

압축성 이상 유동(Two-Phase)의 고차 Upwind 수치해법 연구

이성재<sup>1</sup>, 정문선<sup>2\*</sup>, 이원재<sup>1</sup>, 장근식<sup>2</sup>

<sup>1</sup>한국원자력연구소 열유동 연구팀

대전 유성구 덕진동 150번지

<sup>2</sup>한국과학기술원 항공우주공학과

대전 유성구 구성동 373-1

요 약

표면장력이 운동량 방정식에 고려되어 완전한 쌍곡형으로 변환된 이상유동 방정식에 그동안 적용이 까다로왔던 고차의 Upwind 수치 방법을 처음으로 적용하였다. 이로인하여 기존의 유한 차분 수치 해석 방법에서 필연적으로 나타나는 인위적인 감쇄 및 수치적 확산 문제를 개선할 수 있는 방법이 본 연구에 의해서 개발되었다. 개발된 수치스킴은 MUSCL기법을 이용한 Flux extrapolation방법을 사용하였고 시간에 대해서는 Fractional time step방법을 이용하여 공간 및 시간에 대하여 이차의 정확도를 가지게 하였다. 개발된 방법의 수치실험 결과 기존의 유한 차분법에서 발생하는 제반의 문제점들을 보완하고 보다 개선된 해를 얻을 수 있는 가능성을 확인 하였다.

1. 서 론

기본적인 비평형, 비균질(Inhomogeneous, non-equilibrium) 이상 유동(Two-phase flow)해석을 위한 지배방정식은 질량, 운동량 그리고 에너지 보존방정식이며, 이들은 각각의 상에 적용되어 모두 6개의 기본방정식을 이룬다. 이들 방정식의 고유방정식 解는 허수(Complex variable)를 포함하고 있으므로 불량 설정된 초기치 문제(III-posed initial value problem)가 되어 불안정성이 발생한다[1,2]. 이는 각각의 상이 동일한 압력하에 서로 독립적인 2개의 속도를 가지므로써 발생하는 역학적 불균형(Mechanical non-equilibrium)에 기인한다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여, 기존의 二相 유동의 운동량 방정식에 표면장력을 고려하여 완전한 쌍곡형방정식으로 변환된 이상유동 방정식을 이용하여, 여기에 Upwind scheme인 Flux vector splitting방법을 처음으로 적용하였다[3].

고해상도(High Resolution)의 해를 얻기 위하여 MUSCL(Monotone Upstream -centered Scheme for Conservation Laws)을 응용한 Flux Extrapolation 기법을 사용하고, 이때 충격파와 같은 불연속적인 해에 나타날 수 있는 진동 혹은 불안정성을 제거하기 위하여 제한자(Limiter)를 도입하였다. Flux Vector Splitting방법은 통상적으로 유동장내의 유속이 아음속( $Ma < 1$ )로부터 초음속( $Ma \geq 1$ )의 영역에 걸쳐 나타날 경우, 국소적으로 음속인 지점( $Ma=1$ )에서 진동이나 불연속적인 현상이 발생하게 된다. 따라서 이를 보정하기 위하여 Eigenvalue-switching technique을 사용하였다. 또한, 고속유동( $Ma \geq 1$ )의 경우에 Numerical flux를, 격자중양으로 평균하여 내삽(Interpolation)한 고유치의 부호에 따라 분할(Splitting)하는 기존의 방법이 부정확한 결과를 초래하므로, 격자경계에서의 고유치들을 사용하여 그 부호에 따라 전방 및 후방성분으로 분할하는 기법을 사용하였다.

## 2. 지배방정식

기본적인 이상유동 방정식은 다음과 같으며 여기서는 문제의 단순성과 적용한 수치기법의 특성을 독립적으로 평가하기 위하여 에너지 보존 방정식은 고려하지 않았다.

(질량 방정식)

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} = \phi_c \quad (1)$$

(운동량 방정식)

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k^2)}{\partial t} + \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x} + (p_k - p_i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \phi_m \quad (2)$$

여기서  $\alpha, \rho, p, v$ 는 각각 기포율, 밀도, 압력 그리고 속도를 나타낸다. 그리고 하첨자  $k$ 는 각상의 상태를, Source항의 하첨자  $c$ 는 경계면에서 교환되는 질량을,  $m$ 은 운동량 교환을 나타낸다, 위의 식(1)과 (2)를 Physical flux로 나타내기 위하여 Jacobian transformation을 수행하여 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (I+M) \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

여기서 Vector  $U$ 는  $\{\alpha_g \rho_g, \alpha_l \rho_l, \alpha_g \rho_g v_g, \alpha_l \rho_l v_l\}$ 의 요소로 이루어지고 Vector  $F$ 는  $\{\alpha_g \rho_g v_g, \alpha_l \rho_l v_l, \alpha_g \rho_g v_g^2, \alpha_l \rho_l v_l^2\}$ 로 이루어 졌으며 계수 Matrix에서  $I$ 는 Unit Matrix이고  $M$ 은 압력만으로 표시되는 Matrix이다[4, 5].

## 3. 수치 기법

상사변환 및 Homogeneity Property에 기초한, 고전적인 Steger & Warming(1981)의 Flux Splitting 방법에 의하면 전체 Flux Jacobian Matrix의 고유치를 분리시켜 Flux Vector를 전방(Forward) 및 후방 기여(Backward Contribution)성분으로 분할하여 취급한다[6]. 이렇게 분할된 Flux성분은 일방향 풍상차분(One-sided Upwind Discretization)법에 의하여 공간차분화된다. 이때, 음속인 지점(Sonic Point)에서 고유치의 부호가 바뀔 경우 분할된 Flux들은 미분가능하지 않으며 따라서  $Ma$ 에 따른 변화율이 불연속적인 양상을 보인다. 이런 특성은 결과적으로  $Ma=1$ 인 지점에서 진동이나 Glitch를 발생시키는데, 이때 발생하는 오류는 이외의 다른 영역에 영향을 미치지 않는다. 이렇게 분할된 Flux가 미분가능하지 않으므로 음속인 지점에서의 Glitch가 발생한다. 이러한 오류는 Steger(1982)등에 의해 제안된 Eigenvalue-Switching Technique을 사용하여 억제할 수 있다[7]. 즉, Switching factor  $\epsilon$ 을 도입하여 고유치를 다음과 같이 수정하여 분할된 Flux를 Smoothing시킨다.

$$\lambda_k^\pm = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_k \pm (\lambda_k^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4)$$

1차 정확도(First-order accurate)의 해는 Dissipative Property에 의하여 충격파(Shock Wave)나 접촉불연속면(Contact Discontinuity)의 강도 및 위치를 정확하게 모사하지 못한다. 그러므로 고해상도의 해를 얻기 위하여 2차 정확도 이상의 Numerical Scheme을 사용해야 할 필요가 있다. 본 연구에서는

MUSCL(Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)기법을 수정한 형태의 Flux Extrapolation기법을 사용하여 공간에 대한 2차 정확도를 얻고, Fractional time step기법을 이용하여 시간에 대한 2차 정확도의 해를 얻을 수 있었다[8]. 1차원 쌍곡형 방정식은

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (I+M)\left(\frac{\partial F^+}{\partial x} + \frac{\partial F^-}{\partial x}\right) = 0 \quad (5)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 여기에 2차정확도를 가지게 하기 위하여 경계면에서의 Flux를 외삽한다. 즉, Positive flux의 후방차분 및 Negative flux의 전방차분이 다음과 같이 주어지면,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{+b} = F_i^+ + \frac{1}{4} [(1-k)(F_i^+ - F_{i-1}^+) + (1+k)(F_{i+1}^+ - F_i^+)] \quad (6)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{-f} = F_{i+1}^- - \frac{1}{4} [(1+k)(F_{i+1}^- - F_i^-) + (1-k)(F_{i+2}^- - F_{i+1}^-)] \quad (7)$$

2차의 Numerical flux는

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} = F_{i+\frac{1}{2}}^{+b} + F_{i+\frac{1}{2}}^{-f} \quad (8)$$

이 된다. 이때  $k = -1$  이면 Fully upwind scheme이 되어 식(3)는 다음과 같이 차분화된다.

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2\Delta x} [(3F_i^+ - 4F_{i-1}^+ + F_{i-2}^+) + (-3F_i^- + 4F_{i+1}^- - F_{i+2}^-)](I+M) \quad (9)$$

여기에 Positive 및 Negative flux성분을 1차의 Numerical flux  $F^* = F(U_i, U_{i+1})$ 와 Physical flux  $F_i$ 의 차로써 정의하면

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_i = \delta^+ F_i^- = \delta F_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (10)$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^* - F_i = -\delta^- F_i^+ = -\delta F_{i-\frac{1}{2}}^+ \quad (11)$$

이 되어 결과적으로, 평균화된 Numerical flux는 아래의 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \overline{F_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)}} &= \overline{F_{i+\frac{1}{2}}^*} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1-k}{2} (F_i - F_{i-\frac{1}{2}}^*) + \frac{1+k}{2} (F_{i+1} - F_{i+\frac{1}{2}}^*) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{1+k}{2} (F_i - F_{i+\frac{1}{2}}^*) + \frac{1-k}{2} (F_{i+1} - F_{i+\frac{3}{2}}^*) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $k = -1$ 일 경우 Fully upwind scheme이 되고,  $\overline{F^*}$ 와  $\overline{F^{*(2)}}$ 는 각각 일차 및 이차의 Averaged numerical flux를 의미한다. 이렇게 Flux Extrapolation을 적용하여 공간에 대한 2차 정확도를 구현할 수는 있으나, 시간에 대하여는 여전히 1차 정확도를 가지므로 다음과 같은 Fractional Time Step Method를 이용하여 시간에 대한 2차 정확도를 얻는다.

Projection stage :

$$\overline{U}_i = U_i^N - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}M(F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^*) \quad (13)$$

Physical stage :

$$U_i^{N+1} = U_i^N - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} - \overline{F}_{i-\frac{1}{2}}^{*(2)}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}M(\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} - \overline{F}_{i-\frac{1}{2}}^{*(2)}) \quad (14)$$

이러한 2차 정확도 스킴은 Dispersive Property를 가지므로, 충격파 및 접촉불연속면 등의 불연속적인 현상의 해에 대하여 심한 진동(Oscillation)을 수반한다. 이 경우 진동하지 않는 해(Non-oscillatory properties of solution)를 얻기 위하여 Numerical Scheme은 Entropy condition, Monotonicity 그리고 Total Variation Diminishing(TVD)조건을 만족하여야 한다. 이 조건들은 제한자(Limiter)라고 불리는 비선형 수정인자(Non-linear correction factor)를 도입함으로써 만족시킬 수 있는데 Minmod limiter 의 경우 TVD domain의 하한(Lower limit)을 따르므로 Dissipation이 가장 심하고 Superbee limiter는 상한(Upper limit)이므로 접촉불연속면에 대하여 가장 높은 정확도를 가진다. 본 연구에서는 모든 2차 정확도 계산시 Minmod limiter를 사용하였다. 즉,

$$r_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{F_{i+2}^+ - F_{i+1}^+}{F_{i+1}^+ - F_i^+} \quad (15)$$

$$r_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{F_i^- - F_{i-1}^-}{F_{i+1}^- - F_i^-} \quad (16)$$

라 하면, 제한자  $\Psi$  는 다음과 같이 정의된다.

$$\Psi(r) = \begin{cases} \min(r, 1) & \text{if } r > 0 \\ 0 & \text{if } r \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

이 제한자들은 Symmetry property를 가지므로 전방 및 후방 구배를 똑같은 방법으로 취급한다.

$$\frac{\Psi(r)}{r} = \Psi\left(\frac{1}{r}\right) \quad (18)$$

결과적으로, 2차 정확도 Numerical Flux는 우변 2, 3번째 항들이 제한되는 다음과 같은 형태로 나타난다.

$$\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} = \overline{F}_{i+\frac{1}{2}}^* + \frac{1}{2}[\Psi(r^+)(F_i - F_{i-\frac{1}{2}}^*) + \Psi(r^-)(F_{i+1} - F_{i+\frac{3}{2}}^*)] \quad (19)$$

#### 4. 계산결과 및 검토

Flux extrapolation에 의한 고해상도기법은 해의 정확성을 높여 주었다. 특히 2차 정확도 스킴에서 급격한 기울기를 갖는 경우, 또는 불연속면에서 나타날 수 있는 진동현상은 제한자를 도입하여

Monotonicity를 갖게 함으로써 안정적인 해를 구할 수 있었다. 따라서 이러한 기법들을 적절히 사용할 경우, 이상 유동에서의 임계유동현상이나 증기폭발과 같은 급격한 물성치 변화를 수반하는 현상에 대하여 종전보다 정확하고 안정된 해를 얻을 수 있을 것으로 기대된다. 또한 Numerical flux에 나타나는 수학적 문제를 해결하여, 고속유동시 나타날 수 있는 비물리적인 현상을 제거하고, 역학적으로 타당한 결과를 얻을 수 있었다.

이러한 기법의 효과를 검증하기 위하여, 이상유동에서의 Wave전파를 명확하게 확인할 수 있는 Riemann문제의 계산 결과를 검토하여 보았다. 이때 초기조건은 비교적 높은 기포율( $\alpha \approx 1$ )에서 초음속 유동 조건을 반영할 수 있도록 설정하였다. 그림 1은 초기압력비가 70:1 인 충격파관의 격막이 파쇄된 직후 0.0003초에서의 압력 분포를 계산한 결과로 일차와 이차의 정확도 차이 그리고 Eigenvalue-switching기법에 의한 효과를 비교한 그림이다. Averaged eigenvalue를 사용하여 1차 정확도로 계산했을 경우 팽창파의 Mach수가 1 인 지점에서 심한 Glitch현상이 나타남을 알 수 있다. 이는 속도 선도에서도 동일하게 나타나며, 시간이 전진함에 따라 불안정성이 증가하여 결국 계산이 불가능해지기도 한다. 또한 이런 양상은 압력비가 커질수록 더욱 악화되어 비물리적인 결과를 제공하게 된다. 따라서 앞서 언급한 Eigenvalue-switching technique을 써서 Flux gradient를 Smoothing하여 고유치를 수정하고, 격자경계에서 정의된 고유치에 의하여 Flux 분할하여 2nd-order flux extrapolation기법을 적용하였을 경우 그림1(b)와 같이 상당히 개선된 해를 얻을 수 있다. 이때 correction factor  $\epsilon$ 은 고유치의 1%미만의 값을 사용하였다. 이런 경우에 대한 1차 정확도해와 2차 정확도해를 비교하면 그림 1(b)에서와 같이 정확도가 개선되어짐을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 해의 정확도를 높이고 이상유동의 고속유동현상을 안정적으로 다룰 수 있는 코드의 개발에 중점을 두었으며 다양한 수치기법들을 검토하여 제반 문제점들에 대한 보완 및 얻어지는 해의 개선을 시도하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 높은 기포율 및 초음속유동 조건하에서는, 격자경계에서의 Flux분할을 그 지점에서의 고유치에 따르도록 수정함으로써 안정적인 수치스킴을 구현하였다.
- 2) Flux vector splitting방법의 내재적인 특성상 음속지점에서 발생하는 오류를, Eigenvalue-switching technique을 사용하여 감소시킴으로써 비교적 매끈한 해를 얻었다.
- 3) Flux Extrapolation기법을 도입하고 적절한 제한자를 사용하여 진동없는 2차정확도의 해를 구할 수 있었다.

## 참고 문헌

1. J. D. Ramshaw and J. A. Trapp (1978), Characteristics, Stability, and Short-wave length Phenomena in Two-Phase Flow Equation Systems. Nuclear Science and Engineering, **66**, 93-102.
2. V. H. Ransom and D. L. Hicks (1984) Hyperbolic Two-Pressure Models for Two-Phase Flow. Journal of Computational Physics, **53**, 124-151.
3. 이성재, "표면장력효과를 고려한 이상유동의 쌍곡형 해법", 공학박사학위논문, 한국과학기술원, 항공우주공학과, 1998.
4. S. J. Lee and K. S. Chang, (1997) A Hyperbolic Solution Method for Two-phase Flows. 2nd Int. Conference of Flow Interaction, Berlin, Proc. 39-44.
5. S. J. Lee, K. S. Chang and K. D. Kim (1997) A New Hyperbolic Equation System with Analysis of Characteristics for Two-phase Flow Modeling. 97 National Heat Transfer Conference, Maryland,

ANS Proc. 10. 118-125.

6. J. L. Steger and R. F. Warming (1981) Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods. *Journal of Computational Physics*, **40**, 263-293.

7. W. K. Anderson, J. L. Thomas and B. Van Leer, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. *AIAA J.* **24**, No 9, 1453-1460.

8. C. Hirsh (1992) *Numerical Computation of Internal and External Flow*. 2, John Wiley & Son,

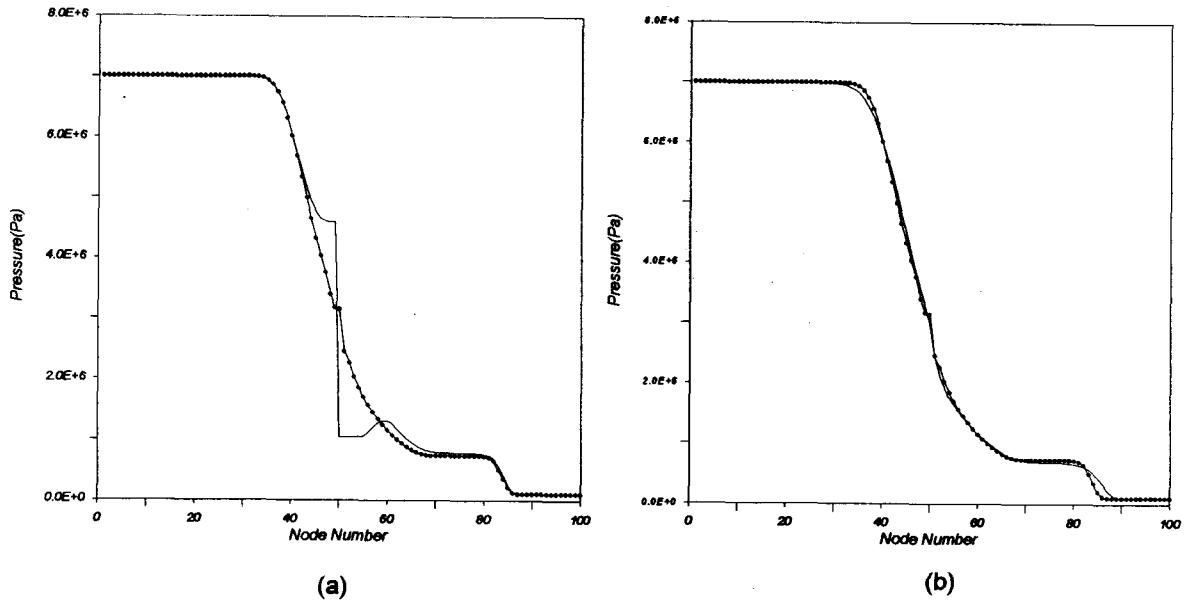


그림 1. Two-Phase Riemann문제의 해석결과, (a): Eigenvalue-Switching방법을 고려한 이차 정확도의 결과(·)와 단순 이차 정확도의 계산 결과(-)비교, (b): Eigenvalue-Switch방법에 의한 일차(-)와 이차(·)정확도 결과 비교.