

공기막 돔의 국부 하중 해석

Analysis of Spherical Air Membrane Dome Structures with Local Loadings

이 광 순* 박 정 현** 홍 기 섭*** 홍 영 균***
Lee, Kwang-Soon Park, Jung-Hyun Hong, Gi-Suop Hong, Young-Kyun

ABSTRACT

The use of air-supported membrane has considerable attention in recent years. There are, however, a number of problems in the behavior of these structures that have not been fully investigated. For example, the problem of local loading on such membranes has not been analyzed yet. The paper presents an analysis of internal and external potential energy of a spherical air-supported membrane with vertical longitudinal axis, subjected to local loadings. An internal pressure value of the applied load is established at which the potential of these structures change positive. During such change the loading portion of the membrane comes into work beyond stable state. The mathematical method is used throughout the paper in obtaining solution. For the mathematical modeling, two assumption are used. One is the theta's elimination and the other is the infinite condition. The paper is illustrating the examples of spherical air membrane dome subjected to local load.

1. 서 론

최근에 공기막 구조는 옥외집회장이나 운동시설, 임시 혹은 반영구적 상업 시설에 사용이 갈수록 증가하고 있으며, 이에 대한 연구도 활발히 이루어지고 있다. 하지만, 이러한 구조물에 국부하중이 작용할 때 돔형 공기막 구조의 거동 및 내력을 명확히 파악할 수 없다. 그리고 이들 국부하중의 크기에 대한 평가는 가우스 곡률과 구조물의 국부 기하학적 성질의 관계에 따라 결정되므로 설계에 반영하기가 어렵고, 또한 구조물 설계에 있어 강도뿐만 아니라 기능성 등을 고려할 때 국부하중의 영향이 충분히 고려되어야 하므로 국부하중에 대한 연구의 필요성이 강조되고 있다.

본 논문은 국부하중이 작용할 경우의 돔형 공기막 구조의 포텐셜 에너지와 내압 문제를 다룬 것으로, 이러한 구조체는 군사용 안테나 기지나 스포츠 시설등에 사용된다.

막구조에서 포텐셜 에너지가 변화하면 막의 하중 작용부분이 막구조의 국부 기하학적 성질에 상당

* 홍익대학교 건축학과 석사과정

** 홍익대학교 건축학과 박사과정

*** 홍익대학교 건축학과 교수

하는 일을 하게 되며 푸리에의 비등가성 개념인 $W = W_i + W_e$ 에서 $W_e \leq \Delta U$ 의 관계로 표현된다. 여기서 W 는 시스템의 포텐셜 에너지이다.

이탈리아 바코우그룹에서는 구형 공기 막의 초기 인장해석을 위하여 취급이 간편하고 정밀도가 높은 유한 요소법의 사용을 제시하고 있다. 이 기법을 적용하여 국부하중에 대한 해석도 수행할 수 있지만, 본 논문에서는 축대칭 하중에 대한 해석방법으로 좌표 변환을 사용해서 포텐셜 방정식을 작성하고, 이를 이용한 초기인장값을 구하기 위한 연구를 수행한다.

2. 고전 막 이론

기존의 막 이론은 막의 미소 부분에서 막의 양방향 힘과 외력이 국부 좌표의 2축에 대해서 평형 조건을 만족하는 것에서 설계식들을 유도해낸다. 여기서 가우스 곡률이 0보다 크고, 국부 기하학적 성질이 일정한 원형 공기막 구조에서 하중이 작용할 때의 양방향 힘에 대한 식들이 도출된다. 이때는 구조물의 일반적 성질의 특성으로 인해서 내압에 의한 초기 인장이 이루어진다.

막에서의 평균 곡률은 p 와 n 에 영향을 받는다.

$$b_a = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{p}{n} = const \quad (\text{식 1})$$

평균 곡률 b_a 은 텐서 계산에 의해서 임의의 좌표계에서 표현되며, 카티시안 좌표계로써 식(2)와 같이 된다.

$$\frac{z_{,xx}(1+z_{,y}^2) + z_{,yy}(1+z_{,x}^2) - 2z_{,xy} \cdot z_{,x} \cdot z_{,y}}{(1+z_{,x}^2+z_{,y}^2)^{3/2}} = \frac{p}{n} \quad (\text{식 2})$$

$$\text{여기서, } z_{,x} = \frac{\partial z}{\partial x}, z_{,y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

막의 주 힘은 다음의 공식으로 계산이 된다.

$$n_{\max} = \frac{J_1 \pm \sqrt{(J_1)^2 - 4 \cdot J_2}}{2}$$

여기서,

$$J_1 = n_{11} + n_{22}, J_2 = n_{11} \cdot n_{22} - (n_{12})^2$$

표면 요소의 기하학적 성질은 다음의 값으로 기술이 된다.

$$\text{길이 : } \sqrt{a_{11}} = r, \sqrt{a_{22}} = \sqrt{1+r_z^2}$$

$$\text{면적 : } \sqrt{a} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}$$

$$\text{곡률 : } b_1^1 = -\frac{1}{\sqrt{a}}, b_2^2 = \frac{r^3 \cdot r_{,zz}}{a^{3/2}}$$

$$\text{길이의 변화 : } (\sqrt{a_{11}})_{,z} = \Gamma_{12} \sqrt{a_{11}}, (\sqrt{a_{22}})_{,\phi} = 0$$

축 대칭 막의 평형, 변형 조건은 다음식과 같다.

· 평형식

$$\begin{bmatrix} d_1 & 2\Gamma + d_2 & 0 \\ -\Gamma & d_1 & \Gamma + d_2 \\ b_1^1 & 0 & b_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{식 3})$$

· 변형 조건식

$$\begin{bmatrix} d_1 & \Gamma & -b_1^1 \\ d_2 - \Gamma & d_1 & 0 \\ 0 & d_2 & -b_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ 2\alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{식 4})$$

여기서, 회전 대칭막의 특수 기하학적 성질과 함께 힘과 변위의 축약 기호는 다음과 같다.

$$d_1 = \frac{\partial(\cdot)}{\sqrt{a_{11}} \partial \phi}, \quad d_2 = \frac{\partial(\cdot)}{\sqrt{a_{22}} dz}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_{12}^1}{\sqrt{a_{22}}}$$

n_{11} 을 식 (3)에서 소거하면 다음의 식이 얻어진다.

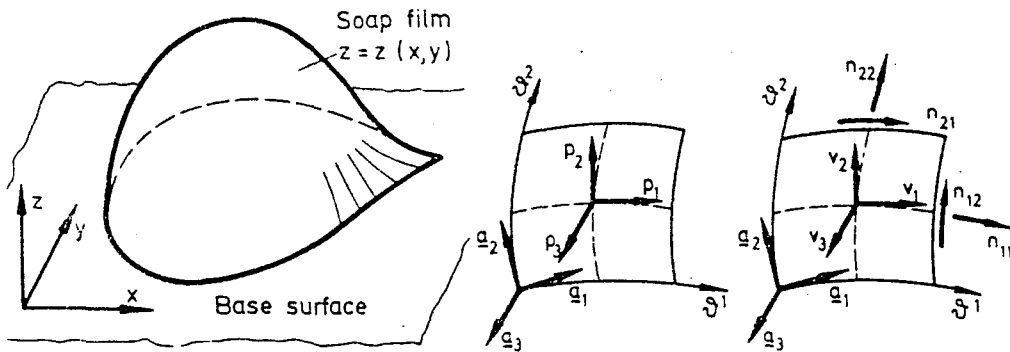


그림1 비누막 모델

그림2 부호규약

$$N_{12,z} + r r_{,zz} N_{22,\phi} = -r \sqrt{a} p_1 - a p_{3,\phi}$$

$$N_{12,\phi} + r^2 N_{22,z} = -r^3 p_2 + r^3 r_{,z} p_3$$

또한 v_3 를 식 (4)에서 소거하면 다음의 식이 얻어진다.

$$V_1 = \frac{v_1}{r}, \quad V_2 = \frac{\sqrt{a}}{r} v_2$$

$$V_{2,z} + r r_{,zz} V_{1,\phi} = r r_{,zz} \alpha_{11} + \alpha_{22}$$

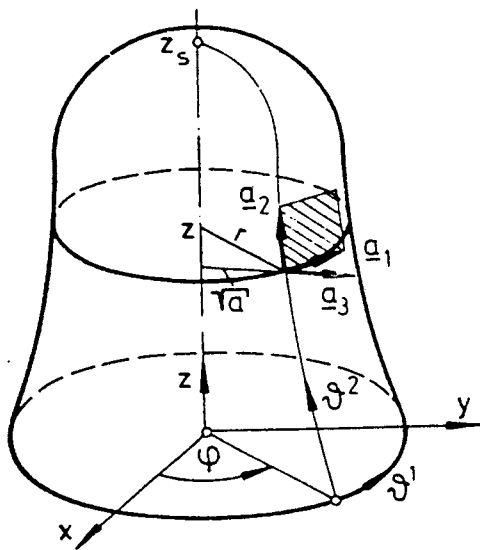
$$V_{2,\phi} + r^2 V_{1,z} = \sqrt{a} \alpha_{12}$$

회전 대칭막에서 대칭 조건으로 ϕ 에 관한 미분항은 사라지므로 적분과정을 거치면 막응력은 아래의 식으로 표현 된다.

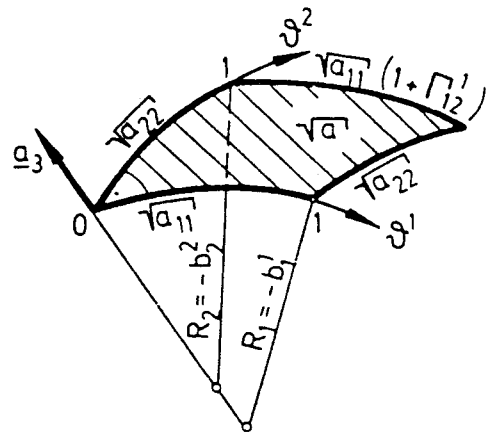
$$n_{22} = \frac{a}{r^2} \int_{z_1}^z (-r \cdot p_2 + r \cdot r_{,z} p_3) dz + C_1$$

$$n_{12} = -\frac{1}{r^2} \int_{z_1}^z r \sqrt{a} p_1 dz + C_2$$

$$n_{11} = \sqrt{a} p_3 + \frac{r^3 \cdot r_{,zz}}{a} n_{22}$$



(a) 막의 기하학적 성질



(b) 표면 요소 ($a_{12}=b_{12}=0$)

그림3 회전에 의해 생성된 막

3. 국부 하중에 대한 모델링

정밀 해를 근거로 하여 포텐셜 에너지를 계산하면, 평면성분에서 미지항인 θ 를 포함한 에너지 분포와 이것을 무시한 에너지 분포는 원형 공기막에서 하중이 대칭적으로 작용하는 경우에 동일한 결과를 나타낸다. 또한, 평면성분 θ 의 미지항을 무시한 에너지 분포를 도입하면 초기 인장값의 계산이 간략하게 되므로 본 논문에서는 2차 미지항을 포함한 에너지 분포의 가정을 도입한다.

구형 공기 막 돔의 지배방정식은 평면성분에서 미지항인 θ 를 무시한 에너지 분포로 가정하면 다음의 형태로 표현할 수 있다.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(x, y, z)좌표계에서 (r, θ, ϕ)좌표계로 좌표축을 변환하면,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{식 5})$$

θ 는 관계하지 않는 것으로 보고 정리하면

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (\text{식 6})$$

$$\frac{\partial r}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi}) = 0 \quad (\text{식 7})$$

본 논문에서 다루어지는 원형 공기 막 구조는 정상부가 달혀 있고, 경계부분이 하나인 돔 형태의 공기 막 구조이다. 식 (6) 및 식 (7)의 해 w 는 $\cos \phi$ 를 w 로 변화하여 르장드르의 다항식을 이용하면 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi), \quad A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \times \int_{-1}^1 f(w) P_n(w) dw \quad (\text{식 8})$$

윗 식에서 n 은 포텐셜 에너지 계산에 사용되는 포텐셜 에너지 수로 $P_n(w)$ 은 르장드르 다항식을 표현하고, A_n 은 가상 포텐셜 에너지이다. 르장드르 다항식의 조합에 의해 하나의 포텐셜 에너지를 표현하고, 그 포텐셜 에너지의 조합에 의해 해 u 를 나타낼 수 있으며, 이 가상 포텐셜 에너지에 포함된 $f(w)$ 의 선정법이 최종적으로 해의 정밀도를 결정하게 된다. 여기에서, $n=1$ 일 때 르장드르의 다항식은 다음과 같이 급수로 전개할 수 있다.

$$P_n(w) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} w^{(n-2m)} \quad (\text{식 9})$$

위의 식은 유한 시스템으로 제한되었지만 무한개로 팽창할 가능성이 있는 르장드르 다항식으로 전개 할 수 있다. 이러한 무한 시스템을 분석하기 위해서는, 유한 자유 물체로 분리해야 하므로 본 논문에서는 르장드르 다항식의 3차항까지만 고려하는 약산식을 수행한다.

국부 하중에 대한 해석은 푸리에 르장드르 급수의 매개 변수값을 치환하여 적분하는 방법을 사용하며, 여기서 $f(\phi)$ 는 $w = \cos \phi$ 와 $dw = -\sin \phi d\phi$ 의 함수로 나타내며, 적분한계 -1 과 1 로 각각 $\phi = \pi$ 와 $\phi = 0$ 에 해당하는 적분해석을 수행한다.

$$A_n = \frac{2n+1}{2} R^n \times \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) d\phi \quad (\text{식 10})$$

외부점에 대한 해는 $u^*(r, \phi)$ 를 사용하여 동일한 방법으로 풀면 다음과 같다.

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} \times P_n(\cos \phi), \quad (r \geq R) \quad (\text{식 11})$$

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi \quad (\text{식 12})$$

푸리에의 비등가성에 의해 움직임이 없는 역학 시스템은 작은 가상 변위에 대해서 W 가 0 이하일 때 안정성을 유지한다.

$$\begin{aligned}
\Delta U &= u(R, \phi) - u(r, \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi) \tag{식 13}
\end{aligned}$$

위식에서 $\sum_{n=0}^{\infty} R^n P_n(\cos \phi)$ 값은 0 보다 크다. 따라서 ΔU 값이 0보다 같거나 적기 위해서는 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 값이 0 이거나 0 보다 적어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_x^0 f(\phi) P_n(\phi) d\phi \leq 0 \\
a_n &= \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_x^0 P_n(\phi) d\phi \geq 0 \tag{식 14}
\end{aligned}$$

따라서, $f(\phi)$ 가 0 이거나 0 보다 적어야 하며, 0일 경우는 내압과 외압이 전체 면에서 동일하고, 음(-)일 경우는 내압이 외압보다 크다.

4. 수치해석

상기 공식을 이용하여 외압과 내압이 각각 $1kN/m^2$ 씩 작용하는 경우(Case 1)와 외압이 $1kN/m^2$ 이고 내압이 $2kN/m^2$ 로 작용하는 경우(Case 2), 그리고 국부 하중으로 외압이 임의각 10° 내에 $1kN/m^2$ 이 작용하는 경우(Case 3)를 분석해 본다.

$f(\phi)$ 값이 1일 때 발생된 u 를 구하며, 임의 각 x 에서의 가상 하중 1에 의한 에너지는 (식 10)에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{(2n+1)}{2R^n} \int_x^0 f(\phi) P_n(\phi) d\phi \\
&= \frac{2n+1}{2^{n+1} \cdot R^n} f(\phi) \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} \int_{\cos x}^0 w^{n-2m} dw \\
&= \frac{2n+1}{2^{n+1} \cdot R^n} f(\phi) \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!} [1 - (\cos x)^{n-2m+1}] \tag{식 15}
\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x) \\
A_1 &= \frac{3}{4} (1 - (\cos x)^2) \frac{1}{R} \\
A_2 &= 0 \\
A_3 &= -\frac{7}{2^4} (1 - (\cos x)^2) \frac{1}{R^3}
\end{aligned}$$

식 (8)에서

$$\begin{aligned}
 u(R, \phi) &= \frac{1}{2}(1 - \cos x) + \frac{3}{4} P_1 \cos(\phi)(1 - (\cos x)^2) - \frac{7}{2^4} P_3(\cos \phi)(1 - (\cos x)^2) + \dots \\
 &= \frac{1}{2}(\cos x - 1) + \frac{3}{4} \cos(\phi)(1 - (\cos x)^2) \\
 &\quad - \frac{7}{2^4} \frac{(5(\cos \phi)^3 - 3\cos \phi)}{2} (1 - (\cos x)^2) + \dots
 \end{aligned} \tag{ 식 16 }$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= (2n+1)/2R^n \times \int_0^{\pi/2} f(\phi) P_n(\phi) d\phi \\
 &= \frac{2n+1}{2^{n+1} \cdot R^n} f(\phi) \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} \int_1^0 w^{n-2m} dw \\
 &= \frac{2n+1}{2^{n+1} \cdot R^n} f(\phi) \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} \int_1^0 w^{n-2m} dw \\
 &= \frac{2n+1}{2^{n+1} \cdot R^n} f(\phi) \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!} \\
 &\quad \times [(0)^{n-2m+1} - (1)^{n-2m+1}]
 \end{aligned} \tag{ 식 17 }$$

$$\Delta U = u(R, \phi) - u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) = 0 \tag{ 식 18 }$$

따라서, 식 (18)에 의하여 Case 1을 적용할 경우는 ΔU 가 0이 나온다. 똑같은 과정으로 외압이 $2kN/m^2$ 으로 작용하는 Case 2일경우도 $u(R, t) \leq 0$ 로 평형이 성립한다. 즉, 등분포 하중이 돔의 상부에 작용하고 있는 경우에 포텐셜을 이용한 해법과 고전적 해법이 같은 결과를 나타낸다. Case 3에 대해서는 식 (16)에서 x 를 임의각 10° 내로 대입하여 계산하여 이때의 $u(R, \phi)$ 의 값과 반원형 공기막 돔에 내압이 전체 내부에 작용할 때 값은 표1과 같다.

표1 외압과 내압에 의한 에너지값

c*	s**	cos(s)	U1***	U2****
1.0	0.070	1.000	0.0170448	-0.50000
2.0	0.087	0.999	0.0170707	-0.50000
3.0	0.105	0.999	0.0171136	-0.50000
4.0	0.122	0.998	0.0171736	-0.50000
5.0	0.140	0.996	0.0172502	-0.50000
6.0	0.157	0.995	0.0173434	-0.50000
7.0	0.175	0.993	0.0174528	-0.50000
8.0	0.017	0.990	0.0175779	-0.50000
9.0	0.035	0.988	0.0177184	-0.50000
10.0	0.052	0.985	0.0178737	-0.50000

* : 각도, ** : $c \frac{\pi}{180}$

*** : 극부하중 $1kN/m^2$ 이 10도 내로 작용할 때 포텐셜 에너지

**** : 내압 $1kN/m^2$ 이 작용할시의 포텐셜 에너지

$$\Delta U = U_1 + U_2 \leq 0 \quad (\text{식 19})$$

Case3의 국부 하중이 작용할 때 내압 $0.036kN/m^2$ 이 작용하면 평형 조건을 만족함을 알 수 있다.

5. 결론

식 (18)에 의해 에너지에 의한 초기 내압이 정밀해(Case 1과 Case 2)와 거의 일치하고 있으므로, 제안한 근사 에너지의 타당성을 확인하였다. $\theta = 10^\circ$ 을 기준으로 한 르장드르 다항식의 근사에 의한 A_n 의 계산식은 대칭 국부 하중이 작용할 때 충분히 실용적이라고 판단된다. 또한, 대칭 국부 하중에서 근사 에너지를 사용함으로써 초기 인장 계산이 간단히 수행될 수 있고, 영역 적분시 폐형 함수형태로 정식화함으로써 단순화될 수 있음을 보였다. 축대칭으로 하중이 작용할 경우 에너지를 사용함으로써 비선형 국부하중의 수행도 간편화할 수 있으며, 구형 공기 막의 거동성상을 보다 명확히 규명할 수 있다고 판단된다.

6. 참고 문헌

1. Tomas Herzog, "Pnumatic Structure, A Handbook of Inflatable Architecture", Oxford University Press, New Yourk, 1976
2. 한국전산구조공학회, "대공간 구조물의 해석 및 설계", 제 15회 전산구조공학회 기술강습회, 1997
3. Erwin Kreyszig, "Advanced enginnering mathematics", Jone Willy & Sons, 1993
4. Henry L. Langhaar, "Energy Methods in Applied Mechanics", Jone Willy & Sons, 1962
5. Baku Group, venevento.peoples.it/~baku/forten.html, "Forten"