같은 조건이 만족될 경우 보장된다.

$$\frac{1}{R} \geq \frac{1+f}{2\sigma(f\alpha_g + \alpha_l)} \left( \frac{\alpha_{gl}\rho_{gl}}{\rho_m} \Delta v_{gl}^2 + \frac{\alpha_{gl}(\alpha_g\rho_l\mu_g + \alpha_l\rho_g\mu_l)^2}{2\rho_m\mu_m^2} \Delta v_{gl}^2 + \frac{\mu_m^2 k^2}{4\rho_m} \right) \quad (13)$$

상기 식(12), (13)은 표면 두께 개념을 도입함으로써 이상유동 지배방정식의 안정성 분석으로부터 최초로 유도 되었으며, 식(13)에서 괄호 안의 첫번째 항은 Weber 수에 의한 기포의 불안정성을 대표하며, 두 번째 항은 점성과 운동량에 의한 기포의 변형 정도를 나타내고 마지막 항은 기포와 액체 경계면에서의 Capillary Wave 에 의한 진동을 나타낸다. 이식의 보다 명확한 물리적 의미를 보기 위하여 Dispersed 유동의 경우 ( $f=1$ ) 각 항을 무차원 식으로 나타내면, 기포 불안정성의 임계 수치(Critical Number)는 아래와 같이 표시된다.

$$Critical\ No. \geq We + \frac{Re}{2} \cdot L_1 + \frac{L_2}{4} \quad (14)$$

여기서 각 무차원 수의 정의는:

$$We = \frac{\rho_e R}{\sigma} \Delta v_{gl}^2, \quad Re = (\rho/\mu)_e R \Delta v_{gl}, \quad L_1 = \frac{\mu_d \Delta v_{gl}}{\sigma}, \quad L_2 = \frac{R \mu_m^2 k^2}{\rho_m \sigma}$$

이고, 기포울과 밀도에 의하여 가중된 물성치는 아래와 같다.

$$\rho_e = \frac{\alpha_{gl}\rho_{gl}}{\rho_m}, \quad \left( \frac{\rho}{\mu} \right)_e = \frac{\alpha_{gl}(\alpha_g\rho_l\mu_g + \alpha_g\rho_l\mu_g)}{\mu_m^2}, \quad \mu_d = \frac{(\alpha_g\rho_l\mu_g + \alpha_g\rho_l\mu_g)}{\rho_m}$$

결과적으로 기포의 불안정성은 물리적으로 Weber 수 와 Reynolds 수 그밖에 점성력에 의한 기포의 변형을 나타내는 무차원 수  $L_1$ , 그리고 Capillary Wave 에 의한 무차원 수  $L_2$ 에 의하여 지배되는 것을 알 수 있다. 그림 1에서는 각 무차원 수의 영향에 의한 기포 변형 형태를 개념적으로 나타내었다.

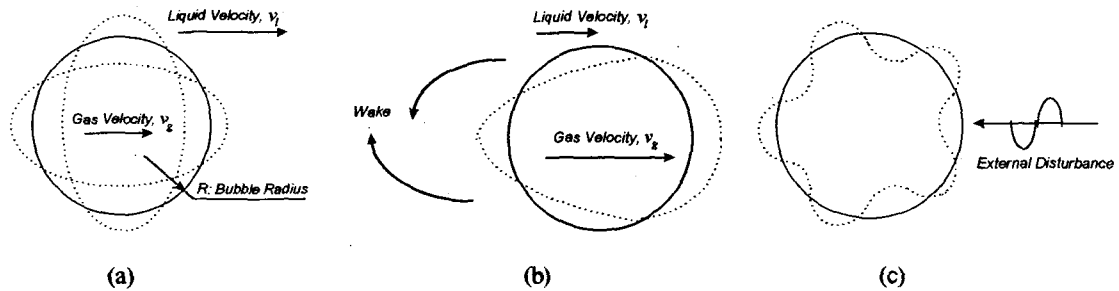


그림 1. 액체내 기포의 동적 거동의 형태: (a); Weber 수에 의한 비점성 기포의 변형 형태(점선), (b); 점성 유체의 경우 점성 전단력과 표면 장력에 의한 기포의 변형 형태(점선), (c); 외란에 의해서 기포 표면에 발생하는 Capillary Wave 형태(점선)

지금까지 설명한 비압축성 이상 유동에서 기포의 불안정성은 각 상의 압력 전파속도, 즉 음속에 의해 나타나는 불안정성이 아니고 점성력, 운동량 및 표면 장력에 의한 비교적 긴 Wave Length에 의하여 지배되는 것을 알 수 있다. 식(10)으로부터 두 개의 Wave Speed ( $\omega/k=\lambda$ )를 구하면 아래와 같이 유도된다.

$$\lambda = \frac{f_{gl}}{\rho_m} \pm \sqrt{\rho_m T_m - \rho_{gl} \Delta v_{gl}^2} \quad (15)$$

식(15)에 나타난 Wave Speed는 각 유체의 음속 보다는 상대적으로 작은 값으로 긴 Wave Length (mm~Cm)를 가지게 되며 작은 Wave Length에서는 기포가 안정됨을 알 수 있다. 이는 음속과 같이 작은 Wave Length를 가지는 압력파는 기포의 크기보다 상대적으로 작아서 기포의 변형에 별다른 영향을 주지 않기 때문이다. 오히려 긴 Wave Length를 가지는 운동량, 점성력 그리고 Capillary 파가 기포 변형에 영향을 미치는 중요한 물리량이다. 이는 평행하게 분리되어있는 두 유체 경계면에서 각 유체의 속도 차이에 의하여 발생하는 Helmholtz 불안정성과 밀접하게 관련되어 있다. 그러나 각 상의 속도가 빨라져서 임계 속도에 이르면 Helmholtz의 불안전 영역을 벗어나게 되고 이때에는 압력 파에 의하여 기포의 불안정성이 발생하게 된다. 이러한 임계 유속에 관련된 불안정성은 상당히 다른 물리현상을 보이고 있고 이 분야에 대한 연구는 앞으로 계속 진행될 것이다.

#### 4. 결 론

이상 유동시 기포 표면 두께 개념을 도입하여 상간의 압력 불연속성을 모델함으로써, 비압축성 이상유동 지배 방정식의 안정성 분석으로부터 기포 안정성에 대한 이론적 연구가 수행되었다. 연구 결과, 기포의 불안정성은 Weber 수 이외에 Reynolds 수, 점성 전단력 그리고 Capillary Wave에 의한 새로운 무차원 수  $L_1, L_2$ 에 의해서도 지배됨을 발견하였으며, 이는 기포 불안정성의 정량화에 기여할 수 있을 것이다. 향후 본 연구 결과에 기포의 안정성에 대한 실험 자료를 보강하고, 계면 전달량에 대한 적절한 물리적인 자료를 수집하여 적용하면 광범위한 이상유동의 안정성 해석이 보다 정확하고 정량적으로 해석될 수 있을 것으로 판단된다.

#### 참 고 문 헌

1. S. Navarro-Valenti; A. Calusse; D. A. Drew and R. T. Lahey, Jr. (1991) A Contribution to the Mathematical Modeling of Bubbly/Slug Flow Regime Transition. Chem. Eng. Comm., 102, 69-85
2. S. Kalkach-Navarro; R. T. Lahey, Jr. And D. A. Drew (1994) Analysis of the Bubbly/Slug Flow Regime Transition. Nuclear Engineering and Design, 151, 15-39.
3. Hesketh, R.P. ; Fraser Russell, T. W. and Etchells, A. W. (1987) Bubble Size in Horizontal Pipelines. AIChE J. 33, 663-667
4. Hean Luo and Hallvard F. Svendsen (1996) Theoretical Model for Drop and Bubble Breakup In Turbulent Dispersions. AIChE J. 42, 1225-1233
5. G. Kocamustaogullari and Ishii (1994) Foundation of the Interfacial Area Transport Equation and its Closure Relations. Int. J. Heat and Mass Transfer, 38, 481-493.
6. Blander and K. L. Katz (1975) Bubble nucleation in liquid," AIChE J., 21, 833-848.
7. Van Stralen, S J D. (1966) The mechanism of nucleate boiling in pure liquids and in binary mixtures Pt. I and Pt. II. Int. J. Heat and Mass Transfer, 9, 995-1046.
8. Ramshaw, J. D. and Trapp, J. A. (1978) Characteristics, Stability, and Short-Wavelength Phenomena in Two-Phase Flow Equation Systems. Nuclear Science and Engineering, 66, 93-102.
9. Lyczkowski, R. W. ; et. al. (1978) Characteristics and Stability Analyses of Transient One-Dimensional Two-Phase Flow Equations and Their Finite Difference Approximations. Nuclear Science and Engineering. 66, 378-396.
10. Ramsom, V. H. and Hicks, D. L. (1984) Hyperbolic Two-Pressure Models for Two-Phase Flow. Journal of computational Physics. 53, 124-151
11. Stewart, H. B. (1979) Stability of Two-Phase Flow Calculation Using Two-Fluid Models. Journal of

- Computational Physics. 33, 259-270.
12. Drew, D. ; Cheng, L. ; and Lahey, R. T. (1979) The Analysis of Virtual Mass Effects in Two-Phase Flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 5, 233-242.
  13. Present, R. D. J. (1974) On the product of surface tension and compressibility of the liquids. *J. Chemical Physics*, 61, 4267
  14. Clive A. (1980) *Statistical Mechanics of the Liquid Surface*. Wiley, New York
  15. Egelstaff, P. A. & Widom, B. (1970) Liquid surface tension near the triple point. *J. Chemical Physics*, 53, 2667
  16. S. J. Lee, (1988) A hyperbolic solution method for two-phase flow using surface tension effect. Ph. D. Dissertation, KAIST.
  17. S. J. Lee and K. S. Chang, (1997) A Hyperbolic Solution Method for Two-phase Flows. 2nd Int. Conference of Flow Interaction, Berlin, Proc. 39-44
  18. S. J. Lee, K. S. Chang and K. D. Kim (1997) A New Hyperbolic Equation System with Analysis of Characteristics for Two-phase Flow Modeling. 97 National Heat Transfer Conference, Maryland, ANS Proc. 10. 118-125