

Application of PEN Method to Hexagonal Core Neutronics Analysis Benchmark Problems

홍인섭, 김창효
서울대학교

요 약

PEN^[1](다항식전개 노달) 해법을 육방형 노심의 과도상태 해석과 Adjoint flux(수반 중성자속) 해법에 응용하여 여러가지 Benchmark문제들^{[3][4][5]}을 풀고 그 결과를 다른 수치기법 결과와 비교·분석하였다. 2차원 육방형 대형중수로 과도상태 Benchmark 문제^[5]를 다항식전개 노달해법에 의한 과도상태 해석·검증의 대상으로 삼았으며 그 기준 계산치로서 FX2-TH 코드의 계산결과^[5]를 사용하였다. 대형중수로 노심의 과도상태 해석 결과, 기준해와 비교해 집합체 낙하시작 3초 후에 집합체가 낙하한 위치에서 Normalized Flux 오차가 0.5% 이내, 집합체가 낙하지 않은 위치에서 Normalized Flux 오차가 1% 이내의 정확한 결과를 보였다. Adjoint flux 해의 검증을 위해서는 VENTURE 코드^[2]의 계산 결과를 기준해로 하였으며, 계산능 검증을 위해 사용된 대부분의 Benchmark 문제들에서 작은 오차를 보였으나 반사체가 포함된 IAEA 문제^[4]에서는 큰 오차를 보였다.

1. 서론

이 연구의 목적은, 다항식전개 노달 해법을 이용한 육방형 노심해석의 적용범위 확장을 모색하는 것이며 그 구체적인 범위는 다음과 같다. 먼저 다항식전개 노달해법에 의한 과도상태 노심해석을 위해서 이에 적합한 시간차분화 수식을 유도하여 2차원 육방형 대형중수로 과도상태 Benchmark 문제를 풀이하였으며, 다음으로 Adjoint flux를 구해서 기준해와 비교·분석하였다. 다항식전개 노달 해법이 과도상태 노심해석에 적용되었을때의 결과와 Adjoint flux 해를 보임으로써 다항식전개 노달 해법의 적용범위를 확장하고자 한다.

2. 과도상태 노심 해석

2.1 시간에 대한 차분화.

Fully implicit method를 이용하여 시간중속 다균 확산방정식을 시간에 대해 차분화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_g} \frac{\phi_g^{(l+1)}(\mathbf{r}) - \phi_g^{(l)}(\mathbf{r})}{\Delta t_l} - \nabla \cdot D_g^{(l+1)}(\mathbf{r}) \nabla \phi_g^{(l+1)}(\mathbf{r}) + \Sigma_{rg}^{(l+1)}(\mathbf{r}) \phi_g^{(l+1)}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\chi_g(1-\beta)}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{(l+1)}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(l+1)}(\mathbf{r}) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{sgg'}^{(l+1)}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(l+1)}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & + \chi_g \sum_{d=1}^D \lambda_d C_d^{(l+1)}(\mathbf{r}) \\ C_d^{(l+1)}(\mathbf{r}) &= e^{-\lambda_d \Delta t_l} C_d^{(l)}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{\beta_d}{\lambda_d} \left\{ \frac{1}{\lambda_d \Delta t_l} (1 - e^{-\lambda_d \Delta t_l}) - e^{-\lambda_d \Delta t_l} \right\} \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{(l)}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(l)}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{\beta_d}{\lambda_d} \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda_d \Delta t_l} (1 - e^{-\lambda_d \Delta t_l}) \right\} \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{(l+1)}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(l+1)}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2)$$

단 $\phi_g^{(l)}(\mathbf{r}) = \phi_g(\mathbf{r}, t_l)$
 t_l : time step l 에서의 시간
 $\Delta t_l = t_{l+1} - t_l$
 β_d : 그룹(d)별 지발중성자 생성률
 λ_d : 지발중성자 선행핵 붕괴상수

2.2 다항식전개 노달 해법^[1]을 통한 공간에 대한 수식화.

식 (2)를 다항식전개 노달 해법에 적용하기 위하여 공간에 대한 적분을 수행하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\overline{C}_d^{(l+1)} = \mathbf{V}_d \overline{C}_d^{(l)} + \sum_{g=1}^G \mathbf{F}_g^{(l)} \overline{\phi}_g^{(l)} + \sum_{g=1}^G \mathbf{F}_g^{(l+1)} \overline{\phi}_g^{(l+1)} \quad (3)$$

$$\text{단 } \overline{C}_d^{m,(l)} = \frac{1}{V_m} \int_{v_m} C_d^{(l)}(\mathbf{r}) dv$$

$\overline{C}_d^{(l)}$ 은 $\overline{C}_d^{m,(l)}$ ($m=1,2,\dots,n$ n 은 노드의 총수)

\mathbf{V}_d : 지발중성자 성분에 해당하는 그룹별 계수 행렬($(n \times n)$ diagonal matrix)

식 (1)을 적분한 결과에 식 (3)을 대입하면 2차원의 경우 최종적으로 아래의 식 (4)와 같은 노달 중성자 평형식을 얻는다.

이 식과 면평균 중성자류 연속조건 (5)식^[1], 점에서의 중성자 누설균형식 (6)식^[1]을 통해서 과도 상태 노심해석 결과를 얻게 된다.

$$\mathbf{A}_1' \overline{\phi}^{(l+1)} + \mathbf{A}_2' \overline{\phi}_d^{(l+1)} + \mathbf{A}_3' \phi^{(l+1)} = \mathbf{F}' \overline{\phi}^{(l)} \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_1 \overline{\phi}^{(l+1)} + \mathbf{T}_2 \overline{\phi}_d^{(l+1)} + \mathbf{T}_3 \phi^{(l+1)} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\mathbf{0} \overline{\phi}^{(l+1)} + \mathbf{U}_1 \overline{\phi}_d^{(l+1)} + \mathbf{U}_2 \phi^{(l+1)} = \mathbf{0} \quad (6)$$

3. Adjoint flux 해

Adjoint flux 계산을 위한 대수방정식 (7)은 forward PEN matrix^[1] 를 transpose하여 얻어지며 그 결과를 VEVTURE 코드^[2]로 구한 기준해와 비교하여 다항식전개 노달 해법의 정확성을 분석하였다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{T}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^T & \mathbf{T}_2^T & \mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{A}_3^T & \mathbf{T}_3^T & \mathbf{U}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}^* \\ \phi_d^* \\ \phi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}^* \\ \phi_d^* \\ \phi^* \end{pmatrix} \quad (7)$$

단 $\bar{\phi}^*$: Adjoint flux vector

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{F}$: forward PEN 중성자 평형식의 계수 행렬.

$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$: forward PEN 면평균 중성자류 연속식의 계수 행렬.

$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$: forward PEN 중성자 누설 균형식의 계수 행렬.

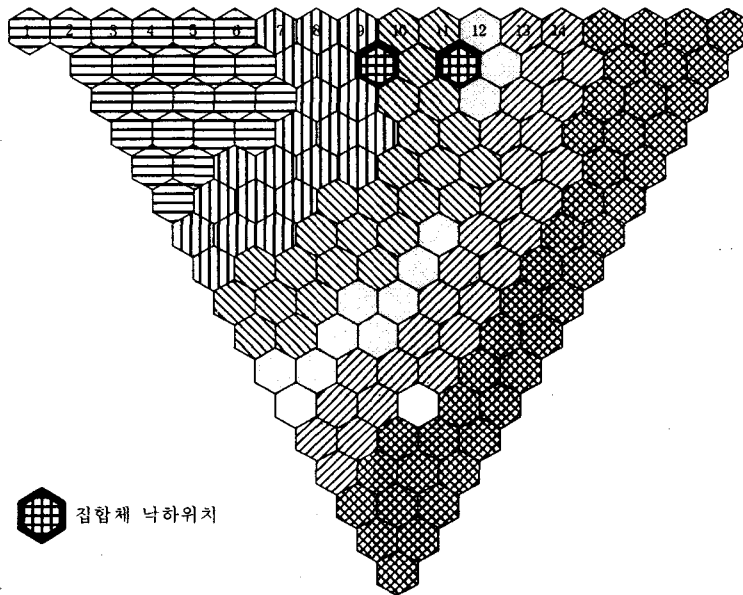
4. 수치계산 결과 및 토의

<그림1>은 과도상태 대형중수로 Benchmark 문제^[5]의 노심 형태이다. <그림2>, <표1>, <표2>는 이 문제에 대한 계산 결과이고 <표3>은 정상상태 노심 Benchmark 문제들^{[3][4][5]}에 대한 Adjoint flux 계산 결과이다. 과도상태 문제의 경우 <그림1>에 표시된 두 곳의 집합체 낙하위치에 0.205초의 시간 동안 핵연료 집합체가 낙하함으로써 노심 과도상태가 발생하게 된다. 두 개의 집합체 낙하시작(t=0 sec) 시점의 노심 상대출력을 1로 하고 이 시점으로부터 3초동안의 노심상대출력 변화를 계산하였다. 다항식전개 노달법을 이용한 계산 결과, 노심 상대출력의 경우 집합체 낙하시작 3초후(t=3 sec)에는 <그림2>를 참고하면 기준해와는 차이를 보이나 집합체를 54개의 삼각형으로 나누어서 계산한 FX2-TH 코드의 결과^[5]에 비견되며 DIF3D 코드의 결과^[5]보다 매우 우수한 결과를 보였다. 계산시간을 비교하기 위하여서는 <그림2>에 제시된 바와 같이 기준계산치와 근접한 결과를 보이는 유한요소법을 사용한 코드인 HEXFEM^[6]의 Quadratic Option을 선택하였다. 과도상태 대형중수로 Benchmark문제 풀이에서 3초동안의 시간을 64 step으로 나누어 계산한 결과, 다항식전개 노달법에 의한 코드 계산시간은 HEXFEM 코드 계산시간과 비교해 PENTIUM 266MHz CPU에서 2490 sec로 같은 정도를 보였다. <표1>과 <표2>의 결과에서는 집합체가 낙하된 위치에서는 최대 0.68%의 중성자속 오차를 보였고 <그림1>에 표시된 집합체 위치별 중성자속 오차에서도 DIF3D Nodal 코드의 최대오차는 1.33%인데 비해서 다항식전개 노달해법에 의한 최대오차는 0.6%를 보였다. 이와 같이 과도상태 노심 해석에서 다항식전개 노달법은 매우 좋은 해석 결과를 보였다. Adjoint flux 해는 반사체가 포함된 IAEA 문제^[4]에 대해서는 VENTURE^[2] 기준해에 비해서 최대오차 13% 정도의 큰 오차를 보였으나 나머지 문제들에 대해서는 최대오차 4% 이내의 비교적 정확한 결과를 보였다. 다항식전개 노달법이 반사체가 포함된 IAEA문제에 대해서 큰 오차를 보이는 것은 이 해법이 중성자속이 급격히 변하는 노드에서는 노드내 중성자속 분포를 제대로 묘사하지 못하기 때문인데 forward 계산 결과에서의 현상과 동일하다. <표3>에서 이러한 현상을 살펴 볼 수 있는데 상대적으로 중성자속분포가 고르지 못한 열중성자속분포의 경우가 속중성자속분포에 비해서 더 큰 최대오차와 평균오차를 보인다.

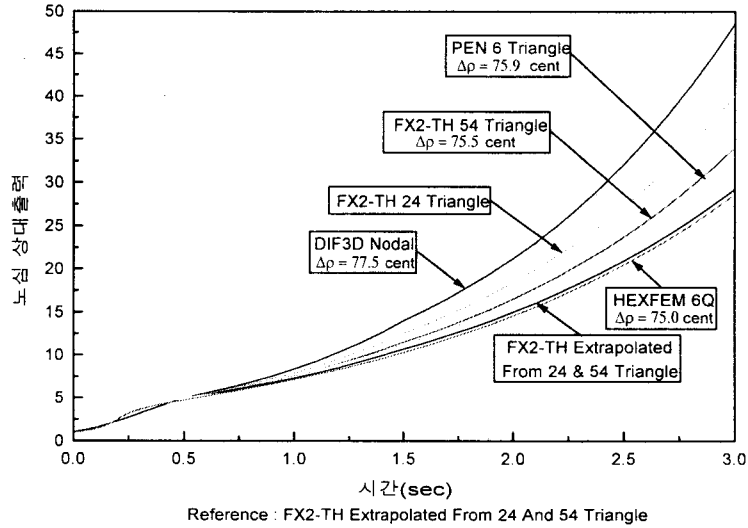
참고 문헌

- [1] 조진영. "육방형 노심 설계해석용 다항식전개 노달(PEN)해법의 개발", 박사 학위 논문, 서울대학교, 1997.
- [2] D.R.Vondy & T.B.Fowler & G.W.Cunningham "Input Data Requirements for Special Processors in the Computation System Containing the Venture Neutronics Code", 1979.
- [3] Y. A. Chao and Y.A. Shatilla, "The Theory of ANC-H:A Hexagonal Nodal Diffusion Code Using Conformal Mapping," Proc. 1994 Top. Meeting on Advances in Reactor Physics, Vol II, pp.324-336, Knoxville, TN, April 11-15, 1994.
- [4] "Argonne National Laboratory Code Center Benchmark Problem Book," ANL-7416, Suppl. 2, Argonne National Laboratory, 1977.
- [5] T. A. Taiwo and H. S. Khalil, "The DIF3D Nodal Kinetics Capability in Hex-z Geometry Formulation and Preliminary Tests," Proceedings of the International Topical Meeting on Advances in Mathematics, Computations, and Reactor Physics, Pittsburgh, PA, American Nuclear Society, April, 1991.
- [6] 김창호 외. "신형 경수로 노심 분석 전산체계 개발", KAERI/CM-098/96, 한국 원자력연구소, 1997.

■ 그림1. 대형 중수로 노심 형태



■ 그림2. 대형중수로의 시간에 따른 노심상대출력 변화



■ 표1. 핵연료 집합체가 낙하된 위치에서의 중성자속 및 오차

Group	t=0 sec 일때				t=3 sec 일때			
	Normalized Group Flux	Normalized Group Flux Error (%)			Normalized Group Flux	Normalized Group Flux Error (%)		
	FX2-TH Ext ¹⁾	DIF3D Nodal ²⁾	HEXFEM 6Q ³⁾	PEN Triangular ⁴⁾	FX2-TH Extr ¹⁾	DIF3D Nodal ²⁾	HEXFEM 6Q ³⁾	PEN Triangular ⁴⁾
1	1.7142	-3.15	0.68	-0.68	2.3610	-1.05	0.27	-0.45
2	4.5454	3.38	-0.47	0.62	4.8393	3.25	-0.51	0.37
Total	2.4769	0.08	0.11	-0.04	3.0297	0.79	-0.08	-0.11

- 1) 집합체당 6개의 삼각형 격자로 나누어 FX2-TH 코드로 계산한 결과와 집합체당 54개의 삼각형 격자로 나누어 FX2-TH 코드로 계산한 결과를 Richardson 외삽법으로 구한 기준해.
- 2) 집합체를 하나의 노드로 하여 DIF3D Nodal 코드로 계산한 결과.
- 3) 집합체당 6개의 Quadratic 삼각형 유한요소로 나누어 HEXFEM 코드로 계산한 결과.
- 4) 집합체당 6개의 삼각형 격자로 나누어 TPEN(Transient PEN) 코드로 계산한 결과.

■ 표2. 집합체 위치별 중성자속 분포 및 오차

집합체 위치	t=0 sec 일때				t=3 sec 일때			
	Normalized Flux	Normalized Flux Error (%)			Normalized Flux	Normalized Flux Error (%)		
		FX2-TH Extr ¹⁾	DIF3D Nodal ²⁾	HEXFEM 6Q ³⁾		PEN Triangular ⁴⁾	FX2-TH Extr ¹⁾	DIF3D Nodal ²⁾
1	1.0000	0.00	0.00	0.00	1.0000	0.00	0.00	0.00
2	1.0145	-0.01	0.00	0.00	1.0172	0.00	0.00	-0.01
3	1.0586	-0.03	0.01	-0.02	1.0696	0.01	-0.00	-0.01
4	1.1342	-0.05	0.01	-0.03	1.1602	0.03	-0.01	-0.02
5	1.2448	-0.09	0.03	-0.05	1.2945	0.05	-0.02	-0.04
6	1.3951	-0.13	0.05	-0.08	1.4814	0.08	-0.02	-0.05
7	1.5959	-0.22	0.07	-0.11	1.7399	0.10	-0.02	-0.07
8	1.8944	-0.33	0.10	-0.16	2.1342	0.12	-0.03	-0.09
9	2.3495	-0.34	0.14	-0.14	2.7398	0.25	-0.00	-0.06
10	2.7960	-0.27	0.14	-0.21	3.3063	0.34	-0.02	-0.14
11	2.6777	-0.39	0.18	-0.25	3.1889	0.24	0.01	-0.19
12	2.0118	-0.45	0.23	-0.25	2.4063	0.21	0.05	-0.19
13	1.0871	-0.14	0.41	0.22	1.2956	0.32	0.06	0.12
14	0.3937	0.73	-0.06	0.54	0.4668	1.33	-0.22	0.60

■ 표3. Adjoint Flux 계산 오차

	ϵ_{max} (%)		ϵ_{avg} (%)	
	1st group	2nd group	1st group	2nd group
VVER1000($\alpha=0.125$)	1.23	1.68	0.47	0.71
VVER1000($\alpha=0.5$)	3.06	3.95	0.80	1.05
IAEA I ¹⁾ ($\alpha=0.125$)	11.3	13.7	5.09	5.93
IAEA I ¹⁾ ($\alpha=0.5$)	9.57	10.1	4.00	4.87
IAEAX II ²⁾ ($\alpha=0.125$)	1.83	2.06	0.56	0.81
IAEAX II ²⁾ ($\alpha=0.5$)	1.59	2.28	0.73	1.08
Large HWR	0.86	1.73	0.15	0.15

- 1) 반사체를 포함한 IAEA문제
- 2) 반사체를 포함하지 않은 IAEA문제