'98 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

경계면 부분 중성자류 노달 방법의 수학적 수반해

송양수, 양원식
조선대학교
광주광역시 동구 서석동 375

요 약

ANL의 액체금속로 노심 해석 코드 DIF3D[1]를 OECD/NEA를 통하여 도입하여, DIF3D의 경계면 중성자류 노달 방법의 수학적 수반해를 정확하게 계산하는 직접 해법을 DIF3D 코드에 구현하고 검증 계산을 수행하였다. 이 직접 해법은 각 노드의 수반 부분 중성자류의 선형 조합을 이용하여 수학적 수반해를 정확히 계산한다. 이 방법에서는 수반 부분 중성자류의 선형 조합을 통하여 수학적 수반 방정식이 본래의 노달 방정식과 매우 유사한 형태로 변형되며, 그 결과 본래의 노달 방정식 해법이 최소한의 수정을 통해 수반 방정식 해결에 적용된다.

1. 서 론

새로운 설계 개념을 도입하여 원자로를 설계할 경우, 주요 핵특성 및 안전 변수의 계산치에 대한 불확실도 평가가 필수적이다. 체계적인 불확실도 평가를 위해서는 각 설계 변수 및 반응 단면적에 대한 각 핵특성 및 안전 변수의 민감도 해석이 선행되어야 한다. 이와 관련하여, 반응 단면적 및 주기초 수밀도 분포에 대한 주요 연소 특성의 민감도를 효율적으로 계산하기 위한 연소섭동이론 및 전산 코드 DPT가 개발되었다.[2] DPT는 주기초 및 주기말 노심 증배계수, 연소 반응도, 출력 분포, 증식율, 연소도, 각 핵종의 방출량 등의 연소 특성에 대한 민감도 계산을 효과적으로 수행한다. 그러나, 중성자 확산방정식의 해 및 수반해 계산이 차분법을 이용한 R-Z 좌표계에 국한되어 있다. 따라서, 보다 정확한 연소 계산 및 민감도 계산을 위하여, 중성자속 및 수반 중성자속 계산 방법에 최근의 노달 방법을 도입하는 것이 바람직하다.

노달 방법에 기초한 연소섭동이론을 DPT에 구현하고자, ANL의 액체금속로 노심 해석 코드 DIF3D를 OECD/NEA를 통하여 도입하였다. 그러나, DIF3D의 공식 버전은 노달 방법의 수학적 수반해를 유사 변환을 이용해 근사적으로 계산한다.[3] 이 유사 변환 방법은 연속적인 확산 방정식의 수반 방정식에 노달 방법을 적용하여 구한 물리적 수반해를 유사 변환하여 수반해를 구한다. 이 방법은 횡방향 누출율의 평탄 근사 경우에는 정확한 수반해를 계산

하나, 2차 함수 근사 경우에는 근사적인 수반해를 계산한다. 따라서, DIF3D의 경계면 중성자류 노달 방법의 수학적 수반해를 정확하게 계산하는 직접 해법[4]을 DIF3D 코드에 구현하고 검증 계산을 수행하였다.

2. 경계면 부분 중성자류 노달 방법

DIF3D 노달 방법은 다군 중성자 확산 방정식을 해결하기 위해 노달전개법(NEM)을 사용하며, 최종식은 경계면 평균 부분 중성자류에 대한 반응행렬식으로 표현한다. 육방형 노드의 경우, 각 에너지군에 대한 노드당 미지수는 5 개의 중성자속 모멘트와 8 개의 경계면 평균 부분 중성자류로 구성된다. 중성자속 모멘트는 노드 평균 중성자속을 나타내는 영차 모멘트와 4 개의 일차 모멘트로 구성된다. 경계면 평균 부분 중성자류는 경계면을 통하여 나가는 면평균 부분 중성자류로 구성되며 이는 이웃 노드에서 경계면을 통하여 들어오는 면평균 부분 중성자류를 나타낸다.

이들 노달 미지수에 대한 방정식은 횡방향 적분법 및 다항식 전개법을 사용하여 유도된다. 그 결과, 중성자 에너지군 g에 대한 노달 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{G}_g \boldsymbol{\phi}_g + \mathbf{C}(\boldsymbol{J}_g^{out} - \boldsymbol{J}_g^{in}) = \boldsymbol{Q}_g - \boldsymbol{L}_g \tag{1}$$

$$\boldsymbol{J}_g^{out} = \mathbf{A}_g \boldsymbol{J}_g^{in} + \mathbf{B}_g \boldsymbol{\phi}_g \tag{2}$$

$$\boldsymbol{J}_g^{in} = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{J}_g^{out} \tag{3}$$

여기서, $\boldsymbol{\phi}_g$, $\boldsymbol{L}_g$ 및 $\boldsymbol{Q}_g$는 각각 중성자속 모멘트, 횡방향 누출율 모멘트 및 중성자원 모멘트를 포함한 벡터이다. 벡터 $\boldsymbol{J}_g^{in}$와 $\boldsymbol{J}_g^{out}$은 각각 노드로 들어오는 면평균 부분 중성자류와 노드에서 나가는 면평균 부분 중성자류를 포함한다. 대칭 행렬 $\boldsymbol{\Pi}$는 내부 경계면에서의 경계 조건 및 외부 경계면에서의 알베도 경계 조건을 나타낸다. 행렬 $\mathbf{G}_g$와 $\mathbf{A}_g$는 대칭 행렬이나, 행렬 $\mathbf{C}$와 $\mathbf{B}_g$는 비대칭이다.

식 (2)의 중성자속 모멘트 벡터에 기초한 반응 행렬식은 노달 방정식에 대한 반복 계산 방법의 수렴성을 향상시키기 위해 중성자원 모멘트에 기초한 반응 행렬식으로 변형된다. 먼저, 식 (1)을 이용하여 식 (2)의 중성자속 모멘트 벡터를 소거하면, 다음 식이 얻어진다.

$$\mathbf{X}_g \boldsymbol{J}_g^{out} = \mathbf{Y}_g \boldsymbol{J}_g^{in} + \mathbf{B}_g \mathbf{G}_g^{-1}(\boldsymbol{Q}_g - \boldsymbol{L}_g) \tag{4}$$

여기서, $\mathbf{X}_g = \mathbf{I} + \mathbf{B}_g \mathbf{G}_g^{-1} \mathbf{C}$, $\mathbf{Y}_g = \mathbf{A}_g + \mathbf{B}_g \mathbf{G}_g^{-1} \mathbf{C}$. 이어서, 식 (4)에 $\mathbf{X}_g^{-1}$을 곱하면 최종 반응 행렬식이 다음과 같이 구해진다.

$$\boldsymbol{J}_g^{out} = \mathbf{R}_g \boldsymbol{J}_g^{in} + \mathbf{P}_g(\boldsymbol{Q}_g - \boldsymbol{L}_g) \tag{5}$$

식 (1)과 (4)의 횡방향 누출율 모멘트 벡터 $\boldsymbol{L}_g$는 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{L}_g = \mathbf{H}_g(\boldsymbol{J}_g^{out} - \boldsymbol{J}_g^{in}) \tag{6}$$

여기서, $\mathbf{H}_g$는 한 노드내 각 방향의 중성자속 모멘트를 해당 노드와 두 이웃 노드의 횡방향 중성자류와 결합시키는 행렬이다.

식 (1), (3) 및 (5)로 주어진 노달 방정식의 해는 통상적인 2 단계 반복 계산을 통해 구한다. 먼저, 주어진 중성자원 벡터에 대하여 반복 계산 방법을 통해 식 (3)과 (5)를 해결하여 부분 중성자류 벡터를 구한다. 중성자속 모멘트는 가장 최근에 계산된 부분 중성자류를 이용하여 식 (1)로부터 계산한다. 다음, 계산된 중성자속 모멘트를 이용하여 전체 핵분열 및 산란 중성자원 모멘트에 해당 에너지군이 기여하는 부분을 계산한다. 해가 수렴할 때까지 이상의 계산을 반복하며, 핵분열 중성자원 반복 계산은 점근적 중성자원 외삽법(asymptotic source extrapolation)과 성긴 격자 재균형법(coarse-mesh rebalance)에 의해 가속화된다.

3. 수반 방정식

모든 에너지군에 대해 식 (1), (2), (3) 및 (6)을 결합하고 결과식과 관련된 행렬을 전치하면, 에너지군 g에 대한 수학적 수반 방정식이 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{G}_g \boldsymbol{\phi}_g^* - \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{J}_g^{out,*} = \boldsymbol{Q}_g^* \tag{7}$$

$$\boldsymbol{J}_g^{out,*} = \Pi \boldsymbol{J}_g^{in,*} - (\mathbf{C}^T + \mathbf{H}_g^T) \boldsymbol{\phi}_g^* \tag{8}$$

$$\boldsymbol{J}_g^{in,*} = \mathbf{A}_g \boldsymbol{J}_g^{out,*} + (\mathbf{C}^T + \mathbf{H}_g^T) \boldsymbol{\phi}_g^* \tag{9}$$

여기서, 벡터 $\boldsymbol{\phi}_g^*$, $\boldsymbol{J}_g^{out,*}$ 및 $\boldsymbol{J}_g^{in,*}$은 식 (1)과 (2)에 포함된 벡터에 대응하는 수학적 수반 벡터이다.

이들 수반 방정식의 직접 해법은 수반 부분 중성자류에 대한 반응 행렬식을 수반 중성자속 모멘트 대신 수반 중성자원 모멘트를 이용하여 유도하는 데서 시작된다. 이는 노달 해법 과정에서 반응 행렬식을 변형한 것과 유사하다. 먼저, 식 (8)과 (9)의 수반 중성자속 모멘트를 식 (7)을 이용하여 소거하면 다음 식이 얻어진다.

$$\mathbf{X}_g^T \boldsymbol{J}_g^{out,*} = \Pi \mathbf{Y}_g^T \boldsymbol{J}_g^{out,*} + \mathbf{V}_g \boldsymbol{Q}_g^* + \mathbf{W}_g \boldsymbol{J}_g^{out,*} \tag{10}$$

여기서, $\mathbf{V}_g = (\Pi - \mathbf{I})(\mathbf{C}^T + \mathbf{H}_g^T)\mathbf{G}_g^{-1}$, $\mathbf{W}_g = (\Pi - \mathbf{I})\mathbf{H}_g^T \mathbf{G}_g^{-1} \mathbf{B}_g^T$. 이 방정식은 수반 부분 중성자류 사이의 결합이 노달 방정식의 부분 중성자류 사이의 결합보다 훨씬 더 복잡함을 나타낸다.

수반 부분 중성자류 결합에 부가된 이 복잡성은 수반 부분 중성자류의 선형 조합을 통하여 수반 미지수를 다시 정의함으로써 제거할 수 있다. 새로운 노달 미지수 $\boldsymbol{K}_g^{out,*}$과 $\boldsymbol{K}_g^{in,*}$을 다음과 같이 정의하면

$$\boldsymbol{K}_g^{out,*} = \mathbf{Y}_g^T \boldsymbol{J}_g^{out,*} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{K}_g^{in,*} = \Pi \boldsymbol{K}_g^{out,*} \tag{12}$$

식 (10)의 수반 반응 행렬식을 다음과 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{K}_g^{out,*} = \mathbf{R}_g^T \boldsymbol{K}_g^{in,*} + \mathbf{P}_g^* \boldsymbol{Q}_g^* - \boldsymbol{L}_g^* \tag{13}$$

여기서, $\mathbf{P}_g^* = \mathbf{R}_g^T \mathbf{V}_g$, $\boldsymbol{L}_g^* = -\mathbf{R}_g^T \mathbf{W}_g(\mathbf{Y}_g^T)^{-1} \boldsymbol{K}_g^{out,*}$.

수반 부분 중성자류 각각은 노드 경계면에서 불연속이나, 수반 부분 중성자류의 선형 조합으로 정의된 $\boldsymbol{K}_g^{out,*}$은 식 (12)에 보인 바와 같이 경계면에서 연속이다. 이 결과, 부분 중성자류 반응 행렬식의 해법을 최소한의 수정을 통해 식 (12) 및 (13)에 적용할 수 있다. 특히, 변환된 수반 부분 중성자류 사이의 결합은 부분 중성자류 사이의 결합과 같은 구조를 가지고 있으며, 단지 선원항만이 기본적으로 다르다. 따라서, 수반 중성자원과 횡방향 누출율 계산 부분만 수정하면, 기존의 노달 방정식 코드를 수반해 계산에 그대로 적용할 수 있다.

식 (12)와 (13)을 해결하면, 각 노드에서 나가는 수반 부분 중성자류는 식 (11)을 사용하여 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{J}_g^{out,*} = (\mathbf{Y}_g^T)^{-1} \boldsymbol{K}_g^{out,*} \tag{14}$$

각 노드에서 나가는 수반 부분 중성자류를 구하면, 각 노드로 들어오는 수반 부분 중성자류는 식 (9)로부터 간단히 계산할 수 있다.

4. 검증 계산

앞에서 설명한 수반해의 직접 해법을 DIF3D 코드에 구현하고, VVER-1000, 육방형으로 변형한 IAEA 경수로 벤치마크 문제, SNR 및 450 MWt 액체금속로 노심에 대해 다양한 검증 계산을 수행하였다. 2차원 노심 모델 및 다양한 축방향 노드 크기의 3차원 노심 모델을 사용하였으며, 에너지군은 VVER-1000 및 IAEA 벤치마크 문제에는 2군, SNR 문제에는 4군, 450 MWt 액금로에는 9군을 사용하였다. DIF3D 공식 버전에 포함된 유사변환 방법과 새로 첨가한 직접 해법을 사용하였고, 그 결과를 서로 비교하였다.

먼저 유사변환 방법으로 정확한 수학적 수반해가 계산되는 경우에 대해, 직접 해법에 의한 수반해와 유사변환 방법에 의한 수반해를 비교하였다. VVER-1000, IAEA 벤치마크 문제, SNR 및 450 MWt 액금로의 2차원 노심 모델에 대한 수반해를 계산하였다. 표 1에 보인 바와 같이, 유사변환 방법과 직접 해법 둘 다 본래의 노달 방정식의 고유치와 동일한 수반 고유치를 생산하였다. 또한, 유사변환 방법과 동일한 수학적 수반 중성자속 모멘트와 부분 중성자류가 직접 방법에 의해 계산되었다. 이는 DIF3D에 추가한 직접 해법이 유사변환 방법과 동일한 수반해를 계산함을 보여준다.

직접 해법과 유사변환 방법의 추가적 비교를 다양한 축방향 노드 크기의 3차원 노심 모델을 사용하여 SNR 및 450 MWt 액금로에 대해 수행하였다. 횡방향 누출율의 평탄 근사 및 2차 함수 근사에 대한 수학적 수반 방정식 및 물리적 수반 방정식의 고유치를 표 2와 3에 비교하였다. 표 2와 3은 직접 해법으로 얻은 수학적 수반 고유치가 해당 노달 방정식의 고유치와 일치함을 보인다. 한편, 물리적 수반 고유치는 단지 횡방향 누출율의 평탄 근사에 대해서만 노달 방정식의 고유치와 동일하다. 횡방향 누출율의 2차 함수 근사 경우, 물리적 수반 방

정식의 고유치가 노달 방정식의 고유치와 다소 차이를 보인다. 물리적 수반 방정식과 노달 방정식 사이의 고유값의 차이는 축방향 노드 크기가 감소함에 따라 작아진다. 또한, 유사변환으로 정확한 수반해가 결정되는 횡방향 누출율의 평탄 근사 경우, 직접 해법에 의해 구해진 수학적 수반해와 유사변환으로 계산된 수학적 수반해와 일치하였다.

7. 결 론

연소섭동이론 코드의 중성자속 및 수반 중성자속 계산 방법에 최근의 노달 방법을 도입하고자, 경계면 부분 중성자류 노달 방법의 수학적 수반해의 직접 해법을 OECD/NEA를 통하여 도입한 ANL의 DIF3D 코드에 구현하고 다양한 검증 계산을 수행하였다.

DIF3D의 공식 버전에 포함된 유사변환 방법은 물리적 수반해의 유사변환을 통하여 수학적 수반해를 계산한다. 이 방법은 횡방향 누출률을 2차 함수로 근사할 경우에는 수학적 수반해를 근사적으로 계산하며, 노달 등가 이론을 사용할 경우 적용할 수 없는 단점이 있다. 새로 DIF3D에 추가한 직접 해법은 각 노드의 수반 부분 중성자류의 선형 조합을 바탕으로 하여 수학적 수반해를 정확히 계산한다. 이 방법에서는 수반 부분 중성자류의 선형 조합을 통하여 수학적 수반 방정식이 본래의 노달 방정식과 매우 유사한 형태로 변형된다. 따라서, 본래의 노달 방정식 해법을 최소한의 수정을 통해 수반 방정식에 적용할 수 있다. 이 직접 해법은 등가 이론의 사용 여부에 관계없이 적용할 수 있다.

새로 추가한 직접 해법을 검증하기 위해, VVER-1000, IAEA 경수로 벤치마크 문제, SNR 및 450 MWt 액체금속로 노심에 대해 다양한 검증 계산을 수행하였다. 검증 계산 결과, 직접 해법이 횡방향 누출률의 평탄 근사 및 2차 함수 근사 둘 다에 대해 정확한 수학적 수반해를 계산함을 보였다.

참고 문헌

1. R. D. Lawrence, "The DIF3D Nodal Neutronics Option for Two- and Three-Dimensional Diffusion Theory Calculations in Hexagonal Geometry," ANL-83-1, Argonne National Laboratory (Mar. 1983).

2. 양원식, "연소 섭동 이론에 기초한 민감도 해석 방법 연구," 제5차 신형원자로연구센터 연구발표회 논문집, CARR/RCA-9701 (1997년 3월).

3. R. D. Lawrence, "Perturbation Theory Within the Framework of a Higher Order Nodal Method," *Trans. Am. Nucl. Soc.* **46**, 402 (1984).

4. W. S. Yang, T. A. Taiwo and H. Khalil, "Solution of the Mathematical Adjoint Equations for an Interface Current Nodal Formulation," *Nucl. Sci. Eng.,* **116**, 42-54 (1994).

표 1. 2차원 노심 모델에 대한 수반 방정식의 고유치

노 심	고유치(k_{eff})		
	노달 방정식	수학적 수반 방정식	물리적 수반 방정식
IAEA	1.002535	1.002535	1.002535
VVER-1000	1.006721	1.006721	1.006721
SNR	1.125286	1.125286	1.125286
450 MWt LMR	1.177224	1.177224	1.177224

표 2. SNR의 3차원 노심 모델에 대한 수반 방정식의 고유치

횡방향 누출 근사방법	축방향 노드[a] 크기(cm)	고유치(k_{eff})		
		노달 방정식	수학적 수반 방정식	물리적 수반 방정식
평탄 근사	10.0/11.9/10.0	1.011954	1.011954	1.011954
	13.3/15.8/13.3	1.012478	1.012478	1.012478
	20.0/23.8/20.0	1.013893	1.013893	1.013893
2차 함수 근사	10.0/11.9/10.0	1.011270	1.011270	1.011272
	13.3/15.8/13.3	1.011319	1.011319	1.011317
	20.0/23.8/20.0	1.011505	1.011505	1.011499

[a]상부 핵분열 가스 공간 / 노심 / 하부 반사체

표 3. 450 MWt 액금로의 3차원 노심 모델에 대한 수반 방정식의 고유치

횡방향 누출 근사 방법	축방향 노드[a] 크기(cm)	고유치(k_{eff})		
		노달 방정식	수학적 수반 방정식	물리적 수반 방정식
평탄 근사	9.2/10.0/10.0	1.051486	1.051486	1.051486
	9.2/14.0/10.0	1.051948	1.051948	1.051948
	13.7/20.0/14.0	1.053107	1.053107	1.053107
2차 함수 근사	9.2/10.0/10.0	1.050985	1.050985	1.050972
	9.2/14.3/10.0	1.051109	1.051109	1.051078
	13.7/20.0/14.0	1.051441	1.051441	1.051394

[a]상부 핵분열 가스 공간 / 노심 / 하부 반사체